

遡上波の高精度数値計算法の開発

鄭 培喜*・余 錫平**・磯部 雅彦***

1. 序 論

近年, 任意の緩勾配地形に適用できる高精度な非線形波理論の確立に向けて多くの研究が行われ, 海岸工学の実務における非線形波数値計算モデルの応用例も急速に増えてきた。微小振幅波の数値計算と大きく異なり, 有限振幅性を考慮した沿岸非線形波の場合においては, 高精度でかつ汎用性のある遡上波処理法が不可欠となる。

従来, 特性曲線法の適用が提唱されてきたが, 浅海長波方程式以外の基礎方程式に適用しにくい上に, 平面 2 次元問題に対する定式化が煩雑であることも加わって, 実際問題に対するこの方法の広汎な応用は実現されていない。

一方, Lax-Wendroff スキームに基づく差分法が Hibert & Peregrine (1979) によって開発され, 後に Kobayashi ら (1987, 1989) によって改良されたが, 格子点で計算された物理量の値に基づいて時々刻々に汀線の移動を推定しなくてはならないため, 幾何形状および流動特性ともに著しく変化する汀線付近においては精度の低下が避けられない。また, この手法を用いる際に, 数値的不安定の発生を防ぐ配慮が必要であることも知られている。底面摩擦効果を的確に取り入れることによって数値スキームの安定性がある程度改良されると報告されているが (Kobayashi ら, 1987, 1989, 1990, 1992), 計算時間間隔は遡上波先端付近に限られた局所的な流動の特性によって規定されることに変わりがなく, 全体の計算効率性が低いことが容易に想定される。

Gharabaghi (1998) は汀線付近で変動メッシュを採用し, 先端節点を常に汀線の位置に配置するようにすることによって, 数値計算の精度向上を試みたが, 2 次元の場合への拡張はまだ検討されていない。また, 汀線付近の地形を階段状のものとし, あらかじめ基礎差分方程式を適用するための最低限界水深を設定する近似手法も提案されているが, 高精度の波動方程式には不適切である。

また, Bundgaard & Warren (1991) が遡上域の海底

に小幅のスロットを設け, 遡上波の運動に連動するスロット内の流体運動を考慮に入れて, 数学上困難な移動境界問題を固定境界問題に変換することで, 遡上波処理に汎用的な手法を提案した。Madsen ら (1994) もこの手法を用いた。しかしながら, いずれの研究においても, 計算結果に大きな影響を与え, また, 入射波の条件に依るはずのスロットの寸法などに関する詳細な検討はなされなかった。

本研究では, 遡上域を, 一定水深を有する透過性の領域に置換えることで, 海底スロットのアプローチよりさらに高精度でかつ汎用的な遡上波処理法を構築する。この手法では実際の砂質海浜のような透過性底面における波の遡上にも対応できる。

2. 基本構想

図-1 に示されているように, 遡上域付近において, 不透過海底の一部を含めた空間を, 常に一定水深を保つ透過性の領域とする。透過性媒体の空隙率 ϵ が 1 に近づけば流体の領域となり, 0 に近づけば不透過の領域となるため, 本来の不透過底面を遡上する波の運動を, 透過性領域が導入されている場合の特例として考えることができる。つまり, 空隙率に鉛直分布を持たせ, 本来の海底面から上に向かってはそれが 1 に, また, 下に向かっては $\epsilon_m (\approx 0)$ に急速に近づくように設定すれば, 実質的に底面付近のごく薄い層に限って透過性の領域となり, 本来の不透過海底を近似的に表現することが可能である。

一方, 透過性領域を導入することによって, 数値計算

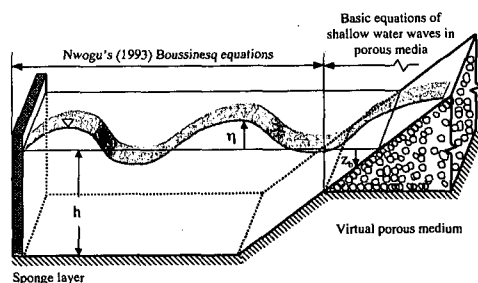


図-1 遡上波処理法の概念図

* 学生会員 工修 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻
** 正会員 工博 (中国)上海交通大学教授 応用力学科
*** フェロー 工博 東京大学教授 新領域創成科学研究科

