

波高の極値統計解析における層別化手法の精度の検討

山口正隆*・畑田佳男**・大福 学***

1. 緒 言

波高の極値統計解析に用いる資料には独立性と等質性が要求される(合田, 1990)。資料の独立性は年最大波高(AM)資料あるいは極大波高(POT)資料を用いることにより保証されよう。一方, 資料の等質性は極値資料を発生要因別(Cavaleriら, 1986; 山口ら, 1995, 1998), 低気圧・台風の経路別(Resio, 1978; Tsuchiyaら, 1984), 期間別(Carterら, 1981; Mortonら, 1997)に抽出することによって確保されると考えられる。このような層別極値資料の確率分布が推定された場合, 合成確率波高は層別極値資料に対する確率分布の乗積計算から理論的に求められる。しかし, 合成確率波高の分散の計算は経験式に依っており, その精度は検証されていない。

そこで, 本研究ではモンテカルロシミュレーションに基づいて層別化手法, すなわち合成確率波高と合成分散の推定法(合田, 1990)の精度を調べるとともに, 層別極値資料の代表的解析例であるResio(1978)による波高資料を再解析することによって, 層別化手法の有効性を検討する。

2. 合成確率波高および合成分散の推定法

層別年最大波高資料あるいは層別極大波高資料の確率分布 $F_j(H)$ が推定された場合, これらを結合した合成確率分布 $F(H)$ は, n を極値資料の層別数として, それぞれ次式で求められる(合田, 1990)。

$$F(H) = \prod_{j=1}^n F_j(H) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$F(H) = \exp\left[-\sum_{j=1}^n \lambda_j \{1 - F_j(H)\}\right] \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに, λ_j は層別極大波高資料の年平均発生数である。したがって, 上式より層別極値資料に対する合成確率波高の算定が可能になる。

一方, 層別確率波高の分散に対する合成法として, 次式による方法が提案されている(合田, 1990)。

$$\sigma^2(H_R) = \frac{\sum_{j=1}^n N_j \sigma_j^2(H_R)}{\sum_{j=1}^n N_j} \quad \dots\dots\dots (3)$$

または,

$$\sigma^2(H_R) = \frac{\sum_{j=1}^n N_j \{1 - F_j(H_R)\} \sigma_j^2(H_R)}{\sum_{j=1}^n N_j \{1 - F_j(H_R)\}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに, N_j : 層別資料数, H_R : 式(1)あるいは式(2)の合成確率分布より得られる合成確率波高, $\sigma_j^2(H_R)$: 合成確率波高 H_R に対する層別分散, である。式(3)はCavaleriら(1986)によって気象擾乱別極大波高追算資料の解析に用いられたものであり, 式(4)は合成確率波高の超過確率を重みとする合田(1990)の修正式である。ただし, Cavaleriら(1986)の研究では, 合成確率波高でなく層別確率波高に対する分散そのものが合成分散の算出に用いられているようであり, 式(3)とは取扱いが異なる。以上の諸式は確率分布や母数推定法の種類に依存しない。

3. 最小 2 乗法に基づく極値統計解析モデル

極値統計解析には, 最小 2 乗法に基づく合田(1990)のモデルを変更したYamaguchiら(1997)のモデル(拡張型モデル)を用いる。拡張型モデルはGumbel分布, 形状母数 $k \geq 0.5$ の任意個数(ここでは $k=0.5 \sim 10.0$ の 27 個)の 3 母数 Weibull 分布および形状母数 $k \geq 2.5$ の任意個数(ここでは $k=2.5 \sim 40.0$ の 20 個)の FT-II 型分布の計 48 個を候補確率分布とし, 線形最小 2 乗法による母数算定を前提とする, 合田(1990)のプロットング公式を用いた非超過確率表示に基づく確率波高推定法, 最大相関係数規準に基づく最適分布選択法, jackknife 法(Miller, 1974)に基づく確率波高の分散推定法および適用範囲を拡大した, 合田(1990)の DOL・REC 規準に基づく候補分布棄却検定法よりなる。モデルの変更点は候補分布における形状母数の個数と範囲の拡大および分散推定のための jackknife 法の適用である。合田(1990)のモデルは事象の年平均発生数 $\lambda (=N_T/K)$, N_T : 資料総数, K : 資料年数)および資料採択率 $\nu (=N/N_T)$, N : 採択資料数)を導入することによって, 年最大波高資料お

