

海洋波の非線形相互作用における離散相互作用近似の拡張

橋本典明*・川口浩二**・鈴木正芳***

1. はじめに

波浪の発達・減衰を支配する重要な物理過程に非線形相互作用がある。これは異なる周波数・伝播方向を有する無数の成分波間でエネルギー交換を引き起こすメカニズムで、風から波へのエネルギー輸送や砕波等によるエネルギー散逸と同様に重要な物理過程である。現在の波浪予報モデルでは、いかに正確にこのメカニズムをモデルに導入するかが、急務かつ最重要な課題となっている。

現在多くの国々で利用されている第三世代波浪予報モデル (WAM) では、非線形相互作用の計算に Hasselmann ら (1985) が開発した離散相互作用近似 (DIA) が用いられている (WAMDI Group, 1988)。これは成分波間のエネルギー輸送に関する 4 波共鳴する成分波の無数の組合せを唯一つの組合せで代表させて計算するものである。DIA の導入によって WAM では複雑に変動する風場への応答特性が従来の予報モデルに比べて向上した。しかしながら、DIA は緩やかなエネルギー分布をもつ Pierson-Moskowitz (PM) スペクトルに対しては厳密計算値とよく一致するが、エネルギー分布の鋭い JONSWAP スペクトルに対しては近似精度が著しく低下する。これまでもこのような DIA の問題点を解消する目的で幾つかの研究が報告されているが、多様な方向スペクトル形への汎用的な適用性に関して十分な検討が行われているとは言い難い。そこで本研究では、いくつかの方向スペクトルを対象として非線形エネルギー輸送の数値的検討を系統的に行い、実用的かつ精度のよい DIA のパラメタライズを行うこととした。

2. 離散相互作用近似

Hasselmann (1962) により導出された成分波間の非線形相互作用による波浪のエネルギー・スペクトルの時間発展を記述する Boltzmann 積分は次式で表される。

$$\frac{\partial n(k_4)}{\partial t} = \int \dots \int dk_1 dk_2 dk_3 G(k_1, k_2, k_3, k_4) \times \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\} \dots (1)$$

ここに、 $n_j \equiv n(k_j) = F(k_j)/\omega_j$, ($j=1, \dots, 4$) は波数ベクトル k_j の波の作用 (密度), $F(k_j)$ は波数スペクトル, ω_j は角周波数で、 $\omega_j^2 = gk_j \tanh k_j h$ を満足する。また、 G は相互作用係数である。式 (1) は 4 波共鳴の非線形相互作用を表す式で、4 波共鳴条件：

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4 \dots \dots \dots (2)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \dots \dots \dots (3)$$

を満足する成分波間で非線形相互作用が起こる。

式 (1) は共鳴条件 (2) と (3) により 3 つの独立変数による 3 重積分に変換できる。したがって、波数ベクトル $F(k)$ が与えられれば、共鳴条件の計算と 3 つの独立変数に関する 3 重の DO ループによって、波数ベクトル $F(k)$ における各成分波間の非線形エネルギー輸送が計算できる。しかしながら、例えば波浪予報モデルで用いられるような周波数分割数を 25, 方向分割数を 16 とする標準的な方向スペクトルを対象とする場合でも、式 (1) の数値積分は膨大な計算量となり、実際に波浪予報モデルに組み込むことは、現段階では困難である。

Hasselmann ら (1985) は、共鳴条件 (2) と (3) を満たす無数の成分波を用いて式 (1) を数値積分する代わりに、次式で表される唯一つの成分波の組合せでこれを代用した。

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega \\ \omega_3 = \omega(1 + \lambda) = \omega_+ \\ \omega_4 = \omega(1 - \lambda) = \omega_- \\ \theta_1 = \theta_2 = \theta \\ \theta_3 - \theta = \pm \cos^{-1} \left\{ \frac{1 + 2\lambda + 2\lambda^3}{(1 + \lambda)^2} \right\} \\ \theta_4 - \theta = \mp \cos^{-1} \left\{ \frac{1 - 2\lambda - 2\lambda^3}{(1 - \lambda)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 λ は 4 波共鳴する成分波の組合せを決めるパラメーターで、Hasselmann ら (1985) は $\lambda = 0.25$ を採用した。このとき、 $\theta_3 - \theta = \pm 11.5^\circ$, $\theta_4 - \theta = \mp 33.6^\circ$ となる。