領域を遡上波の到達する位置の岸側に固定することができ、数学上困難な移動境界の処理が避けられるため、数値計算方法の単純化が図られる。また、透過性媒体が流体に与える抵抗などを適切にモデル化することができれば、粒状体で構成されている実際の透過性海底を遡上する波の取り扱いも可能となる。

3. 定式化

Sollit & Cross (1972) に倣って、透過性媒体における流体の運動を以下の連続式および運動量方程式で記述することとする。

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) + (\epsilon w)_z = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\gamma [\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + w u_z] = -\nabla \Psi - \mathbf{R}_H \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\gamma [w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w w_z] = -\Psi_z - R_v \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 \mathbf{u} は水平流速ベクトル、 w は鉛直流速成分である。下添字 t および z はそれぞれ時間 t および鉛直座標 z に対する偏微分を表し、 ∇ は水平勾配演算子である。 $\gamma = 1 + C_M(1 - \epsilon)/\epsilon$ 、 C_M は付加質量係数である。 $\Psi = p/\rho + gz$ 、 p は圧力、 ρ は水の密度、 g は重力加速度である。 \mathbf{R}_H および R_v は透過性媒体が流体に与える抵抗力で、Bear (1972) によって以下のように定式化されている。

$$\mathbf{R}_H = \alpha \frac{(1 - \epsilon)^2 \nu}{\epsilon^2 d^2} \mathbf{u} + \beta \frac{(1 - \epsilon)}{\epsilon d} |\mathbf{u}| \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$R_v = \alpha \frac{(1 - \epsilon)^2 \nu}{\epsilon^2 d^2} w + \beta \frac{(1 - \epsilon)}{\epsilon d} |w| w \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 ν は水の動粘性係数、 d は透過性領域を構成する粒状体の代表的な粒径、 α と β はその形状に依存する抵抗係数である。一方、自由水面 $z = \eta(x, t)$ および不透過底面 $z = -h(x)$ における境界条件はそれぞれ以下の式で表される。

$$\eta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta - w = 0; \Psi = g\eta \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h + w = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 h は不透過底面上における静水深である。

透過性領域を遡上域付近に限ることが妥当であるため、そこにおける流体運動に対して長波近似が適用できる。よって、式 (3) は近似的に静水圧分布則に帰着され、それをを用いて式 (1) および (2) を鉛直方向に積分することが可能となる。境界条件式 (6) および (7) も考慮すれば、積分された方程式は以下のように書ける。

$$\epsilon^{(s)} \eta_t + \nabla \cdot (A \mathbf{u}) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\lambda [\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -g A \nabla \eta - \alpha_0 \mathbf{u} - \beta_0 |\mathbf{u}| \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、肩つき添字 s は自由水面 $z = \eta$ における値を示し、また、

$$A = \int_{-h}^{\eta} \epsilon dz \quad \dots\dots\dots (10)$$

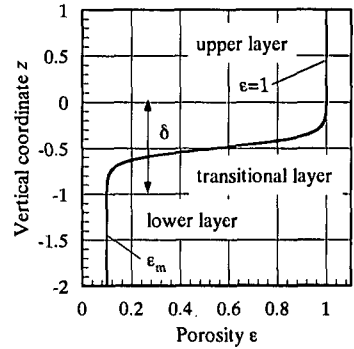


図-2 空隙率の鉛直分布

$$B = \int_{-h}^{\eta} 1/\epsilon dz \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\lambda = C_M(h + \eta) + (1 - C_M)A \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\alpha_0 = [A + B - 2(h + \eta)] \alpha \nu / d^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\beta_0 = (h + \eta - A) \beta / d \quad \dots\dots\dots (14)$$

空隙率の鉛直分布関数形に関しては、数値計算上の便宜を考え、原則として以下の条件が満たされるように決定する。つまり、関数形に含まれる特定のパラメータを連続的にある値に近づかせれば、 $\epsilon(z)$ がステップ関数に近づくことと、式 (10) および (11) の積分が解析的に得られることである。これをふまえて、本研究では以下の関数形を採用する。

$$\epsilon = \frac{1 + \epsilon_m}{2} + \frac{1 - \epsilon_m}{2} \tanh Z(z) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$Z(z) = 4 + \frac{8}{\delta} (z - z_b) \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 z_b は本来の不透過底面の位置を表す。また、 δ は本来の不透過底面付近で水の領域から不透過領域に連続的に移行するために導入された透水層の代表的な厚さである。数値計算における ϵ_m および δ の値に関して、プログラムが異常終了しない限り、なるべく小さい値に設定することが原則である。