* 正会員 工博 愛媛大学教授 工学部環境建設工学科
 ** 正会員 工修 愛媛大学助手 工学部環境建設工学科
 *** 愛媛大学技官 工学部環境建設工学科

よび極大波高資料の両者に使用しうる汎用性もち、拡張型モデルもこの特徴を保持する。

Gumbel分布, 3母数 Weibull分布およびFT-II型分布の非超過確率 $F(H)$ とその inverse form はそれぞれ次式で表される。

$$F(H) = \exp[-\exp\{-(H-B)/A\}] \quad ; -\infty < H < \infty$$

$$H = B - A \log\{-F(H)\} \dots\dots\dots (5)$$

$$F(H) = 1 - \exp\{-[(H-B)/A]^k\} \quad ; B \leq H < \infty$$

$$H = B + A[-\log\{1-F(H)\}]^{1/k} \dots\dots\dots (6)$$

$$F(H) = \exp\{-[1+(H-B)/kA]^{-k}\}$$

$$; k > 0, B - kA \leq H < \infty$$

$$H = B + kA[-\log F(H)]^{-1/k} - 1 \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 A : 尺度母数, B : 位置母数, である。

4. モンテカルロシミュレーションに基づく精度の検討

(1) シミュレーションの方法

シミュレーションは対象分布を Gumbel 分布, Weibull 分布, FT-II型分布として, 確率分布の形状母数, 位置母数, 尺度母数, 層別数の組合せを適宜変えて行。年最大波高資料および極大波高資料は式(5)~式(7)の $F(H)$ に一様乱数を入力することによって作成されるが, 極大波高資料の場合には, $F(H)$ のかわりに $1 + (1/\lambda)\log F(H)$ を用いる。シミュレーションの手順はつぎのようである。

①層別確率分布の母数(k, A, B)と層別数($n=2, 4, 12$), 極大波高資料の場合には年平均発生数($\lambda=8$)を与え, 式(1)あるいは式(2)より再現期間($R=50, 100, 200, 500, 1000$ 年)に対する合成確率波高の真値 $H_{r,R}$ を得る。また, 資料採択率 ν を年最大波高資料($\nu=1$)および極大波高資料の場合($\nu=1/8$)にそれぞれ指定する。

②資料年数 $K(=10, 20, 30, 40, 50, 70, 100$ 年)を与える。これにより, 資料総数 N_T と採択資料数 N が決まる。

③同一の一様乱数の組を入力値とする層別極値資料を解析して得た母数を用いて, 層別確率波高 $H_{j,R}$, ついで式(1)あるいは式(2)から合成確率波高 H_R を計算する。

④③の操作を $M(=5000)$ 回繰り返したのち, M 個の合成確率波高より平均値 \bar{H}_R と $\text{bias } \Delta H_R (= \bar{H}_R - H_{r,R})$ および分散 $\text{Var}(H_R)$ を, また M 個の層別確率波高より得た層別分散 $\sigma_j^2(H_{j,R})$ の \bar{H}_R に対する補間値 $\sigma_j^2(\bar{H}_R)$ と母数の層別平均値を用いて, 式(3)あるいは式(4)より合成分散 $\sigma^2(\bar{H}_R)$ を計算する。

