

# 砕波帯・遡上域に適用可能な Boussinesq 型 波動・乱流モデルの提案

Zakaria A. Elnaggar\*・渡 辺 晃\*\*

## 1. はじめに

砕波とそれに伴う波の減衰, 平均水位の変化, 乱れの生成, 海浜流や長周期波の発生等は, 沿岸での底質や各種物質の輸送に関わる重要な現象である。旧来の Boussinesq 方程式は, 砕波前の波の挙動を相当程度には表現できるものの, 浅海域での弱非線形波にしか適用できないという制約があった。分散性の制約は例えば Nwogu (1993) により, 非線形性の制約は Wei ら (1995) などによって, ある程度解消されたが, これら拡張 Boussinesq 方程式もそのままでは非砕波条件にしか適用できない。砕波減衰項を含む Boussinesq 方程式も提案されているが, 多くは弱非線形波に限られており, 砕波という強非線形現象を扱うには十分とはいえない。

本研究では, レイノルズ方程式に基づく時間依存型の砕波モデルを含んだ強非線形 Boussinesq 方程式を, Nwogu (1993) や Wei ら (1995) にならって導く。砕波に伴い発生する乱れの時空間変動の算定には 1 方程式乱流モデルを用いる。また移動点境界を用いて波の遡上をも扱えるようにする。このモデルの妥当性は, 波の遡上や, 波高・平均水位の分布, 水面波形や水平流速分布等の実験データとの比較により検討される。

## 2. Boussinesq 型波動方程式の導出

ここではレイノルズ方程式を出発点として, 波動方程式を導く。流速と圧力を波・流れ成分 ( $\bar{u}_i$ ,  $\bar{p}$ ) と乱れ成分に分け, 総動粘性係数  $\nu_t$  を渦動粘性係数  $\nu_e$  と分子動粘性係数  $\nu$  の和と与えれば, レイノルズ方程式は

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = X_i \quad \dots (1)$$

と表せる。ただし,  $i, j=1, 2, 3$  であり総和規約に従う。また連続式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots (2)$$

水平座標  $x$ ,  $y$  の尺度を代表波数  $k_0$  の逆数, 鉛直座標  $z$  および局所水深  $h$  の尺度を代表水深  $h_0$ , 水面変位  $\eta$  の

尺度を代表振幅  $a_0$  とし, さらに 2 つのパラメータ  $\epsilon = a_0/h_0$  と  $\mu = k_0 h_0$  を選ぶ。また, 時間  $t$  の尺度は  $1/(k_0(g h_0)^{1/2})$ , 水平流速  $u$ ,  $v$  の尺度は  $\epsilon(g h_0)^{1/2}$ , 鉛直流速  $w$  の尺度は  $\epsilon(g h_0)^{1/2}/\mu$ , 圧力  $p$  の尺度は  $\rho g a_0$  とする。これらの尺度を用いれば, 式 (2) および (1) は式 (3), (4), (5) となる (ただし, 諸量は無次元量)。

$$\mu^2 \nabla \cdot \bar{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \frac{\epsilon}{\mu^2} w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \nabla p \\ - \nabla \left( \frac{1}{Re} \nabla \cdot \bar{u} \right) - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon \bar{u} \cdot (\nabla w) + \frac{\epsilon}{\mu^2} w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \\ - \nabla \cdot \left( \frac{1}{Re} \nabla w \right) - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\epsilon} = 0 \quad \dots (5) \end{aligned}$$

ここで  $Re = (g h_0)^{1/2} L_0 / \nu_t$  は乱れの尺度でその大きさには制限がなく,  $\bar{u} = (\bar{u}, \bar{v})$  は水平流速ベクトルである。

無次元表示された水面と底面での境界条件は式 (6), (7), (8) で与えられる。

$$p = 0 \quad z = \epsilon \eta \quad \dots (6)$$

$$w = \mu^2 \eta_t + \epsilon \mu^2 \bar{u} \cdot \nabla \eta \quad z = \epsilon \eta \quad \dots (7)$$

$$w = -\mu^2 \bar{u} \cdot \nabla h \quad z = -h \quad \dots (8)$$

式 (3) を  $z$  に関し  $-h$  から  $\epsilon \eta$  まで積分し, 式 (7) と (8) を用いれば,

$$\eta_t + \nabla \cdot \int_{-h}^{\epsilon \eta} \bar{u} dz = 0 \quad \dots (9)$$

