海岸工学論文集，第 46 巻 (1999)
土木学会，236-240

ワイブル分布に従う極値データの N 年最大統計量の定式化とその適用性

泉宮尊司*

1. 緒言

海岸・海洋構造物は，その供用年数内に生じる最大外力に対して，破壊する確率が所要の確率以内となるように設計されることが望ましい．このためには，まず供用年数N年間の最大外力の確率分布を評価する必要がある．我国の沿岸では，極値波浪に関してはワイブル分布に従う海域が数多く存在するため，ワイブル分布に従う極値データのN年最大値の確率分布を算定しなければならない．

N年最大統計量は，レベル 2 の信頼性設計を行う際に，最大統計量の平均値およびその分散を用いて安全性が評価される (たとえば白石・上田，1987)．ある極値データが，FT-I 型分布，FT-II 型分布および FT-III 型分布に従っている場合には，合田 (1988) が示しているように，N年最大値分布はそれぞれ同型の分布となり，その平均値および分散は容易に求めることができる．しかしがら，ワイブル分布の場合にはN年最大値分布の関数形が乗積の形のままであり，N年最大値の確率分布やその代表統計量を求めるには，数値積分法や級数展開法による方法しかなく (白石・上田，1987；合田，1990)，破壊確率を得るのにも多くの計算時間を要していた．

そこで本研究では，ワイブル分布に従う極値データのN年最大値の確率分布とその代表的な統計量を簡便に計算できるように，極限分布の理論を応用してそれらを定式化し，その適用性について検討することを研究の目的とする．

2. ワイブル分布の N 年最大値分布の漸近分布

本研究では，ワイブル分布が大きい値の変数に対して指数型関数に属し，N年最大値の分布関数がワイブル分布からN個サンプリングした標本の小さい方からN位の順序統計量の確率分布に等しいことを利用して，漸近理論によりその極限分布を評価する．

いま，極値資料がワイブル分布に従うとすれば，N年最大値xの分布関数$F_N(x)$は，次式で与えられる．

$$F_N(x)=\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{x-B}{A}\right)^k\right]\right\}^N \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに，A, Bおよびkはそれぞれワイブル分布の尺度母数，位置母数および形状母数である．この分布関数は，N個サンプリングした標本の小さい方からN位の順序統計量の確率分布に等しい．したがって，次の関係を満たすx_{Np}

$$F(x_{Np})=\frac{N-\alpha}{N+\beta}=1-\frac{\alpha+\beta}{N+\beta} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

の回りに式 (1) のワイブル分布関数を Taylor 展開すると，

$$\begin{aligned}F(x)=&F(x_{Np})+(x-x_{Np})f(x_{Np})\\&+\frac{(x-x_{Np})^2}{2!}f'(x_{Np})+\frac{(x-x_{Np})^3}{3!}f''(x_{Np})\\&+\frac{(x-x_{Np})^4}{4!}f'''(x_{Np})+\cdots \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}$$

となる．ここに，$F(x)$はワイブル分布関数である．ここで，$\alpha=1$および$\beta=0$とすると，Gumbel (1957) が用いた方法と同一であり，$\alpha=0$および$\beta=1$とすると，順序統計量の非超過確率の期待値に対応するx_{Np}の回りに Taylor 展開していることになる．これより記述の簡便さから，$\alpha=1$および$\beta=0$として漸近分布の近似計算を示すことにする．

ここで，Gumbell (1957) が用いた方法と同様に，次のロピタルの定理から導かれる関係式を用いて，$f(x)$の高次微分値を求めることにする．

$$\lim\frac{f(x)}{1-F(x)}=-\lim\frac{f'(x)}{f(x)}=-\lim\frac{f''(x)}{f'(x)} \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに，lim は十分に大きい値x_{Np}への極限をとるものとする．ここで，式 (2) および式 (4) の関係から，

$$Nf(x_{Np})=-\frac{f'(x_{Np})}{f(x_{Np})}=a_N \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