⑤資料年数 K を変えて②~④の計算を繰り返す。

シミュレーションは既知母分布を前提として行うことから, 極値統計解析では候補分布の形状母数を入力分布のそれに固定することとし, 最大相関係数基準によって

最適分布を選択する方法を用いない。また, jackknife 法による確率波高の分散推定も行わない。

層別極値資料の作成に際して同一の一様乱数の組を使用するのは, 入力確率分布が同じ場合に相等しい層別確率波高および分散を得るためである。合成確率波高の平均値 \bar{H}_R に対する層別分散 $\sigma_j^2(\bar{H}_R)$ の推定は種々の再現期間($R=50, 100, 500, 1000, 10000$ 年)に対する $\sigma_j(H_{j,R})$ を対数線形補間することにより行。なお, 以下では記号 ' \bar{H}_R ' を省略する。

(2) 結果の考察

図は再現期間 100 年に対して, 合成確率波高の真値 $H_{r,R}$ で無次元化した $\text{bias } \Delta \bar{H}$ および分散平方根 $\sqrt{\text{Var}^{1/2}}$ と, $\text{Var}^{1/2}$ で無次元化した合成分散平方根 (合成標準偏差) σ の%値と資料年数 K との関係で表わす。図-1 は層別数を $n=4$ とした場合の, 同一分布に従う年最大波高資料 (AM) および極大波高資料 (POT) に対する解析結果のうち $\Delta \bar{H}$ および σ を, $k=1.4, A=5.0$ m, $B=1.0$ m (以下では, 単位を省略) の Weibull 分布について示したものである。この場合, 式(3)および式(4)による合成分散は一致するので, 一方のみが与えられる。両極値資料に対して資料年数あるいは採択資料数によらず, $\text{bias } \Delta \bar{H}$ はほぼ 0 である。最小 2 乗法に基づく極値統計解析モデル (Yamaguchi ら, 1997) は既知母分布ケースに対してほとんど bias を生じないことから, ほぼ全検討ケースを通じて, $\text{bias } \Delta \bar{H}$ は小さい。一方, 合成分散平方根 σ も $\text{Var}^{1/2}$ とほぼ一致する。この結果は確率分布の種類や層別数に係わりなく成り立つ。シミュレーションでは, 層別極値資料の作成に同一の一様乱数の組を使用することから, 層別確率波高および層別分散も相互に一致する。また, 同じ再現期間に対して, 合成確率波高は層別確率波高より大きくなるので, 合成確率波高に対応

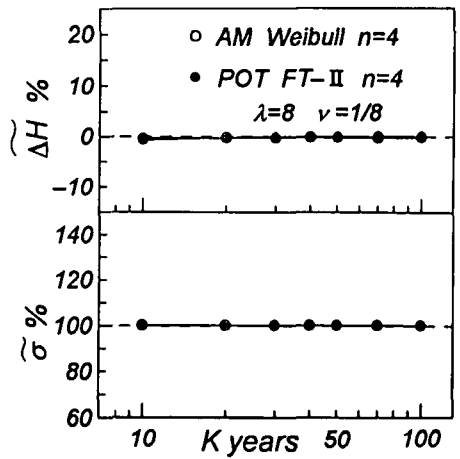


図-1 $\Delta \bar{H}$, σ と K の関係 (同一層別確率分布の場合)