が得られる。一方, 圧力場は式 (5) を  $z$  から  $\epsilon \eta$  まで積分し, 水面境界条件式 (6), (7) を用いて, 次式のよう

$$\begin{aligned} p = \eta - \frac{z}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\epsilon \eta} w dz + \epsilon \nabla \cdot \int_z^{\epsilon \eta} \bar{u} w dz \\ - \frac{\epsilon}{\mu^2} w^2 - \nabla \cdot \int_z^{\epsilon \eta} \left( \frac{1}{Re} \nabla w \right) dz + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad \dots (10) \end{aligned}$$

同様に鉛直流速  $w$  は式 (3), (8) より,

$$w = -\mu^2 \nabla \cdot \int_{-h}^z \bar{u} dz \quad \dots (11)$$

ここまでの式の展開は厳密であり, 次数によらず成立

\* M.S. 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻  
 \*\* 正会員 工博 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻

する。基礎方程式を積分するために、水平流速の鉛直分布を与えることにする。Nwogu (1993) にならう、ある高さ  $z = z_a(x, y)$  での流速  $\bar{u}_a$  を従属変数とすると、水平流速の鉛直分布は次式のように仮定される。

$$\bar{u} = \bar{u}_a + \frac{\mu^2}{2}(z_a^2 - z^2)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}_a) + \mu^2(z_a - z)\nabla(\nabla \cdot h\bar{u}_a) + O(\mu^4) \quad \dots\dots\dots (12)$$

この式を式 (11) に代入すれば、

$$w = -\mu^2[z\nabla \cdot \bar{u}_a + \nabla \cdot (h\bar{u}_a)] \quad \dots\dots\dots (13)$$

であり、圧力  $p$  は式 (12), (13) を式 (10) に代入して得られる。

従って積分された連続式 (9) は式 (14) に書き換えられ、一方、水平方向の運動量式 (4) を  $z = -h$  から  $\varepsilon\eta$  まで積分し、非線形項も全て残せば式 (15) が得られる。

$$\eta_t + \nabla \cdot (M_1 + M_2) = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{u}_{at} + \varepsilon(\bar{u}_a \cdot \nabla)\bar{u}_a + \nabla\eta + \mu^2\left[\frac{z_a^2}{2}\nabla(\nabla \cdot \bar{u}_{at}) + z_a\nabla(\nabla \cdot h\bar{u}_{at})\right] + R_1 + V_2 + R_2 + \frac{\bar{\tau}_b}{\varepsilon\mu} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、添え字の  $t$  は時間に関する微分を表す。  $\bar{\tau}_b$  は無次元化された底面摩擦応力であり、各項は以下の式で与えられる。

$$M_1 = (h + \varepsilon\eta) + \mu^2\left\{\left(\frac{hz_a^2}{2} - \frac{h^3}{6}\right)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}_a) + \left(hz_a + \frac{h^2}{2}\right)\nabla(\nabla \cdot (h\bar{u}_a))\right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$M_2 = \varepsilon\mu^2\left\{\left(\frac{\eta z_a^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 h^3}{6}\right)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}_a) + \left(\eta z_a - \frac{\varepsilon h^2}{2}\right)\nabla(\nabla \cdot h\bar{u}_a)\right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$R_1 = -2\nabla\left(\frac{1}{R_e}\nabla \cdot \bar{u}_a\right) + \frac{1}{R_e}\nabla(\nabla \cdot \bar{u}_a) - \mu^2\left[\frac{z_a^2}{2}\nabla\left(\frac{1}{R_e}\nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot \bar{u}_a)\right) + z_a\left(\frac{1}{R_e}\nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot h\bar{u}_a)\right)\right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$V_2 = \varepsilon\mu^2\left\{\nabla\left[(z_a - \varepsilon\eta)(\bar{u}_a \cdot \nabla)(\nabla \cdot h\bar{u}_a) + \frac{1}{2}(z_a^2 - \varepsilon^2\eta^2)(\bar{u}_a \cdot \nabla)(\nabla \cdot \bar{u}_a) + \frac{1}{2}(\nabla \cdot h\bar{u}_a + \varepsilon\eta\nabla \cdot \bar{u}_a)^2\right] - \left[\eta\nabla\left(\nabla \cdot \left(h\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial t}\right)\right) + \frac{1}{2}\varepsilon\eta^2\nabla\left(\nabla \cdot \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial t}\right)\right]\right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$R_2 = \varepsilon\mu^2\left[\frac{\varepsilon}{2}\nabla\left(\frac{\eta^2}{R_e}\right)\nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot \bar{u}_a) + \nabla\left(\frac{\eta}{R_e}\nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot h\bar{u}_a)\right)\right] \quad \dots\dots\dots (20)$$