式 (15) を式 (10) および (11) に代入すれば、係数 A および B は以下のように求められる。

$$A = \frac{1 + \epsilon_m}{2} (h + \eta) + \frac{\delta(1 - \epsilon_m)}{16} \ln \frac{\cosh Z^{(s)}}{\cosh Z^{(b)}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$B = \frac{1 + \epsilon_m}{2 \epsilon_m} (h + \eta) - \frac{\delta(1 - \epsilon_m)}{16 \epsilon_m} \cdot \ln \frac{\exp Z^{(s)} + \epsilon_m \exp(-Z^{(s)})}{\exp Z^{(b)} + \epsilon_m \exp(-Z^{(b)})} \quad \dots\dots\dots (18)$$

上述の遡上波処理法は多様な波動方程式に適用可能なものである。本研究においては、不透過底面上の波動を Nwogu (1993) によって拡張された Boussinesq 方程式で記述することとする。

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h + \eta)\mathbf{u}] + \frac{1}{6}(3\xi^2 - 1)\nabla \cdot (h^3 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{2}(2\xi + 1)\nabla \cdot [h^2 \nabla \nabla \cdot (h\mathbf{u})] = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + g \nabla \eta + \frac{1}{2} \xi^2 h^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_t + \xi h \nabla \nabla \cdot (h\mathbf{u}_t) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 \mathbf{u} は鉛直参照位置 $z = z^{(r)}$ における水平流速ベクトル、 h は静水深である。 $\xi = z^{(r)}/h$ 、Nwogu (1993) によれば、 $\xi = -0.553$ とすれば、式 (19) および (20) による波の分散関係が微小振幅波のそれにもっとも近いことが確認されている。不規則波を考える際にこの値が必ずしも最適であるとは限らないことも明らかになっているが (Abohadima ら, 1998)、本研究では Nwogu (1993) に従う。

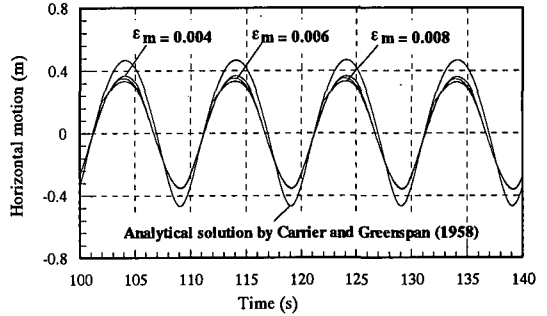
数値計算法に関しては、著者ら (1998) が修正 Boussinesq 方程式 (19) および (20) を解くために開発した高次精度の差分法を適用する。透過性領域における長波方程式 (8) および (9) も、形式上修正 Boussinesq 方程式に分散項を除外したものと同じであるため、数値計算における特別な配慮は必要としない。

4. 検証計算

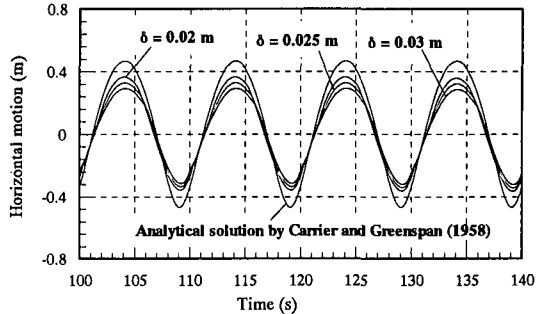
(1) 一様勾配を直角入射する正弦波の場合

本研究で提案されている遡上波の処理手法を検証するために、まず、碎波しない場合の、一様勾配の斜面を遡上する正弦波に対して数値計算を実施した。計算結果を Carrier & Greenspan (1958) の解析解と比較するために、底面摩擦の影響を無視し、運動量方程式 (9) において、抵抗係数 $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ とした。入射波に関して、周期は $T = 10$ s で、波高は水深 $h = 0.5$ m の場所において $H = 0.006$ m となるような微小振幅波を想定した。斜面勾配は 1 : 25 に設定した。この場合、斜面上で碎波が起らないことは Madsen ら (1994) の碎波限界条件で容易に確認できる。計算時間間隔および空間格子間隔はそれぞれ $\Delta x = 0.1$ m および $\Delta t = 0.01$ s とした。透過性の遡上領域は、遡上・流下の範囲を十分含むように水深 $h = 0.08$ m で浅とした。