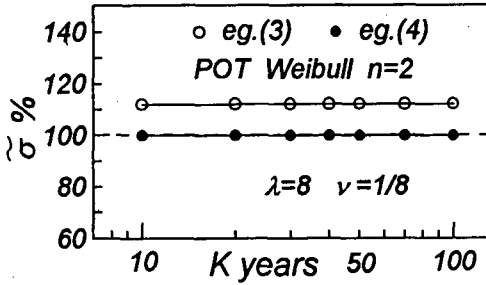


図-2 2つの合成分散評価式の精度の比較

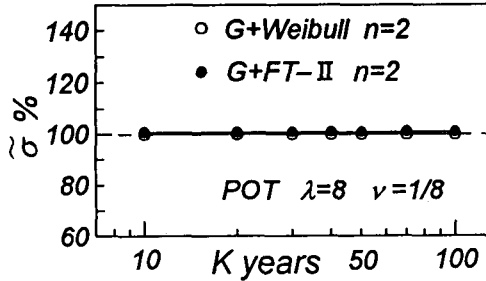


図-3 $\hat{\sigma}$ と K の関係

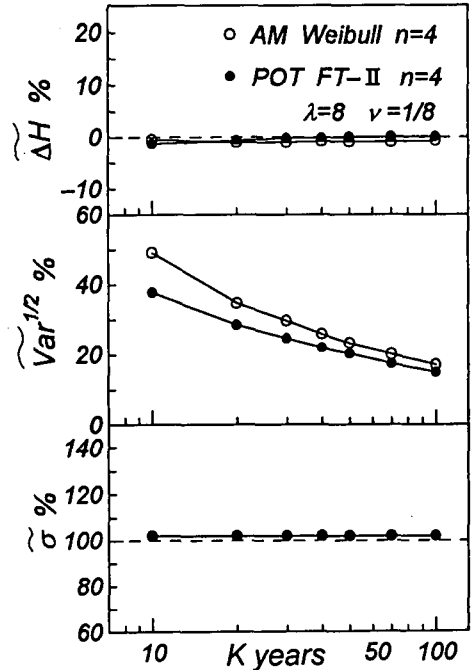


図-4 $\widehat{\Delta H}$, $\widehat{Var}^{1/2}$, $\hat{\sigma}$ と K の関係 (1)

する層別分散も層別確率波高に対応する層別分散に比べて増加する。図-1は同一の層別確率分布の場合、合成確率波高に対応する合成分散が層別分散平方根に対する対数線形補間によって適切に評価されることを表す。

図-2は層別数 $n=2$ とした場合の $k=1.4$ の Weibull 分布 ($A=5.0, B=1.0$ および $A=3.75, B=0.75$) に従う極大波高資料に対する解析結果を、式 (3) あるいは式 (4) による $\hat{\sigma}$ について示したものである。このケースは、層別確率波高の差が比較的大きいため、合成確率波高が最大層別確率波高より 0.35% しか増加しない場合に相当する。式 (4) はほぼ $Var^{1/2}$ に一致する結果を与えるが、式 (3) は 10% 以上の過大評価となっている。今回の検討によれば、式 (3) は $Var^{1/2}$ を過大あるいは過小評価し、再現期間に伴う推定精度の変化も大きいことから、以下では式 (4) による検討結果のみを述べる。

図-3は層別数 $n=2$ とした場合の $A=1.3, B=4.5$ の Gumbel 分布と、 $k=1.4, A=5.0, B=1.0$ の Weibull 分布あるいは $k=5.0, A=1.0, B=5.0$ の FT-II 型分布に従う極大波高資料に対する $\hat{\sigma}$ を示したものであり、 $Var^{1/2}$ に対する式 (4) の推定精度は高い。この場合、層別確率分布の種類は異なるが、層別確率波高の差が大きいため、合成確率波高の最大層別確率波高に対する増加率は 0.4% 以下である。

図-4は $k=0.75, 1.0, 1.4, 2.0$ の 4 種類の Weibull 分布 ($A=5.0, B=1.2$) に従う年最大波高資料と、($A=1.0, B=5.0$), ($0.8, 0.4$), ($0.6, 0.3$), ($0.4, 0.2$)

の 4 種類の FT-II 型分布 ($k=5.0$) に従う極大波高資料に対する結果を表す。bias $\widehat{\Delta H}$ はいずれの分布についても 1% 以下であり、合成確率波高の推定精度はかなり高い。層別確率分布は正側に長く裾を引く分布を含むことから、 $Var^{1/2}$ はかなり大きい。資料年数 (採択資料数) の増加とともに減少する。合成分散平方根 $\hat{\sigma}$ は $Var^{1/2}$ より 2% 弱大きい程度であるので、 $Var^{1/2}$ にほぼ一致するとみなされよう。合成確率波高の増加率は Weibull 分布で 1.6%、FT-II 型分布で 7.3% であり、この程度の増加率の場合、すなわち層別確率波高の差が比較的小さい場合には、合成分散推定式の精度は維持される。