とおくと，上式より

$$f'(x_{Np})=-a_N f(x_{Np}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

となるので，式(5)を再び用いると，

$$Nf'(x_{Np})=-a_N Nf(x_{Np})=-a_N^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

となる関係式が得られる．式 (4) の関係を用いて同様な

* 正会員　工博　新潟大学教授　工学部建設学科

計算を行うと，

$$Nf^{(n)}(x_{Np})=(-1)^n\alpha_N^{n+1} \quad \cdots\cdots (8)$$

が成立することが分かる．したがって，式(3)の Taylor 展開式は

$$F(x)=1-\frac{1}{N}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_{Np})^n}{n!}(-1)^n\alpha_N{}^n\right\}$$
$$=1-\frac{1}{N}\exp\{-\alpha_N(x-x_{Np})\} \quad \cdots\cdots (9)$$

と表わされる．これによりN年最大値分布の非超過確率分布関数 $F_N(x)$ は，

$$F_N(x)=\left\{1-\frac{1}{N}\exp[-\alpha_N(x-x_{Np})]\right\}^N$$
$$\simeq\exp[-\exp\{-\alpha_N(x-x_{Np})\}] \quad \cdots\cdots (10)$$

に漸近することになる．この分布関数は，正に FT-I 型分布または二重指数分布関数である．したがって，Nが十分大きくなるにしたがって，N年最大値分布は FT-I 型分布に漸近収束することが示された．

3. N 年最大値の平均値，標準偏差，変動係数の定式化

N年最大値の分布が FT-I 型分布に漸近収束し，Nが十分に大きい時には，式 (10) の分布関数で近似されることから，N 年最大値の平均値および標準偏差を求めるには，式 (10) の α_N および x_{Np} の値が分かればよいことになる．x_{Np} の値は，$\alpha=1$ および $\beta=0$ のとき，

$$F(x_{Np})=1-\exp\left[-\left(\frac{x_{Np}-B}{A}\right)^k\right]=1-\frac{1}{N} \cdots (11)$$

なる関係より，

$$x_{Np}=(\ln N)^{1/k}A+B \quad \cdots\cdots (12)$$

となる．また，この関係を用いると $f(x_{Np})$ の値は，

$$f(x_{Np})=\frac{k}{AN}(\ln N)^{1-1/k} \quad \cdots\cdots (13)$$

となる．したがって，式 (5) の α_N の定義式より，

$$\alpha_N=\frac{k}{A}(\ln N)^{1-1/k} \quad \cdots\cdots (14)$$

となる．式(10)の漸近分布は，FT-I 型分布であるので，その尺度母数および位置母数を，それぞれ A_N および B_N とすると，

$$A_N=\frac{1}{\alpha_N}=\frac{A}{k(\ln N)^{1-1/k}} \quad \cdots\cdots (15)$$

$$B_N=x_{Np}=(\ln N)^{1/k}A+B \quad \cdots\cdots (16)$$

となる．したがって，N 年最大値の平均値 μ_N および分散 σ_N は，

$$\mu_N=A\left\{(\ln N)^{1/k}+\frac{\gamma}{k(\ln N)^{1-1/k}}\right\}+B \cdots\cdots (17)$$

$$\sigma_N=\frac{\pi}{\sqrt{6}}A_N=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{A}{k(\ln N)^{1-1/k}} \quad \cdots\cdots (18)$$

となる．これらの関係より，N 年最大値の変動係数 V_N は，

$$V_N=\frac{\sigma_N}{\mu_N}=\frac{\pi/\sqrt{6}}{k(\ln N)+\gamma+k(\ln N)^{1-1/k}B/A} \quad \cdots\cdots (19)$$