上式で乱流項  $R_1, R_2$  と底面摩擦項を無視すれば、Wei ら (1995) の Boussinesq 方程式になる。Zelt (1991), Karambus-Kouitas (1992), Arts (1994) らによる砕波減衰項を含む Boussinesq 方程式は、 $M_2, V_2, R_2, \tau_b$  を無視し、 $R_1$  中では第 1 項のみを残せば得られる。 $R_2$  および  $R_1$  中の第 2 項以下を無視すれば、Nwogu (1996) の式に一致する。

上式の特長は、砕波の過程を少なくとも数学的には適切に扱っていることと、改良された分散関係の中で強非線形項を保持している点である。従来の多くのモデルでは、乱れによるエネルギー減衰は、 $R_1$  中の第 1 項に相当する渦粘性の項のみによって扱われていた。しかしここで式の展開より、それと同じオーダーであるいくつかの渦粘性の空間変化の項や非線形項が付加されるべきであることが分かる。また、従来の多くの研究では渦粘性の項と物理的に矛盾するポテンシャル流れの仮定がなされているのに対し、このモデルはレイノルズ方程式から出発しているため、回転流れであってよい。

もう一つ指摘すべきことは、この強非線形モデルでは質量フラックス  $M$  が次式

$$M = M_1 + M_2 = (h + \varepsilon\eta)\left\{\bar{u}_a + \mu^2\left[\left(\frac{z_a^2}{2} - \frac{1}{6}(h^2 - \varepsilon h\eta + (\varepsilon\eta)^2)\right)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}_a) + \left(z_a + \frac{1}{2}(h - \varepsilon\eta)\right)\nabla(\nabla \cdot h\bar{u}_a)\right]\right\} + O(\mu^4) \quad \dots\dots\dots (21)$$

で与えられるので、 $(h + \varepsilon\eta) \rightarrow 0$  となる汀線では  $M \rightarrow 0$  の境界条件を自動的に満たす点である。この条件は非線形長波方程式や Wei ら (1995) のように深さ平均の流速を従属変数にした Boussinesq 方程式では満たされるが、深さ平均以外の流速を用いた場合には弱非線形の Boussinesq 方程式では自動的に満たされない。

### 3. 乱流モデル

次なる問題は渦粘性に対する適切なモデリングである。本研究では、次式のように渦動粘性係数  $\nu_e$  を乱れの運動エネルギー  $k$  と乱れの代表長さ  $l_e$  で表す 1 方程式 ( $k$ -) モデルを用いる。

$$\nu_e = \sqrt{k}l_e \quad \dots\dots\dots (22)$$

乱れエネルギーは砕波に伴う乱れ生成項を含む半経験的な乱れの輸送方程式 (23) で算定する。

$$k_x + \bar{u}_s \cdot \nabla k = \nu_e \nabla^2 k + \nu_i \left| \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial z} \right|^2 - C_D \frac{k^2}{l} \dots (23)$$

ここで  $u_s$  は式 (12) で算出される水面での流速である。右辺第1項は水平拡散項である。第2項は乱れの生成項であり、砕波帯外では0におかれる。乱れの減衰項である第3項中の係数  $C_D$  は従来の研究 (例えば, Nwogu, 1996) により 0.08 とおかれる。唯一のフリーパラメーターである長さの尺度  $l$  は波高のオーダーの値をとると予測される。