図-5は ($k=0.75, A=2.0, B=0.4$), ($1.0, 3.0, 0.6$), ($1.4, 4.0, 0.8$), ($2.0, 5.0, 1.0$) の 4 種類の Weibull 分布および $k=2.5, 3.33, 5.0, 10.0$ の 4 種類の FT-II 型分布 ($A=1.0, B=5.0$) に従う年最大波高資料に対する解析結果である。いずれの分布についても、bias $\widehat{\Delta H}$ は 1% 以下であるから、かなり小さい。また、 $Var^{1/2}$ は正側により長く裾を引く FT-II 型分布の場合にかなり大きい。合成分散平方根 $\hat{\sigma}$ は $Var^{1/2}$ に比べて Weibull 分布で 13%、FT-II 型分布で 5% 大きい。合成確率波高の増加率はそれぞれ 16.2% および 17.6% であるから、式 (4) による過大評価の割合と合成確率波高の増加率は必ずしも対応しない。しかし、合成確率波高の増加率が大きいほど、すなわち層別確率波高の差が小さいほど、式 (4) による合成分散推定値には過大評価傾向が現れる。

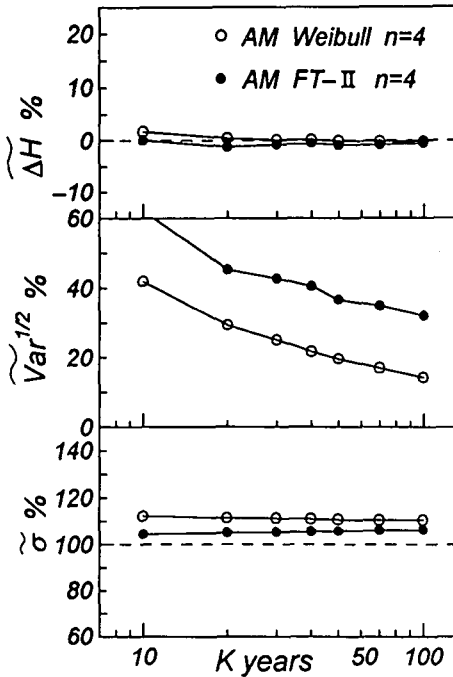


図-5 $\overline{\Delta H}$, $\overline{Var}^{1/2}$, $\bar{\sigma}$ と K の関係 (2)

全検討ケースを通じてみても、式 (4) の適用条件を明確にすることは困難であるが、式 (4) の過大評価傾向は、層別確率波高の差が小さいほど、しかも層別確率分布に異なる種類や小さい形状母数の確率分布が混在する場合に強くなり、層別数にあまり依存しないようである。また、採択資料数が同一であっても、資料総数の多い極大波高資料に対する式 (4) の精度が年最大波高資料に対するものより高い。

5. 現地資料への適用

Resio (1978) はアメリカ合衆国東海岸のハテラス岬における 50 年間 7 ft 以上の極大波高追算資料を一括解析するとともに、低気圧経路によって層別化した極大波高資料に対する解析も行った。そして一括解析に基づく確率波高は再現期間の増加とともに層別解析に基づくもの