本計算を行う前に、まず、 δ および ϵ_m の値が計算結果に及ぼす影響を調べた。図-3(a)には、 $\delta = 0.02$ m に対して、 $\epsilon_m = 0.04, 0.06$ および 0.08 の値に対する汀線水平位置の経時変化の違いを示している。また、図-3(b)に示されているは、 $\epsilon_m = 0.04$ に固定した場合、 $\delta = 0.02$ m, 0.025 m および 0.03 m の値に対する汀線水平位置の経時変化である。図示の結果より、 δ および ϵ_m の値が小さくなるにしたがって、数値解が解析解に収束している傾向が確認できる。他方、 δ あるいは ϵ_m の値が大きくなる



(a)



(b)

図-3 (a) ϵ_m および (b) δ の変化による汀線水平位置の違い

と、最高遡上高および最低流下高ともに理論値より小さくなってしまいうことも明らかである。これは実際の透過性海浜における波の遡上現象と同じように、本来水面の最大振幅に寄与する位置エネルギーの一部が透過性媒体における流体の運動エネルギーに割り当てられてしまうことによるものである。しかし、 δ および ϵ_m の値をある限界を超えて小さくすると、差分方程式の特異性の強まりによって、数値計算が不可能になってしまう。これは、 δ および ϵ_m に対して必要最小値を採用しなければならない理由となっている。

図-4には、最高遡上時および最低流下時の自由水面変位を、Carrier & Greenspan (1958) の解析解と比較して示している。ここで、 $\delta = 0.02$ m, $\epsilon_m = 0.04$ に設定した。解析解に比べて数値解に示されている最高遡上高および最低流下高が多少小さくなっているものの、工学の視点からこの差は無視できると考えてよい。

(2) 一様勾配を直角入射する孤立波の場合

次に、微小振幅の正弦波以外の波に対する本研究の数値計算法の有効性を確かめるために、一様勾配斜面上を遡上する孤立波の計算を行った。Synolakis (1987) と比較するため、一様勾配 1 : 19.85 の斜面の沖側に $h = 0.316$ m の一様水深部を設けた地形を考える。入射波の相対波高は $H/h = 0.019$ とする。計算時間間隔および空