* 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所海洋環境部水理研究室
** 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所水工部海象調査研究室
*** 運輸省第五港湾建設局工事課

なお、式(4)の組合せでは、 $k_1=k_2$, $\omega_1=\omega_2$ であり、式(1)に含まれる被積分関数が特異点となることから、式(1)の積分に占める式(4)の組合せからの寄与は大きいと考えられる。そこで、Hasselmannら(1985)は、式(4)の組合せだけを考慮し、式(1)の積分を次式のように簡略化した。

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta S_{nl} \\ \delta S_{nl}^* \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -2(\Delta\omega\Delta\theta)/(\Delta\omega\Delta\theta) \\ (1+\lambda)(\Delta\omega\Delta\theta)/(\Delta\omega_+\Delta\theta) \\ (1-\lambda)(\Delta\omega\Delta\theta)/(\Delta\omega_-\Delta\theta) \end{array} \right\} C\omega^{11}g^{-4} \\ \times \left[F^2 \left\{ \frac{F_+}{(1+\lambda)^4} + \frac{F_-}{(1-\lambda)^4} \right\} - 2 \frac{FF_+F_-}{(1-\lambda^2)^4} \right] \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $F \equiv F(\omega, \theta)$, $F_+ \equiv F(\omega_+, \theta)$, $F_- \equiv F(\omega_-, \theta)$ である。ただし、Hasselmannらは、式(5)を周波数 f を用いて記述し、相互作用係数 $C=3 \times 10^7$ を提案しているが、式(5)のように角周波数 ω で表現する場合には、 $C=3 \times 10^7 / (2\pi)^9 \approx 1.97$ となる。このように式(4)と(5)を用いて非線形エネルギー輸送を計算する方法を離散相互作用近似 (Discrete Interaction Approximation, 略してDIA) と呼ぶ。

なお、 λ に小さな値を設定すると、4つの成分波 (k_i, ω_i) は互いに近い (k, ω) 値となり、 λ が大きい場合には (k_3, ω_3) と (k_4, ω_4) が (k, ω) からはずれた成分波の組合せになる。したがって、周波数や方向角に関するエネルギー集中度が大きい方向スペクトルの場合には、小さな λ を採用しても問題ないが、エネルギー集中度の低い方向スペクトルの場合には不都合になる。このように、 λ は対象とする方向スペクトル形状に依存して最適値が異なるパラメーターである。Hasselmannらが提案したDIAでは $\lambda=0.25$ と比較的大きな値を採用しており、先鋭な形状の方向スペクトルの場合には適合性が著しく低下する。

DIAで指摘されているこのような問題を解消するため、小松(1996)は厳密計算の精度を損なうことなく高精度で効率的な非線形エネルギー輸送の計算法(SRIAM法)を提案した。SRIAM法では、DIAが1つの組合せを用いて式(1)の計算を簡略化しているのに対して、式(1)の積分への寄与が有意な20個の成分波の組合せを選び、最適化によって各々の組合せの相互作用係数を決定した。なお、小松ら(1993)はMasuda(1980)の厳密計算法の精度を損なうことなく、式(1)に含まれる4波相互作用の対称性などの非線形エネルギー輸送の特性を最大限利用して厳密計算法の効率化を図った方法(RIAM法)を開発しているが、SRIAM法の精度はRIAM法に遜色ないと報告されている(小松, 1996)。したがって、SRIAM法は精度や汎用性の面でほぼ完全な方法で、次世代波浪予報モデルでは標準的な非線形エネ

ルギー輸送の計算法として導入されよう。しかしながら、SRIAM法は、HasselmannらのDIAの20倍の計算時間を要することから、現時点ではまだ計算が膨大で必ずしも実用的ではない。

この他、Suzuki(1995)はDIAのパラメーターを $\lambda=0.19$ に修正し、鋭いスペクトル形状への適合性をやや向上させてJWA3G(気象協会モデル)を開発した。また、植野ら(1997)は、DIAの組み合わせを3つに増すことによって精度向上を図り、MRI-III(気象庁モデル)に導入した。しかしながら、Suzukiや植野らの方法では、Hasselmannら(1981)や小松ら(1993)によって計算された非線形エネルギー輸送を方向角について積分した量に適合するようにパラメーターが設定されており、方向関数の影響が考慮されていない。また、検討したスペクトル形に限られており、多様な方向スペクトル形への適用性に関する検討が不十分である。