より大きい値をとることを示した。ここでは、この結果が妥当かどうかを検討するため、Resio (1978) の資料に対する再解析を実施する。

波高資料は Resio (1978) の論文の Fig. 1 および Fig. 2 より読み取った。層別化された資料のうち波高 16 ft 以下の資料は、層別化されない資料 (全体資料) と必ずしも一致しない。読取り誤差の他に何か原因があるかもしれないが、理由は明らかでない。極値解析の条件は、全体資料の場合資料年数 $K=50$ 年、採択資料数 $N=33$ 、層別資料の場合 $K=50$ 年、 $N=11$ (ケース 1)、 $K=50$ 年、 $N=11$ (ケース 2)、 $K=50$ 年、 $N=14$ (ケース 3) とした。問題は資料総数 N_T の選択であり、ここでは各ケースに対して $N_T = \alpha K$ ($\alpha=1, 1.5, 2, 3, 4$) のほか、 $N_T = \beta N$ ($\beta=1, 2, 3, 4$) を用い、9 通りの計算を行った。確率波高の推定値は N_T の増加とともに減少するが、 $N_T \geq K$ ではあまり変化しないことから、 N_T に対して大き目の値を用いた結果が適切と考えられる。

表-1 は資料総数 $N_T = K=50$ とした一括解析および層別解析の結果を Resio (1978) の結果と比較したものである。全体資料に対する最適分布は $k=10.0$ の FT-II 型分布、50 年確率波高とその標準偏差は $H_{50} \pm \sigma_{50} = 26.1 \pm 3.7$ ft と推定されている。資料中の第 1 位波高 $H_{max} = 30.1$ ft は第 2 位波高 23.7 ft に比べて、かなり突出した値をとることから、最適分布は正側に長く裾を引く分布となり、確率波高の変動幅も相対的に大きい。また、3 種類の層別資料に基づく結果のうち、ケース 3 の確率波高が卓越するので、合成確率波高および合成標準偏差はケース 3 の結果に支配される。シミュレーション結果を考慮すると、この場合の合成標準偏差の推定精度は高いと推測される。

表に示すように、Resio (1978) は再現期間が長いほど両者の方法による確率波高に大きな差を生じ、一括解析では確率波高が過大評価されることを指摘している。一方、本研究の結果では確率波高はほぼ同一の値をとり、しかも層別解析による確率波高の合成標準偏差が一括解析によるものより大きい。つまり、層別解析では、採択

表-1 Resio の極大波高資料に対する解析結果の比較

| data | N | N_T | k | ρ | H_{50} ft | σ_{50} ft | H_{100} ft | σ_{100} ft | H_{200} ft | σ_{200} ft |
|-----------------------|-----|-------|--------|--------|-------------|------------------|--------------|-------------------|--------------|-------------------|
| unstratified Resio | 33 | 50 | F 10.0 | 0.9904 | 26.1 | 3.7 | 30.4 | 4.6 | 34.9 | 5.6 |
| | | | FT-II | | 30 | | 38 | | 50.3 | |
| Case 1 | 11 | 50 | W 1.7 | 0.9908 | 10.4 | 1.5 | 12.0 | 1.9 | 13.5 | 2.2 |
| Case 2 | 11 | 50 | W 10.0 | 0.9865 | 14.9 | 1.5 | 16.5 | 1.8 | 17.8 | 2.0 |
| Case 3 | 14 | 50 | W 1.1 | 0.9865 | 26.7 | 4.0 | 30.9 | 5.1 | 35.0 | 6.1 |
| compound Resio | | | Gumbel | | 26.7 | 4.0 | 30.9 | 5.0 | 35.0 | 6.1 |
| | | | | | 30 | | 34.5 | | 38.2 | |