4. 数値計算法

4.1 砕波限界

渡辺ら (1983) は合田 (1970) の砕波指標を線形理論で計算される重合波浪場に対するより汎用的な砕波指標図に変換した。その指標図では波峰下の平均水位 (または波峰そのもの) での水平軌道流速と波速の比を主パラメーターにしている。本研究ではこの渡辺らの砕波指標を砕波の判定に用いる。ただし非線形モデルで使用することを考慮して流速・波速限界値を 1.5 倍する。

4.2 数値計算スキーム

数値計算には Wei・Kirby (1995) と同様に Adams-Bashforth-Moulton の高次予測子・修正子法を用いる。ただし計算スキームは移動汀線境界の扱いが容易になるように半陰解法に修正する。丸め誤差を最小にするためにスタッガード格子の高次差分を採用する。1階の空間微分項については、標準の5点差分法を用いることにより、分散項との相対的な丸め誤差が  $O(\Delta x^4/\mu^2)$  になるようにした。これと対照的に、分散項自身は誤差が  $O(\Delta x^2)$  となるように差分化した。

次元を持った形で基礎式 (14), (15) を表示し直し、まず予測段階に対しては3次の陽的な Adams-Bashforth スキームを用いて  $\eta_s^{n+1}$ ,  $u_a = (u_{i+1/2}, v_{j+1/2})^{n+1}$ ,  $k_s^{n+1}$  を求める。次いで後述の方法により移動汀線の位置と諸量を求める。

さらに運動量方程式を半陰的に表し、4次の Adams-Moulton 修正子スキームを採用する。ただし新しい時間ステップの水平流速の評価のためには、3角帯行列系の行列演算を行う必要がある。修正段階は解が所与の精度に収束するまで繰り返される。

4.3 境界条件

沖側の境界条件としては、石井ら (1993) の線境界入射法を用いる。

岸側移動境界については以下のように扱う。予測段階は陽的なので、 $\eta_s^{n+1}$  と  $(u_a)_{s+1/2}^{n+1}$  が計算できる。ただし添え字の整数  $s$  は移動汀線より1つ沖側の点に相当する。もし  $D_s^{n+1} = k_s^{n+1} + \eta_s^{n+1} < \delta = 10^{-4}$  ならば  $s^{n+1} = s^n - 1$  とする。逆に  $D_s^{n+1} > \delta$  ならば  $D_s^{n+1}$  と  $(u_a)_{s+3/2}^{n+1}$  を線形外挿で計

算する。そして  $D_{s+1}^{n+1} < \delta$  ならば  $s^{n+1} = s^n$  とする。一方  $D_{s+1}^{n+1} > \delta$  なら、式(14), (15)を解いて  $\eta_s^{n+2}$  と  $(u_a)_{s+1/2}^{n+2}$  を計算し、線形外挿値を次式で補正する。

$$m_{s+1}^{n+1} = m_{s-1}^{n+1} - \frac{\Delta x}{\Delta t} (D_s^{n+2} - D_s^n) \dots (24)$$

$$(u_a)_{s+3/2}^{n+1} = u_{s-1/2}^{n+1} - \left( (u_a)_{s+1/2}^{n+1} \right)^{-1} \cdot \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \left( (u_a)_{s+1/2}^{n+2} - (u_a)_{s+1/2}^{n+1} \right) + D_{s+1}^{n+1} - D_{s-1}^{n+1} \right] \dots (25)$$

$$D_{s+1}^{n+1} = m_{s+1}^{n+1} \left( (u_a)_{s+3/2}^{n+1} \right)^{-1} \dots (26)$$

この修正後  $D_{s+1}^{n+1} < \delta$  ならば  $s^{n+1} = s^n$  とし、 $D_{s+1}^{n+1} > \delta$  ならば  $s^{n+1} = s^n + 1$  とする。この操作を4次の Adams-Moulton の修正スキームと共に繰り返す。

5. モデルの検証

5.1 非砕波の変形

まず図-1に示す潜堤による波の変形に対する数値計算結果を実験データ (大山ら, 1993) と比較する。入射規則波の周期は 2.01 s で波高は 5.0 cm である。2つの点における波形の比較を図-1に示す。本モデルにより、砕波に近い非線形波の変形が波の分裂も含めてよく再現されているといえる。