となる．形状母数が $k=1$ の時には，

$$\mu_N=A\{\ln N+\gamma\}+B \quad \cdots\cdots (20)$$

$$\sigma_N=\frac{\pi}{\sqrt{6}}A \quad \cdots\cdots (21)$$

となり，合田 (1988) が示しているように，FT-I 型分布のN年最大統計量の平均値とその標準偏差の表現に一致していることが分かる．

一方，非超過確率の期待値に対応する x_{Np} の回りに展開した場合には，同様な計算を行うことにより，N 年最大値分布の尺度母数および位置母数は，

$$A_N=\frac{1}{\alpha_N}=\frac{A(1+1/N)}{k}\frac{1}{\{\ln(N+1)\}^{1-1/k}} \quad \cdots\cdots (22)$$

$$B_N=x_{Np}=\{\ln(N+1)\}^{1/k}A+B \quad \cdots\cdots (23)$$

となり，N 年最大値の平均値 μ_N，標準偏差 σ_N および変動係数 V_N は，

$$\mu_N=A\left\{[\ln(N+1)]^{1/k}+\frac{(1+1/N)\gamma}{k[\ln(N+1)]^{1-1/k}}\right\}+B \cdots (24)$$

$$\sigma_N=\frac{\pi}{\sqrt{6}}A_N=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{(1+1/N)A}{k[\ln(N+1)]^{1-1/k}} \quad \cdots\cdots (25)$$

$$V_N=\frac{(1+1/N)\pi/\sqrt{6}}{k[\ln(N+1)]+(1+1/N)\gamma+k[\ln(N+1)]^{1-1/k}B/A} \quad \cdots\cdots (26)$$

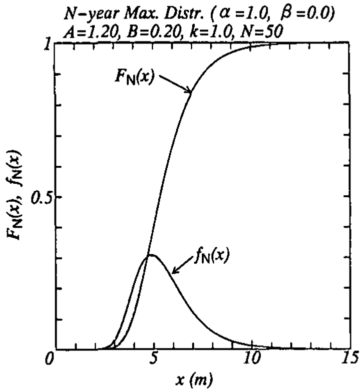
となる．

4. 定式化の適用性の検討

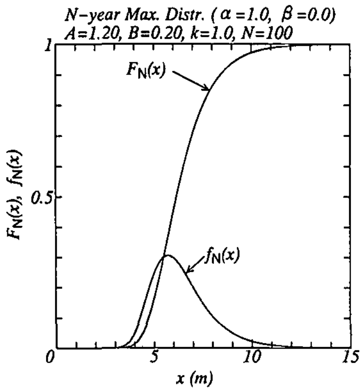
漸近収束の近似式を適用する際には，元の分布の違いによって収束の速さや精度が異なるために，定式化された関係式の適用性について調べておく必要がある．

図―1 は，形状母数が $k=1$ のワイブル分布($A=1.20$, $B=0.20$) の $N=50$ 年最大値の分布関数および確率密度関数を比較したものである．実線が式 (1) で与えられる厳密な分布関数，一点鎖線は式 (10) で与えられる近似分布を示したものである．この図に見られるように，両者は殆ど一致していることが分かる．**図―2** は，同じく $N=100$ 年最大値の分布を示したものであるが，以前にもまして一致度が高くなっている．

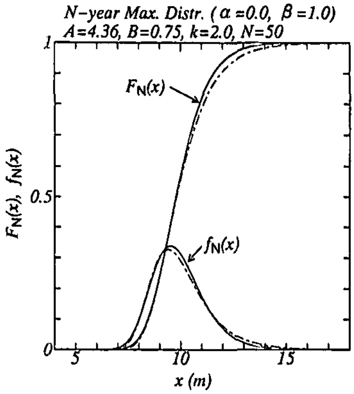
形状母数が $k=2$ のワイブル分布($A=4.36$, $B=0.75$) の場合には，**図―3** から**図―5** に示すように，N年最大値の中央値よりも小さい範囲では，適合度はかなり良いが，中央値よりも大きい領域では多少異なっている．しかしながら，Nの値が 50, 100 さらには 500 と大きくなるにしたがって，その差異は小さくなり収束していく状況が伺える．



