

# 鉛直積分型 Reynolds 方程式による碎波時流体力評価

大山 巧\*・石原 孟\*\*・灘岡和夫\*\*\*

## 1. はじめに

近年, 碎波帯内の水理現象に対する実用レベルでのモデル化が活発に行われている。従来は波動方程式に碎波減衰項を加えた形の簡易モデルが主流であったのに対して, Reynolds 応力を用いた碎波による運動量拡散の評価(例えば, 安田ら, 1991; 柴山ら, 1995), surface roller に基づく過剰運動量の導入 (Schäffer et al., 1993), さらに最近では一般性を有する碎波判定法 (灘岡ら, 1996) とともに乱流モデルを組み込んだ解析法の開発などが試みられている (Nwogu, 1996; 灘岡・大野, 1997; 有川・磯部, 1998)。これらのモデルにより, 碎波によるエネルギー逸散の評価のみならず, 碎波帯内における時空間波形の再現や平均水位変化の予測が実用レベルで可能になりつつある。

これに対して, 碎波帯内の海岸構造物に作用する流体力の評価については, 依然として模型実験に頼らざるを得ない状況にある。既存の碎波変形解析法では主に進行波型碎波のみがモデル化の対象となっていたが, 構造物に作用する流体力を評価するためには, 重複波を含めた重合波動場での碎波現象に対するモデル化が必要となる。そこで本論では, 重複波型の碎波も取り扱えるなどの点で改良を加えた新たなモデルを開発するとともに, 碎波時の流体力評価に対する適用性を論じる。なお, ここでは問題を簡素化するために, 開境界処理が必要な海岸波浪場ではなく, スロッシング問題を検討の対象とした。

## 2. モデル開発上の基本的考え方と仮定

本研究ではモデル開発にあたり, 1) 実用性を重視しつつも計算精度としては流体力波形が再現できるレベルにあること, 2) 重複波を含めた種々の碎波形態に適用可能であることを念頭に置いた。既存の解析法の多くは, 流体の非回転運動を仮定した波動方程式に拡散項が付加された便宜的な基礎式に基づくものであるが, ここでは回

転性流体運動も考慮できる鉛直積分型の Reynolds 方程式を支配方程式とした。ただし, モデル化を簡略にするために以下の仮定を導入した。すなわち, 1) 波動場として弱非線形性と弱分散性を仮定し, Boussinesq 型の長波近似を適用する。また底面に関しては緩勾配を仮定する。2) 碎波による運動量拡散については粘性表現を適用する。3) 乱流モデルとして 1 方程式モデルを用い, 乱流エネルギーと渦動粘性係数については鉛直平均値で代表させる。これらは単にモデルの実用性を重視して設定した仮定であり, これらの仮定を用いないバージョンについても以下の定式化を拡張することにより開発が可能である。

## 3. 鉛直積分型 Reynolds 方程式モデル

### (1) Boussinesq 型近似に基づく支配方程式の無次元化

断面 2 次元 ( $x-z$ ) 平面内における流体運動を考える。まず, 座標系および変数に関して, 以下のような Boussinesq 型の無次元化を行う。

$$\left. \begin{aligned} (x, z, t) &= \left( \frac{x'}{l}, \frac{z'}{h_0}, \frac{\sqrt{g h_0}}{l} t' \right) \\ (u, w) &= \left( \frac{h_0}{a_0 \sqrt{g h_0}} u', \frac{h_0^2}{a_0 l \sqrt{g h_0}} w' \right) \\ \eta &= \frac{\eta'}{a_0}, h = \frac{h'}{h_0}, p = \frac{p'}{\rho g a_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

ただし,  $x, z$ : 水平および鉛直座標 ( $z$  は静水面を原点とした鉛直上向きの座標),  $u, w$ : 水平および鉛直流速,  $p$ : 圧力,  $\eta$ : 水面変動量,  $h$ : 水深,  $\rho$ : 流体密度,  $l, h_0$ : 水平および鉛直方向の長さスケール,  $a_0$ : 波高スケールであり, 「 $'$ 」は次元量を表す。また, 波の非線形性と分散性に関して以下のパラメータを定義しておく。

$$\varepsilon \equiv a_0/h_0, \mu \equiv h_0/l \dots \dots \dots (2)$$

碎波による運動量拡散を Reynolds 応力で表現すれば, 流体運動の支配方程式は以下のように表される。

$$\mu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\mu^2} w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + M_x \dots \dots \dots (4)$$

\* 正会員 工博 沼水建設(株)技術研究所  
\*\* 工博 沼水建設(株)技術研究所  
\*\*\* フェロー 工博 東京工業大学大学院教授 情報理工学研究所

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\mu^2} w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial z} + M_z \dots (5)$$

$$M_x = -\frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial x} + 2\varepsilon^{1/2} \mu \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\varepsilon^{1/2}}{\mu} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \dots (6)$$

$$M_z = -\frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial z} + \varepsilon^{1/2} \mu \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - 2 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} \right) \dots (7)$$

$$\sigma_{xx} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \dots (8)$$

ここで、法線応力に関して  $\sigma_{zz} = -\sigma'_{xx}$  を式(7)に導入している。また、 $K$  および  $\nu_t$  は水深平均の乱流エネルギーと渦動粘性係数であり、次のように無次元化している。

$$K = \frac{K'}{g a_0}, \quad \nu_t = \frac{\nu'_t}{h_0 \sqrt{g a_0}} \dots (9)$$