3. 離散相互作用近似に関する数値的検討方法

著者らが先に開発した有限水深域を含む非線形エネルギー輸送の厳密計算法(橋本ら, 1996)に基づいて、DIAの妥当性・有効性等を再検討した。ただし、ここでは他の研究と同様に深海波に限定して検討した。検討に際しては、方向スペクトルを $S(f, \theta) = S(f)G(\theta|f)$ とし、周波数スペクトル $S(f)$ と方向関数 $G(\theta|f)$ を、

$$S(f) = \sum_i \alpha_i H_{1/3}^2 T_{pi}(f/f_{pi})^{-m_i} \exp\left\{-\frac{m_i/n_i}{(f/f_{pi})^{-n_i}}\right\} \times \gamma_i^{2 \times p_i - (f/f_{pi})^{2 \times q_i}} \dots\dots\dots (6)$$

$$G(\theta|f) = \sum_j \beta_j \cos^{2s_j} \{(\theta - \bar{\theta}_j)/2\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$f_p = 1/(1.05 T_{1/3}) \dots\dots\dots (8)$$

$$\sigma = \begin{cases} 0.07 & (0.7f_p < f < f_p) \\ 0.09 & (f_p \leq f < 1.4f_p) \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

$$S = \begin{cases} S_{\max}(f/f_p)^5 & (f < f_p) \\ S_{\max}(f/f_p)^{-2.5} & (f \geq f_p) \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

で与え、周波数集中度 γ や方向集中度 S_{\max} を変えたいくつかの方向スペクトルを対象としてDIAと厳密計算値との比較を行った。また、波浪予報モデルに組み込む際の実務的な観点から周波数分割数や方向分割数を変えて同様の計算を行い、計算精度を検討した。さらに、DIAの中で用いられている共鳴4波の組合せを決めるパラメーター λ を微小な刻み幅で変化させて計算し、厳密計算値との誤差の自乗和が最小となる最適パラメーター値を決定した。また、植野らと同様に共鳴4波の組合せ数を2, 3, ...と増し、組合せ数の増加と非線形エネルギー輸送の計算精度との関係を検討した。

厳密計算値への DIA の最小自乗法の適用に際しては、小松 (1996) と同様に、

$$E(i) = \frac{1}{\sum_k |T_{SP_i}(k)|^2} \sum_k |T_{SP_i}(k)|^2 \dots \dots \dots (11)$$

が最小になるように相互作用係数 C_i を決める方法を採用した。ここに、 $T_{SP_i}(k)$ は非線形エネルギー輸送の厳密計算値、 $T_{SP_i}^i(k)$ は 4 波共鳴条件を満たす成分波の組合せの i 番目の組合せによる非線形エネルギー輸送への寄与分である。

以下では、便宜的に、式 (4) に含まれるパラメーター λ と相互作用係数 C を変えた計算および共鳴 4 波の組合せ数を増やした計算法を拡張 DIA と呼ぶ。また、植野 (1997) が行ったように、式 (5) の右辺の [] 内の計算で、前の部分と後ろの部分に別個の相互作用係数 C_1 と C_2 を使う方法を修正 DIA と呼ぶこととする。

4. 離散相互作用近似に関する検討結果

式 (6)~(10) で $S_{max}=10$ (風波) で一定とし、 $\gamma=1.0$ (PM スペクトル) と $\gamma=3.3$ (JONSWAP スペクトル) の場合を対象として、周波数分割数と方向分割数を変えて非線形エネルギー輸送に関する試算を行った。試算に際しては周波数を $\omega_{i+1}=R_\omega\omega_i$ で対数的に分割し、方向角は $\theta_{i+1}=\theta_i+\Delta\theta$ で等間隔に分割した。試算結果では、小松 (1993) が報告しているように、非線形エネルギー輸送の厳密計算の精度を保つためには、 R_ω と $\Delta\theta$ をある程度小さく設定する必要があることから、小松 (1993) の提案に従い、ここでは $R_\omega=1.06$ 、 $\Delta\theta=10^\circ$ に設定して以下の検討を行った。