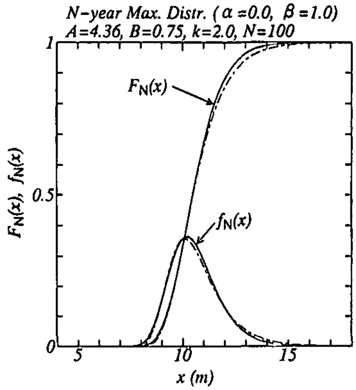
図—1　N年最大統計量の分布関数および確率密度関数の比較（k=1，N=50）



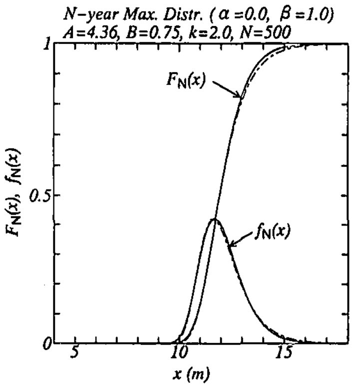
図—2　N年最大統計量の分布関数および確率密度関数の比較（k=1，N=100）



図—3　N年最大統計量の分布関数および確率密度関数の比較（k=2，N=50）



図—4　N年最大統計量の分布関数および確率密度関数の比較（k=2，N=100）



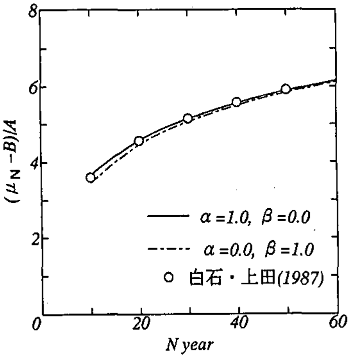
図—5　N年最大統計量の分布関数および確率密度関数の比較（k=2，N=500）

図—6は，ワイブル分布（A=26.16，B=28.62，k=0.85）のN年最大値の平均値μ_Nの無次元量とN年との関係を示したものである．図中の○印は，白石・上田（1987）が級数和および数値積分法により得た結果であり，実線は式（17）による結果，一点鎖線は式（24）による結果である．三者とも大きな差異はなく，よく一致していると言えるが，式（17）の関係の方が白石・上田の結果により近い結果となっている．

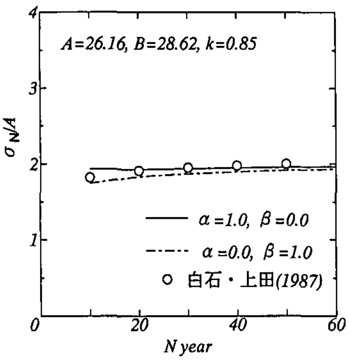
図—7および**図—8**は，同一のワイブル分布のN年最大値の標準偏差の無次元値σ_N/Aおよび変動係数σ_N/μ_Nを比較したものである．

この分布形状の場合，N年最大値の標準偏差はN年によらずほぼ一定の値をとり，N=20以上では式（18）の方が白石・上田（1987）の結果に近くなっている．

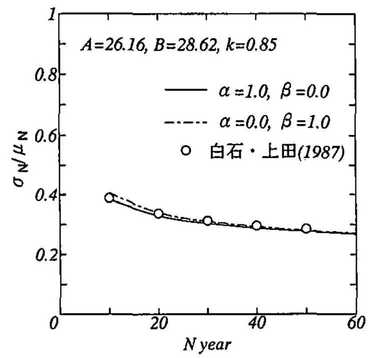
ワイブル分布のN年最大値の平均値，標準偏差および変動係数に与える形状母数kの影響をみるために，式（17）から式（19）の関係を用いて，kをパラメタにしてそれらの関係を図示したのが，**図—9**から**図—11**である．無次元平均値は，kの値が小さいほどNが増加するにしたがい大きく増加することが分かる．また，無次元標準偏差σ_N/Aは，kが1より小さい場合にはNが大きくなるにしたがい増加傾向を示し，逆にkが1より大きい場合にはやや減少傾向があることが読み取れる．変動係数に関しては，形状母数kおよびNの値が大きくなるほど，小さくなる傾向があることが分かる．