5.2 波の打ち上げ (遡上と流下)

(a) 周期波の打ち上げ

周期波の場合は、一様勾配斜面上の非砕波の波の打ち上げに関する Carrier・Greenspan (1958) の解析解との比較を行う。数値計算においては乱流項と底面摩擦項を0とおく。斜面勾配は 1/25 であり、波の周期は 10 s、水深 0.5 m での波高は 0.006 m とした場合の波形の比較を図-2に示す。解析解と数値解は極めてよく合致している。

(b) 孤立波の打ち上げ

次に孤立波の斜面上への打ち上げに関し、Synolakis (1987) の実験と計算の比較を行う。勾配 1:19.85 の斜面の沖側に一様水深部があり、そこに孤立波が入射する条件である。図-3は  $H/h = 0.19$  のケースに対する斜面上の幾つかの点における水面の時間波形を比較したものであり、実線が計算結果、点線が実験結果である。一方図-4は、 $H/h = 0.04$  の場合に対する各位相での空間波形の比較である。両者共に計算と実測の一致度は極めてよい。Jacobian を用いた Synolakis の解析によれば、この勾配では  $H/h = 0.029$  で浅水波理論は破綻する (砕波する) が、この  $H/h = 0.04$  のケースに対する実験でも計算でも、遡上・流下中に波の前面が極めて急になっても砕波は生じない。

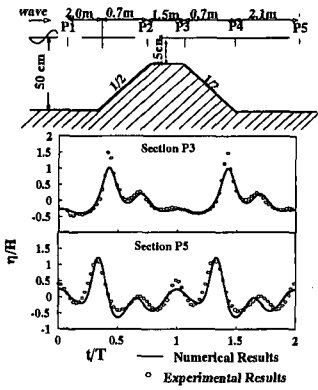


図-1 潜堤上と背後の水面波形

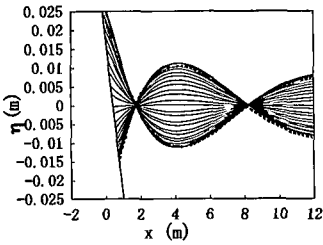


図-2 周期波の斜面上への打ち上げ

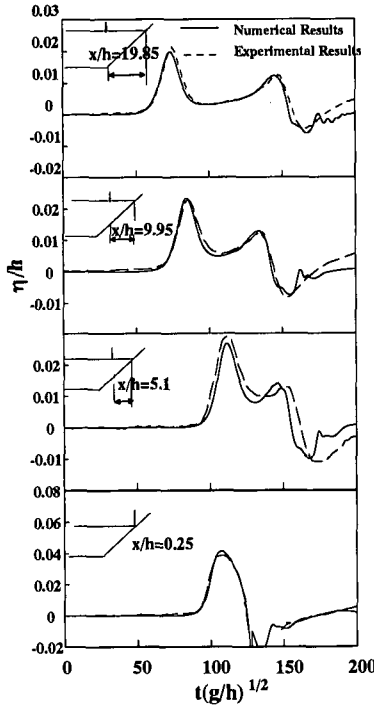


図-3 孤立波の打ち上げ時の時間波形

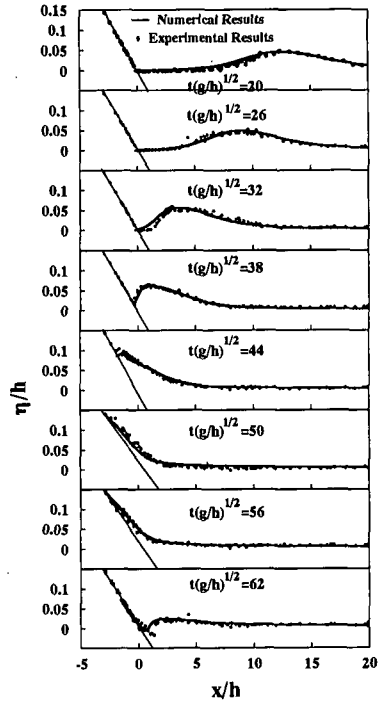


図-4 孤立波の打ち上げ時の空間波形

### 5.3 波高と平均水位

斜面上で砕波変形する波の波高と平均水位については, Nwogu (1993) の実験データとの比較を行う. 条件としては水深 0.56 m の一様水深部に勾配 1 : 25 の斜面が続いており, 入射波の周期は 2 s, 波高は 0.09 m である. 計算では乱れの長さスケール  $l_t$  として入射波高を用い, 底面摩擦は Chezy の式で算定した. 図-5 に波高と平均水位の岸沖分布の比較を示す. 計算では砕波点近傍の波高も過小評価しておらず, また wave set-down や set-up もよく一致している.