表-1 は $\gamma=1.0$ で一定とし、 S_{max} を変化させた場合お

表-1 PM スペクトルと JONSWAP スペクトルにおける S_{max} の変化による DIA の最適パラメーター

P-M スペクトル				JONSWAP スペクトル			
γ	S_{max}	λ	C	γ	S_{max}	λ	C
1.0	5	0.26	1.54	3.3	5	0.19	3.39
1.0	10	0.25	1.56	3.3	10	0.18	2.97
1.0	15	0.23	1.75	3.3	15	0.18	2.81
1.0	20	0.22	1.79	3.3	20	0.17	2.51
1.0	25	0.21	1.81	3.3	25	0.17	2.44
1.0	30	0.21	1.78	3.3	30	0.16	2.22
1.0	35	0.20	1.82	3.3	35	0.16	2.17
1.0	40	0.19	1.88	3.3	40	0.15	1.94
1.0	45	0.18	1.96	3.3	45	0.15	1.92
1.0	50	0.17	2.03	3.3	50	0.15	1.92
1.0	55	0.17	2.00	3.3	55	0.15	1.91
1.0	60	0.17	1.99	3.3	60	0.14	1.73
1.0	65	0.16	1.99	3.3	65	0.14	1.74
1.0	70	0.16	1.98	3.3	70	0.14	1.75
1.0	75	0.16	1.97	3.3	75	0.14	1.76

よび $\gamma=3.3$ として S_{max} を変化させた場合の λ および相互作用係数 C の最適値を示したものである。ここでは、 λ の値を 0.01 から 0.01 ずつ増大させて DIA の計算を行い、厳密計算値との誤差が最小となる λ と C を算出した。表-1 に見られるように、一般には方向スペクトルの周波数集中度や方向集中度が増大すると最適なパラメーター λ の値は小さくなる。これに対応して相互作用係数 C の値も変化する。表-1 に見られるように、Hasselmann らの DIA は、 $\gamma=1.0$ で $S_{max}=5\sim 15$ の λ と C に近い。すなわち、DIA で用いられているパラメーター λ は、PM スペクトルと $S_{max}=10$ 前後の光易型方向関数を対象とする場合に最も精度が高く、周波数集中度や方向集中度が増大すると共に厳密計算値との誤差が大きくなる。一方、 $\gamma=3.3$ の JONSWAP スペクトルの場合、 $S_{max}=10$ 前後では Suzuki (1995) が提案している $\lambda=0.19$ 前後が最適値となる。しかしながら、Suzuki は $C=1.64 (=2.5 \times 10^7 / (2\pi)^9)$ を提案しており、非線形相互作用の強度が過小評価されている。

このように、パラメーター λ と C は、方向スペクトルに依存して最適値が異なることから、実務上はいくつかの方向スペクトルに対して平均的に適合するパラメーター λ と C を選定する必要がある。このような目的のため、小松 (1996) は、JONSWAP スペクトルの周波数集中度 γ と周波数に依存しない $\cos^s \theta$ 型方向関数の方向集中度 S を系統的に変化させた 8 種類の方向スペクトルを試験対象として、式 (11) による最適化法により SRIAM 法を開発した。しかしながら、ここでは DIA と Suzuki

表-2 拡張 DIA と修正 DIA の 4 波共鳴の組合せ数の増加に伴う最適パラメーター

組合せ数	拡張 DIA		修正 DIA		
	λ	C	λ	C_1	C_2
1	0.19	2.97	0.19	3.09	3.35
2	0.16	2.43	0.13	1.21	-1.13
	0.27	0.92	0.27	0.68	-0.49
3	0.01	-10.64	0.09	5.74	20.05
	0.16	2.51	0.12	2.49	-7.69
	0.27	0.91	0.27	0.25	-2.45
4	0.14	34.80	0.10	4.30	25.85
	0.15	-67.02	0.11	1.81	-14.78
	0.16	35.61	0.17	0.45	-1.78
	0.30	0.56	0.28	0.57	-0.12
5	0.10	-5.01	0.10	1.29	13.66
	0.11	9.87	0.11	4.11	-6.51
	0.15	-17.76	0.15	-7.96	-0.12
	0.16	15.92	0.16	8.04	0.51
6	0.29	0.64	0.29	0.53	0.04
	0.08	8.77	0.06	1.41	-1.28
	0.09	-13.82	0.09	-9.22	-5.27
	0.11	10.02	0.11	12.86	7.34
	0.15	-15.92	0.12	-4.93	2.70
7	0.16	14.41	0.16	2.38	-0.59
	0.29	0.65	0.28	0.48	-0.51

(1995) や植野ら (1997) の拡張 DIA や修正 DIA の妥当性を検討するため、これらの方法を開発する際に対象とした PM スペクトルと JONSWAP スペクトルを用い、方向関数には $S_{max}=10$ の光型型方向関数のみを用いた2種類の方向スペクトルを試験対象として検討した。なお、非線形エネルギー輸送の計算精度は式 (11) の残差分散を用いて検討した。