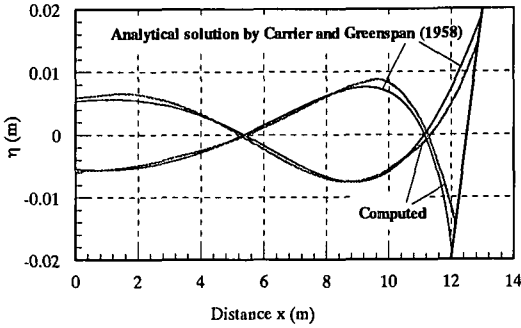


図-4 最高遡上時および最低流下時の空間波形

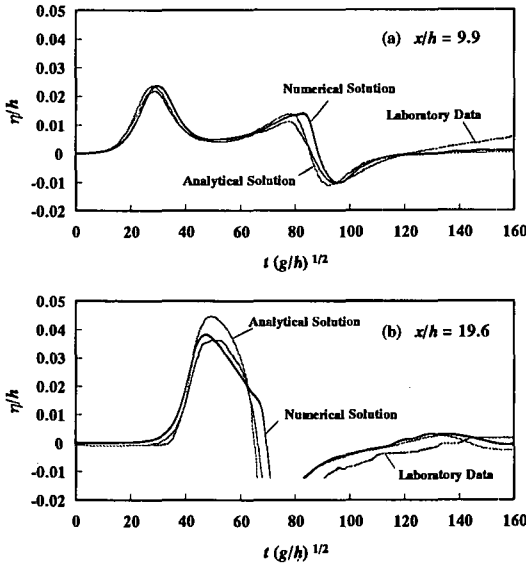


図-5 異なる位置における孤立波の時間波形

間格子間隔はそれぞれ $\Delta x = 0.1 \text{ m}$, $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ とした。透過性の遡上領域は $x/h = 13.41$ より岸側の範囲とした (x は底面勾配の始点を基準とした水平位置である)。また, $\epsilon_m = 0.004$, $\delta = 0.02 \text{ m}$ である。図-5 に示されているのは, $x/h = 9.9$ および $x/h = 19.6$ (静水汀線の近傍) における時間波形の計算値と非線形解析解および実験データとの比較である。実験結果は Synolakis (1987) によるものである。図示されているように, 孤立波に対しても本遡上波の処理法で精度のよい計算結果が得られる。計算値が解析解よりむしろ実験値に近いのは, 数値計算モデルにおける透過性媒体の導入と水槽実験における底面摩擦が汀線付近の水面変動に同じ効果をもたらしていることによると考えられる。図-5 (b) にも示されているように, 従来困難とされている流下時に発生するドライ・ベッドの現象もほぼそのまま再現されている。図-6 は

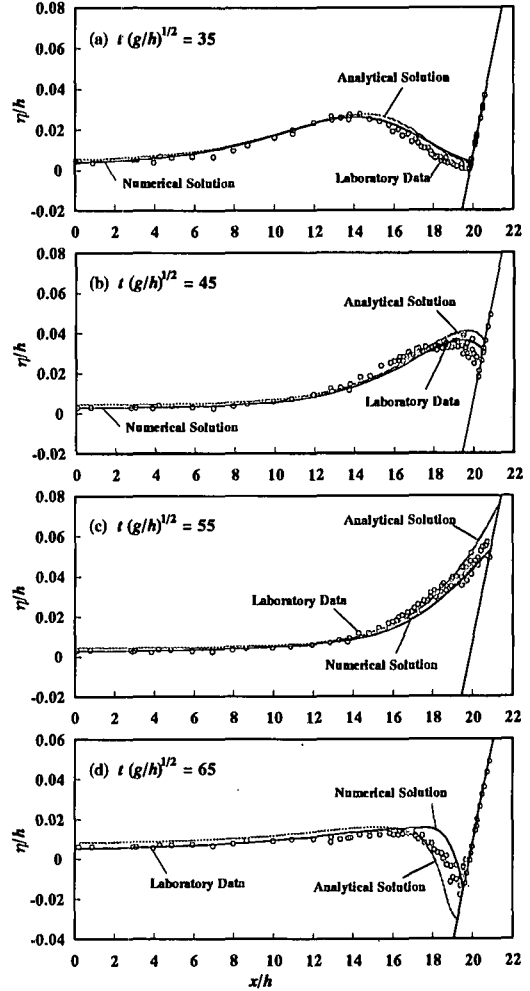


図-6 異なる時刻における孤立波の空間波形

異なる時刻における空間波形の数値解と解析解および実験データとの比較を示すものである。全体的に精度のよい数値計算結果が得られているが, 最高遡上高に多少の誤差が現れていることは正弦波の場合と同じである。

(3) 一様勾配を斜め入射する正弦波の場合

最後に, 本研究の数値計算法の平面 2 次元問題への適用性を検討すべく, 一様勾配斜面を斜め入射する正弦波の計算を行った。類似問題に対する解析解や信頼性の高い実験データが得られないため, 数値計算結果を示すのみとなる。計算の対象問題として, 一様水深 $h = 0.5 \text{ m}$ における周期 $T = 10 \text{ s}$, 波高 $H = 0.006 \text{ m}$ の波が 45° の角度を持って 1:25 の一様勾配を遡上するケースを考える。計算の空間格子間隔および時間間隔については, $\Delta x = \Delta y = 0.1 \text{ m}$, $\Delta t = 0.0025 \text{ s}$ とした。透過性領域を水深 0.08 m 以浅の領域とし, $\epsilon_m = 0.006$, $\delta = 0.03 \text{ m}$ とした。図-7 には異なる時刻における空間波形を示している。