$K=50$ years, W: Weibull dist., F: FT-II dist., $H_{max}=30.1$ ft

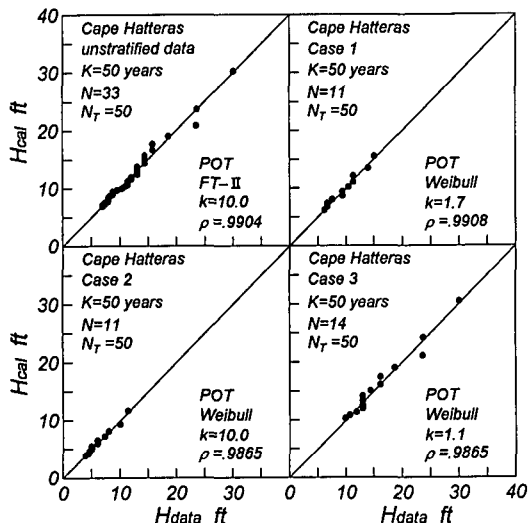


図-6 全体資料および層別資料に対する Q-Q プロット

資料数の減少に伴う資料の統計的変動の増加によって、確率波高推定値の信頼性が低下している。また、確率波高も Resio (1978) による推定値より小さい。因みに、資料中の第 1 位波高 30.1 ft の再現期間は本研究では約 100 年、Resio (1978) の結果では約 50 年と推定される。以上の特性は極値統計解析手法、とくにプロットング公式の相違 (Weibull 公式と合田公式) および資料総数条件の相違によるところが大きいと推測される。

図-6 は波高資料値と、最適分布より得られる波高計算値との間の Q-Q プロットを全体資料および層別資料について示したものである。いずれの最適分布の適合度も比較的高いことから、資料値と計算値の間にほぼ直線関係が見出される。

6. 結 語

本研究の知見はつぎのように要約される。

①最小 2 乗法に基づく極値統計解析モデルは母数や確率波高の推定値にほとんど bias を生じないので、合成確率波高を高い精度で評価する。

②合成分散推定式は層別確率波高の差が大きい場合や

層別確率分布が同一の場合には、資料数によらず高い精度を示す。しかし、層別確率分布は異なるが層別確率波高の差が小さい場合には、分散を過大評価する傾向にある。その場合は、層別確率波高の差が小さいほど、しかも異なる種類や小さい形状母数の分布が層別確率分布に混在する場合に大きいのが、おおむね $Var^{1/2}$ の 25% 以下である。

③ Resio (1978) は極大波高資料の一括解析が層別解析に比べて確率波高を過大評価する例を提示しているのに対して、ほぼ同一資料に対する本研究の検討では、Resio (1978) の結果、すなわち層別化手法に基づく極値統計解析の優位性は確認されない。

参 考 文 献

- 合田良實 (1990): 港湾構造物の耐波設計—波浪工学への序説—, 鹿島出版会, 333 p.
- 山口正隆・畑田佳男・大木泰憲・柚木正樹・中村雄二 (1995): 観測資料に基づくわが国沿岸での確率波高の推定, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 241-245.
- 山口正隆・大福 学・畑田佳男 (1998): 類別化手法に基づくわが国沿岸での風速および波高の極値の推定, 自然災害科学 J. JSNDS, 17-1, pp. 45-55.
- Carter, D. J. T. and P. G. Challenor (1981): Estimating return values of environmental parameter, Quart. Jour. Royal Meteorol. Soc., Vol. 107, pp. 259-266.
- Cavaleri et al. (1989): Extreme wave condition in the Tyrrhenian Sea, Ocean Eng., Vol. 13, No. 2, pp. 157-180.
- Miller, R. G. (1974): The jackknife—a review, Biometrika, Vol. 61, No. 1, pp. 1-15.
- Morton, I. D., J. Bowers and G. Mould (1997): Estimating return period wave heights and wind speeds using a seasonal point process model, Coastal Eng., Vol. 31, pp. 305-326.
- Resio, D. T. (1978): Some aspects of extreme wave prediction related to climatic variation, 10 th Annual Offshore Tech. Conf., OTC3278, pp. 1967-1980.
- Tsuchiya, Y. and Y. Kawata (1984): Extremal statistics of storm surges by typhoon, Proc. 19th ICCE, Vol. 1, pp. 115-131.
- Yamaguchi, M. and Y. Hatada (1997): An extremal analysis system and its application to the estimation of extremes of meteorological and oceanographic elements around the coasts of Japan, Proc. WAVES97 Conf., Vol. 2, pp. 932-946.