表-2 は、このようにして得られた拡張 DIA と修正

DIA の最適パラメーターを示したものである。図-1 は、拡張 DIA および修正 DIA の残差分散を WAM で用いられている DIA の残差分散で正規化して示したものである。また、図-2 と図-3 は、 $S_{max}=10$ の条件で、それぞれ PM スペクトルと JONSWAP スペクトルを対象として非線形エネルギー輸送を計算した例である。図の左側から右方向に順に、厳密計算値、WAM で用いられている DIA (WAM)、1つの組合せを用いた拡張 DIA (1)、3つの組合せを用いた拡張 DIA (3) および5つの組合せを用いた拡張 DIA (5) の計算例を示している。図の上段は、非線形エネルギー輸送を周波数と方向角の関数で表示したもので、実線は負値、点線は正值を示している。図の下段は上段の図を方向角について積分し、周波数の関数として表示したものである。ただし、図では非線形エネルギー輸送の厳密計算値の絶対値の最大値で正規化して示している。図中の太線はそれぞれの DIA の計算結果、細線は DIA の精度を比較するために厳密計算値を併せて示したものである。

DIA の組合せ数が1つの場合、PM スペクトルと JONSWAP スペクトルの両方で厳密計算値との残差分散が最小となるパラメーター λ は、表-2 より、 $\lambda=0.19$,

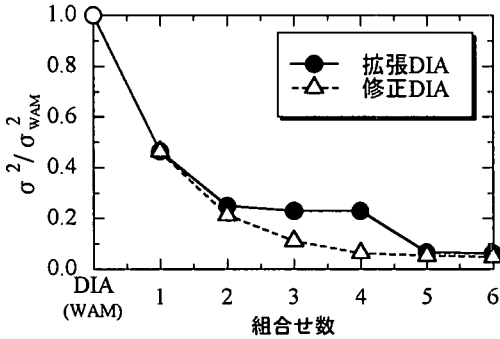


図-1 4波共鳴の組合せ数の増加に伴う離散相互作用近似の残差分散の減少

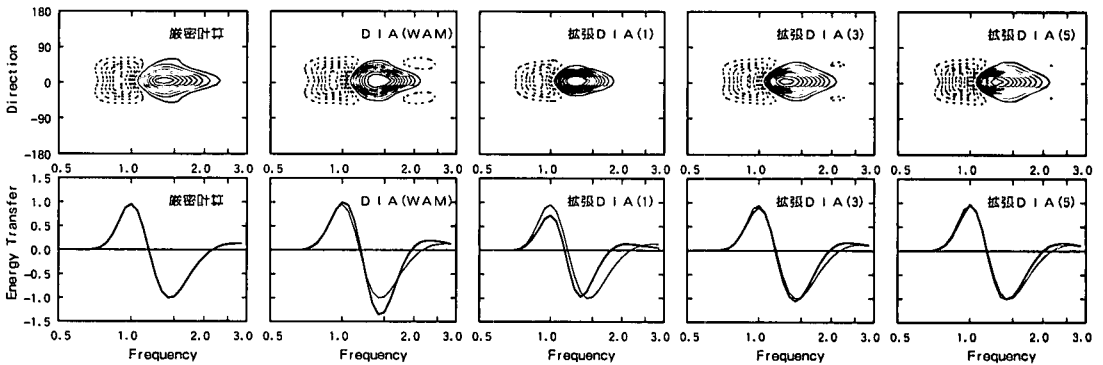


図-2 PM スペクトルを対象とした非線形エネルギー輸送の計算結果の比較 ($S_{max}=10$)