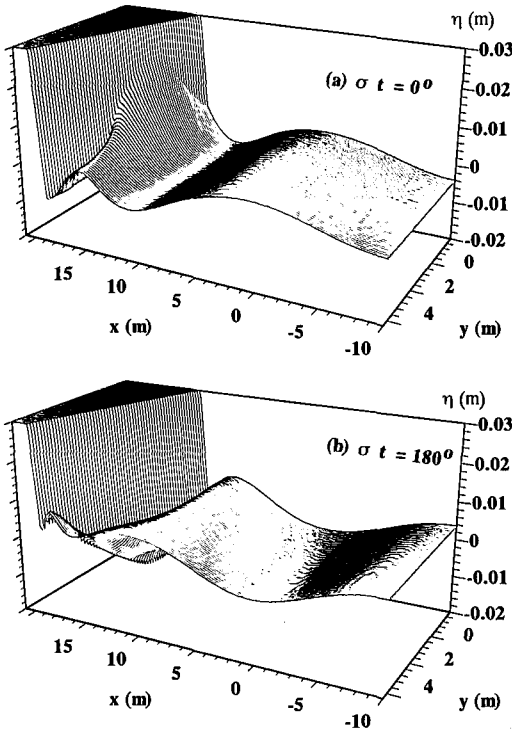


図-7 異なる時刻の斜め入射波の空間波形

5. ま と め

本研究で遡上波の数値計算における新しい手法を提案した。勾配1:25の斜面上における微小振幅正弦波の遡上にこれを適用した結果, Carrier & Greenspan (1958)の特性曲線法による解析解にほぼ一致する数値解が得られることが分かった。また, 勾配1:19.85の斜面上における孤立波の遡上について, 本計算手法で非線形解析解および Synolakis (1987) の水槽実験の結果とほぼ同一の結果が得られることも示された。従来困難とされてきたドライ・ベッドの再現も実現された。勾配1:25の斜面を45°で斜め入射する規則波の遡上計算がこの方法で容易に行えることも確認された。従来の遡上波処理法に比べて, 本研究で提案されている手法は精度および汎用性の面で優れているのみならず, 煩雑な計算スキームを一切

必要としないことで, 今後海岸工学の実務における広汎な応用が期待できる。さらに, 本手法は砂浜のような実際の透過性海浜における波の遡上に直接適用できることも容易に理解される。

参 考 文 献

Samir Abohadima・余 錫平・磯部雅彦 (1998): 非線形波理論の最適分散特性について, 海岸工学論文集, 第45巻, pp. 6-10.
 鄭 培喜・余 錫平・磯部雅彦 (1998): Boussinesq 方程式に対する高次数値計算モデルの開発, 海岸工学論文集, 第45巻, pp. 21-25.
 Bear, J. (1972): Dynamics of fluids in porous media, American Elsevier, New York, 764 p.
 Carrier, G. F. and H. P. Greenspan (1958): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J. Fluid Mech., Vol. 24, pp. 641-659.
 Gharabaghi, A. R. M. (1998): Mathematical modeling of waves and currents in surf and swash zones, Doctoral dissertation, University of Tokyo, Japan.
 Hibbert, S. and D. H. Peregrine (1979): Surf and runup on a beach: a uniform bore, J. Fluid Mech., Vol. 95, pp. 323-345.
 Kobayashi, N., D. T. Cox and A. Wurjanto (1990): Irregular wave reflection and run-up on rough impermeable slopes, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol. 116 (6), pp. 708-726.
 Kobayashi, N., G. S. Desilva and K. D. Wattson (1989): Wave transformation and swash oscillations on gentle and steep slopes, J. Geophys. Res., Vol. 94(C1), pp. 951-966.
 Kobayashi, N., and E. A. Karjadi (1994): Swash dynamics under obliquely incident waves, Proc. 24th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 2155-2169.
 Kobayashi, N., A. K. Otta and I. Roy (1987): Wave reflection and runup on rough slopes, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol. 113(3), pp. 282-298.
 Kobayashi, N., and A. Wurjanto (1992): Irregular wave setup and runup on beaches, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol. 118(4), pp. 368-386.
 Madsen, P. A., O. R. Sørensen and H. A. Schäffer (1994): Time domain modelling of wave breaking, runup, and surf beats, Proc. 24th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 399-411.
 Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, 119(6), pp. 618-638.
 Sollit, C. K. and R. H. Cross (1972): Wave transmission through permeable breakwaters, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 1827-1846.
 Synolakis, C. E. (1987): The runup of solitary waves, J. Fluid Mech., Vol. 185, pp. 523-545.