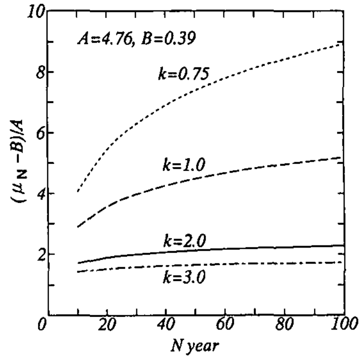
図—6　N 年最大統計量の平均値の比較（k=0.85）



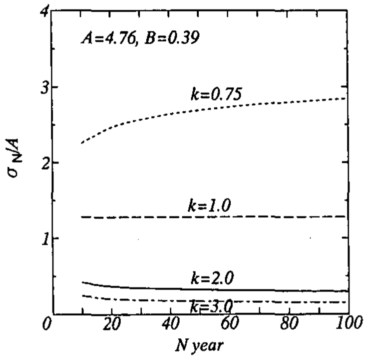
図—7　N 年最大統計量の標準偏差の比較（k=0.85）



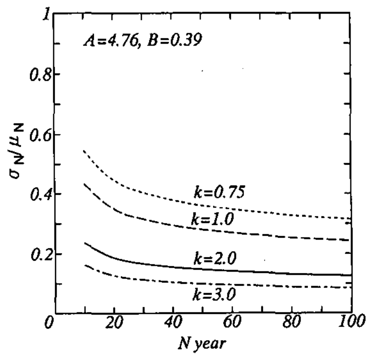
図—8　N 年最大統計量の変動係数の比較（k=0.85）



図—9　N 年最大統計量の平均値の変化



図—10　N 年最大統計量の標準偏差の変化



図—11　N 年最大統計量の変動係数の変化

5.　N 年最大統計量の代表値の再現期間

(1)　平均値の再現期間

母分布関数がワイブル分布の時の N 年最大値の平均値の再現期間は，それを R_N とすると，次式で与えられる．

$$R_N=R(\mu_N)=\frac{1}{1-F(\mu_N)} \quad \cdots\cdots(27)$$

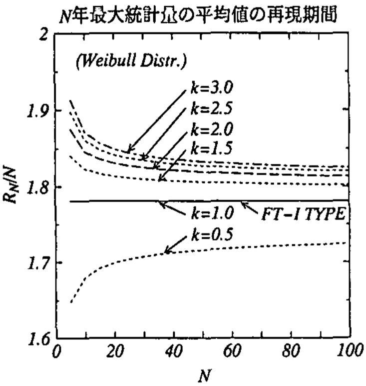
ここに，μ_N は式（17）で与えられるので，

$$F(\mu_N)=1-\exp\left[-\left(\frac{\mu_N-B}{A}\right)^k\right]$$
$$=1-\exp\left\{-\left[(\ln N)^{1/k}+\frac{\gamma}{k(\ln N)^{1-1/k}}\right]^k\right\} \quad \cdots\cdots(28)$$

となるために，R_N は次式で与えられる．

$$R_N=\exp\left\{(\ln N)\left[1+\frac{\gamma}{k(\ln N)}\right]^k\right\} \quad \cdots\cdots(29)$$

ここで，$(\ln N)$ の -1 乗のオーダまでとると，



図—12 N 年最大統計量の平均値の再現期間の変化

$$R_N \simeq Ne^{\gamma}\exp\left\{\frac{(k-1)\gamma^2}{2k(\ln N)}\right\} \quad \cdots\cdots(30)$$