### 5.4 水面波形・乱れエネルギー・水平流速

最後に水面波形や水平流速分布について Cox ら (1995) の実験データとの比較を行う. 図-6 に示すように, 勾配 1 : 35 の斜面上に 6 つの測点が設けられている. L1 は砕波点より沖側, L2 と L3 は砕波点近傍, L4, L5, L6 は砕波後の乱れを伴う bore 状になる領域に位置する. なお入射波の周期は 2.2 s, 波高は 11.5 cm である.

#### (a) 水面波形

図-7 は L1 から L6 までの水面波形を比較したものであり, 実線は計算, 点線は実測である. 波峰が尖る L2, L3 や波形が bore 状になる L4, L5, L6 などの非線形性が卓越する全ての測点で計算波形は実測とよい一致を示している.

図-8 には水面の空間波形と共に, 波峰と波谷の包絡線を示す.

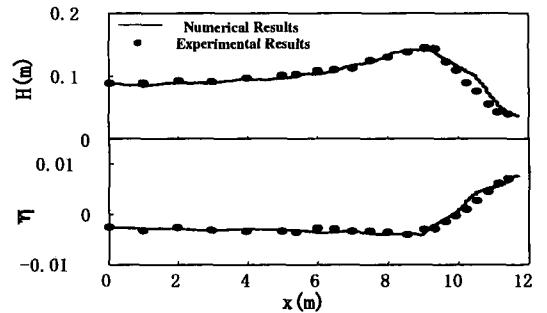


図-5 波高と平均水位の岸沖分布

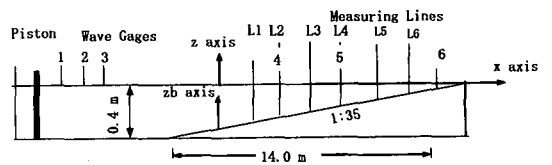


図-6 Cox ら (1995) の実験装置

#### (b) 乱れエネルギー

図-9 には, 砕波点から汀線までについて乱れエネルギーの 1 周期間の空間分布変化を示す. 乱れエネルギーは砕波点で 0 から急激に増加し, 遷移域で最大となり, bore 領域で減衰することが分かる. つまり当然ながら, 乱れエネルギーの生成と減衰の間には位相遅れがあり, この遅れは水平渦を生じるに要する時間による.