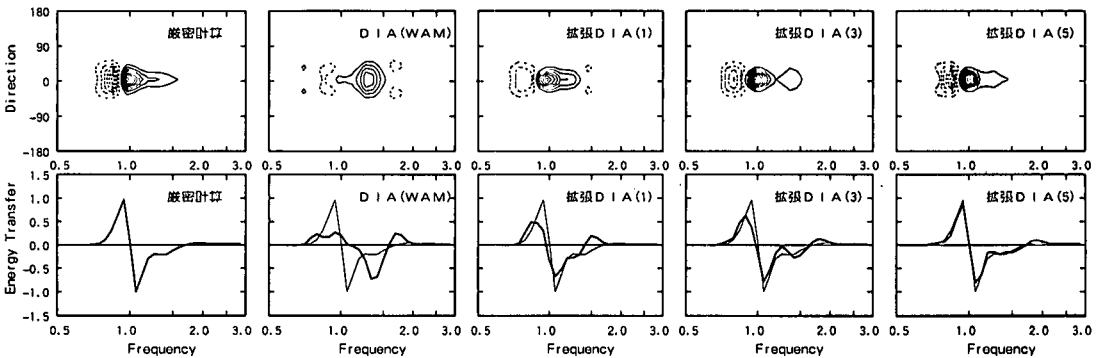


図-3 JONSWAP スペクトルを対象とした非線形エネルギー輸送の計算結果の比較 ($S_{max}=10$)

非線形相互作用の強度を決めるパラメーターは $C=2.97$ である。この場合、図-2と図-3の1つの組合せを用いた拡張 DIA (1) の例に見られるように、WAM の DIA に比べて JONSWAP スペクトルへの適合性は向上するが、PM スペクトルに対しては適合性がやや低下する。しかしながら、PM スペクトルと JONSWAP スペクトルの適合性を平均して考えると WAM の DIA よりも精度が向上していることになる。

図-1や図-2と図-3に見られるように、DIA における4波共鳴の組合せ数を1つ、2つ、3つと増大させて計算すると、一般に組合せの数に比例して計算精度は向上する。しかしながら、修正 DIA では組合せの数に比例して残差分散が単調に減少するのに比べて、拡張 DIA では組合せ数が3と4の場合には2の場合に比べて残差分散の減少は僅かである。ただし、組合せ数を5、6と増すと、拡張 DIA でも残差分散は再び減少し、修正 DIA と遜色ない近似精度を示す。

なお、植野ら(1997)が導入した修正 DIA は、共鳴4波の3つの組合せを採用する際に近似精度を上げるために導入した便宜的方法で、図-1に見られるように、一般に拡張 DIA よりも精度がやや高い。しかしながら、修正 DIA では、式(1)が本来有する性質、すなわち非線形エネルギー輸送は方向スペクトルの形状を変えるが、波浪エネルギーの総和、運動量の総和、波作用の総和を保存する性質を満たしているか否かについては再検討する必要がある。

5. おわりに

海洋波の非線形相互作用における離散相互作用近似に関する数値的検討を行った。また、WAM で用いられている DIA のパラメーターよりも精度の良いパラメー

ターを提案するとともに、DIA の組合せを増やした場合の最適なパラメーターも提案した。今後は、本研究で得られた成果を第三世代波浪予報モデルに導入し、より信頼性の高い波浪予報モデルの開発を進める予定である。

参考文献

- 植野耕治・石阪正雄(1997): 風波の非線形エネルギー輸送の効率的な計算法, 測候時報, 第64巻, pp. 75-80.
- 小松幸生・草場忠夫・増田 章(1993): 風波成分波間の非線形エネルギー伝達一新しく開発した効率的な計算法について, 九州大学応用力学研究所報, 第75号, pp. 121-146.
- 小松幸生(1996): 新しい非線形伝達計算法に基づく次世代型波浪予報モデルの開発, 九州大学応用力学研究所, 学位論文, 155 p.
- 橋本典明・鶴谷廣一・中川康之(1996): 有限水深域における海洋波の非線形相互作用に関する数値計算, 海岸工学論文集, 第43巻, pp. 191-195.
- Hasselmann, K. (1962): On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, Part 1, General theory, J. Fluid Mech., 12, pp. 481-500.
- Hasselmann, S. and K. Hasselmann (1981): A symmetrical method of computing the nonlinear transfer in a gravity wave spectrum, Hamb. Geophys. Einzelschriften, Reihe A: Wiss. Abhandl., 52, 138p.
- Hasselmann, S. and K. Hasselmann (1985): Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part I: A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral, J. Phys. Oceanogr., 15, pp. 1378-1391.
- Masuda, A. (1980): Nonlinear Energy Transfer Between Wind Waves, J. Phys. Oceanogr., 10, pp. 2082-2092.
- Suzuki, Y. (1995): Development and application of a global ocean wave prediction model including nonlinear interactions and dissipation, Dr. Thesis, University of Tokyo, 182p.
- The WAMDI Group (13 Authors) (1988): The WAM model- A third generation ocean wave prediction model, J. Phys. Oceanogr., 18, pp. 1378-1391.