となる．図—12 は，式 (29) の関係をプロットしたものである．形状母数が $k=1$ の時，$R_N=Ne^{\gamma}=1.781\,N$ となり，FT-I 型分布の平均値の再現期間と一致するが，$k>1$ のときには，$1.781N$ 年よりも大きくなり，$k<1$ では逆に小さくなることが分かる．

(2) メディアンの再現期間

N 年最大統計量の漸近分布が式 (10) で与えられることから，容易にメディアンおよびその再現期間を求めることができる．N 年最大統計量のメディアンを $x_{N\mathrm{med}}$ とすると，

$$x_{N\mathrm{med}}=x_{Np}-\frac{1}{\alpha_N}\ln(\ln 2) \quad \cdots\cdots(31)$$

となる．さらに，式 (12) および式 (14) の関係を用いると，

$$x_{N\mathrm{med}}=(\ln N)^{1/k}\left[1-\frac{\ln(\ln 2)}{k(\ln N)}\right]A+B \quad \cdots\cdots(32)$$

となる．したがって，メディアンの再現期間 $R_{N\mathrm{med}}$ は，

$$R_{N\mathrm{med}}=\exp\left[\ln N\left\{1-\frac{\ln(\ln 2)}{k(\ln N)}\right\}^k\right] \quad \cdots\cdots(33)$$

となる．N が十分に大きい時には，べき展開を第 2 項までとると $R_{N\mathrm{med}}=N/\ln 2=1.44N$ となり，Gumbel (1958) が指摘した結果と同一となる．

(3) モードの再現期間

N 年最大統計量のモードは，式 (10) の x_{Np} と等しくなることから，

$$x_{N\mathrm{mod}}=x_{Np}=(\ln N)^{1/k}A+B \quad \cdots\cdots(34)$$

で与えられる．よって，モードの再現期間 $R_{N\mathrm{mod}}$ は，

$$R_{N\mathrm{mod}}=\exp(\ln N)=N \quad \cdots\cdots(35)$$

となる．なお，順序統計量の非超過確率の期待値に対応する x_{Np} の回りに Taylor 展開した場合には，$R_{N\mathrm{mod}}=N+1$ となり，前者よりも 1 年長い結果となる．

6. 結 論

ワイブル分布に従う極値データのN年最大値の分布および代表量を定式化するために，極限分布の考えを応用して求め，その適用性について検討した結果，以下の事柄が明かとなった．

(1) ワイブル分布に従う極値データのN年最大値の分布は，漸近的に FT-I 型分布に収束し，形状母数 k の値が 1 に近いほど速く収束することが確かめられた．N 年最大値の平均値，標準偏差および変動係数に対する関係式は，白石・上田 (1987) の数値計算結果によく一致し，実用上適用できることが分かった．

(2) N年最大値の代表量である平均値，メディアンおよび最頻値（モード）の再現期間を求める関係式を得た．平均値の再現期間では，形状母数 k の値が 1 より大きいか小さいかによって，$1.78N$ 年より長くあるいは短くなることが分かった．また，メディアンの再現期間については，形状母数 k との関係を明らかにすると共に，N が十分に大きい場合には，Gumbel (1958) が示した結果の $1.44N$ 年に漸近収束することが確かめられた．

参 考 文 献

合田良実 (1988): 極値統計におけるプロッティング公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討，港湾研究所報告，第 27 巻，第 1 号，pp. 31-92.

合田良実 (1990): 港湾構造物の耐波設計—波浪工学への序説—，鹿島出版会，pp. 267-322.

白石 悟・上田 茂 (1987): 港湾構造物及び海洋構造物の安全性照査に関する検討—作用荷重の変動係数と荷重係数の算定，港湾技術研究所報告，第 26 巻，第 2 号，pp. 493-576.

Gumbel E. J. (1958): Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, New York, 375 p.