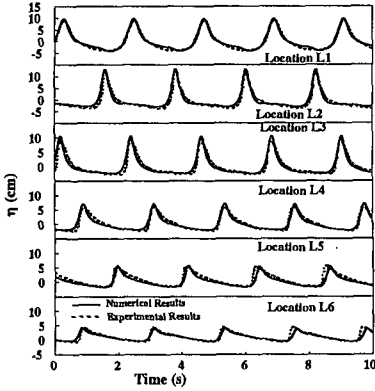


図-7 各測点での水位時間波形

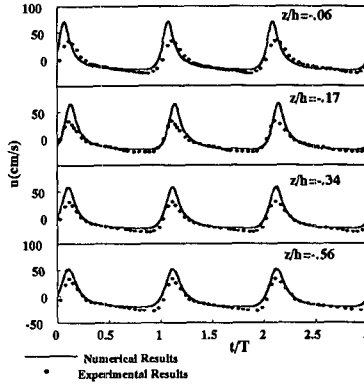


図-10 測点 L3 での流速時間波形

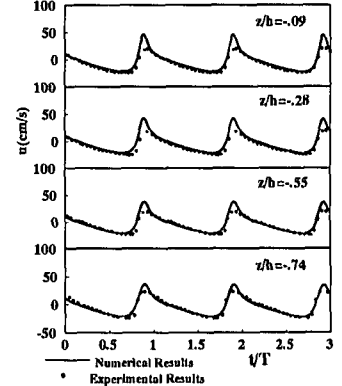


図-11 測点 L5 での流速時間波形

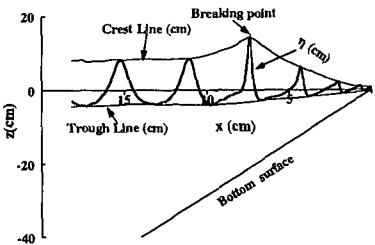


図-8 水位の空間波形と包絡線

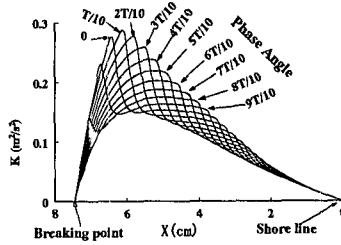


図-9 乱れエネルギー分布の時間変化

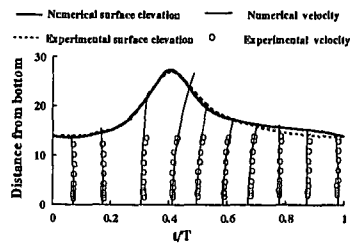


図-12 水位と流速分布の時間変化

(c) 水平流速

水平流速分布は式 (12) により計算される。L3 と L5 での幾つかの高さでの水平流速の時間波形を計算 (実線) と実測 (黒丸) で比較したものが図-10, 図-11 である。また図-12 には L3 における水平流速の鉛直分布を 1 周期間にわたり比較した。これらの図によれば、計算では正の流速は過大評価され、負の流速は過小評価されている。これは水面と底面で生じる乱れの鉛直方向への輸送を無視したことによると思われる。

6. おわりに

本研究では砕波帯と遡上域の波の挙動の数値解析に用いられる強非線形 Boussinesq 型波動・乱流モデルを提案した。波の遡上や波高・平均水位の岸沖分布、水面波形や流速分布等に関して、本モデルを用いた数値計算の解と実験データとを比較することによって、モデルの妥当性が相当程度に検証された。乱流モデルの精緻化や平面波浪場への適用が今後の課題である。

参考文献

石井敏雄・磯部雅彦・渡辺 晃 (1993): 非定常緩勾配不規則波動方程式における境界条件の改良と実用化の試み, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 31-35.  
 大山 巧・喜岡 渉・多田彰秀 (1993): 非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 11-15.

Arts, J. G. A. (1994): Breaking wave propagation model based on the turbulent eddy viscosity concept and the Boussinesq equations, New Zealand J. Marine and Freshwater Res., Vol. 28, pp. 317-321.  
 Carrier, G. F. and H. P. Greenspan (1985): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J. Fluid Mech., Vol. 4, pp. 97-109.  
 Cox, D. T., N. Kobayashi and A. Okayasu (1995): Experimental and numerical modeling of surf zone hydrodynamics, Res. Report No. CARC 95-07, Center for Applied Coastal Research, Univ of Delaware.  
 Karambas, Th. V. and C. Koutitas (1992): A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations, Coastal Eng., Vol 18, No. 1, pp.1-19.  
 Nwogu, O. (1993): An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 119, No. 6, pp. 618-638.  
 Nwogu, O. (1996): Numerical prediction of breaking waves and currents with a Boussinesq model, Proc. 25th ICCE, pp. 4807-4819.  
 Synolakis, C. E. (1987): The run-up of solitary waves, J. Fluid Mech., Vol. 185, pp. 523-545.  
 Wei G. and J. Kirby (1995): A time dependent numerical code for the extended Boussinesq equations, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 121, No. 5, pp. 251-261.  
 Wei, G., T. J. Kirby, S. Grilli and R. Subramanya (1995): A fully nonlinear Boussinesq model for the surface waves, Part 1, Highly nonlinear unsteady waves, J. Fluid Mech., Vol. 294, pp.71-92.  
 Zelt J. A. (1991): The runup of nonbreaking and breaking solitary waves, Coastal Eng., Vol. 15, No. 3, pp. 205-246.