自由表面での力学的条件、運動学的条件、および底面での不透過条件は以下のように与えられる。

$$p = 0 \quad (z = \varepsilon \eta) \dots (10)$$

$$w = \mu^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \mu^2 u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (z = \varepsilon \eta) \dots (11)$$

$$w = -\mu^2 u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (z = -h) \dots (12)$$

連続式(3)を  $-h$  から  $z$  まで積分し、底面での不透過条件式(12)を代入すると、 $w$  は次式で表される。

$$w = -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz \dots (13)$$

また、鉛直方向の運動方程式(5)を  $z$  から  $\varepsilon \eta$  まで積分し、自由表面の力学的条件式(10)を代入するとともに、上述の Boussinesq 型近似などの仮定を導入すると、圧力  $p$  は以下のように与えられる。

$$p = \eta - \frac{z}{\varepsilon} - \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\varepsilon \eta} \left[ \int_{-h}^z \frac{\partial u}{\partial t} dz \right] dz + \varepsilon^{1/2} \mu \int_z^{\varepsilon \eta} \left( 2 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz \dots (14)$$

### (3) 多成分連成法に基づく支配方程式の鉛直積分

区間  $[0, 1]$  で直交関係を持つ Legendre 多項式を用いて、 $u$  を以下のように多成分連成形で表現しておく。

$$u(x, z, t) = \sum_{m=1}^M F_m(z; h) U_m(x, t) \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(z; h) &= 1 \\ F_2(z; h) &= 1 - 2(1 + z/h) \\ F_3(z; h) &= 1 - 6(1 + z/h) + 6(1 + z/h)^2 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

ここで、 $M$  は採用する鉛直依存関数の数である。

式(15)を式(13)、(14)に代入し、底面に関する緩勾配仮定を適用すると、 $w$  と  $p$  は以下のように表される。

$$w = -\mu^2 \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial x} \{ G_m U_m \} = -\mu^2 \sum_{m=1}^M G_m \frac{\partial U_m}{\partial x} \dots (17)$$

$$p \approx \eta - \frac{z}{\varepsilon} - \mu^2 \sum_{m=1}^M H_m \frac{\partial^2 U_m}{\partial x \partial t} + \varepsilon^{1/2} \mu \sum_{m=1}^M (F_{m0} - F_m) \left\{ 2 \nu_t \frac{\partial U_m}{\partial x} - \frac{\partial (\nu_t U_m)}{\partial x} \right\} \dots (18)$$

$$G_m(z; h) \equiv \int_{-h}^z F_m dz, \quad H_m(z; h) \equiv \int_z^0 G_m dz \dots (19)$$

ただし、 $F_{m0}$  は  $z=0$  での  $F_m$  の値を表す。

連続式(3)を  $-h$  から  $\varepsilon \eta$  まで積分し、自由表面と底面の運動学的条件式(11)、(12)および式(15)を代入すると、鉛直積分型の連続式として次式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{-h}^{\varepsilon \eta} F_m dz U_m \right\} = 0 \dots (20)$$

また、水平方向の運動方程式(4)については、多成分連成表現式(15)、(17)、(18)を代入した後、Galerkin法に基づいて鉛直方向に積分する。これらの手順により得られた鉛直積分型方程式に弱非線形仮定を適用し、次元量を用いて表すと以下ようになる(「'」は省略)。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^M \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{ S[F_m] U_m \} + F_{m0} \frac{\partial (\eta U_m)}{\partial x} \right] = 0 \dots (21)$$

$$g S[F_i] \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{m=1}^M \left\{ S[F_m F_i] \frac{\partial U_m}{\partial t} - S[H_m F_i] \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2 \partial t} \right\} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M S \left[ \left( F_m F_n - \frac{\partial F_m}{\partial z} G_n \right) F_i \right] U_m \frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{2}{3} S[F_i] \frac{\partial K}{\partial x} + 2 \sum_{m=1}^M S[(F_{m0} - 2F_m) F_i] \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t \frac{\partial U_m}{\partial x} \right) - \sum_{m=1}^M S[(F_{m0} - F_m) F_i] \frac{\partial^2 (\nu_t U_m)}{\partial x^2} + F_{iB} \tau_B + \nu_t \sum_{m=1}^M \left\{ S \left[ \frac{\partial F_m}{\partial z} \frac{\partial F_i}{\partial z} \right] U_m - S \left[ G_m \frac{\partial F_i}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots (22)$$

$$S[\Theta(z)] \equiv \int_{-h}^0 \Theta(z) dz \dots (23)$$

ここで、 $F_{iB}$  は  $z=-h$  での  $F_i$ 、 $\tau_B$  は底面せん断応力であり摩擦係数  $C_f$  と底面水平流速  $u_b$  を用いて次式で与えた。

$$\tau_B = C_f u_b |u_b| \dots (24)$$

## 4. 乱れエネルギーの生成項の評価

水深平均された乱れエネルギーの生成・移流・消散・拡散過程については、灘岡・大野(1997)と同様に、以下の1方程式乱流モデルを用いた。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial K}{\partial x} = P_k - \varepsilon^* + D_k \dots (25)$$

$$\nu_t = K^{1/2} l^*$$

$$\varepsilon^* = c^* \frac{K^{3/2}}{l^*} \dots (27)$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 $P_k$ ,  $\epsilon^*$ ,  $D_k$  はそれぞれ乱れの生成項、逸散項、拡散項、 $\bar{u}$  は水深平均の水平流速、 $l^*$  は乱れの長さスケール(ここでは  $l^* = 0.2h$  と設定)、 $c^*$  と  $\sigma_k$  は定数でありそれぞれ 0.18, 1.0 とした。

砕波のモデル化で重要となる乱れエネルギー生成項  $P_k$  については、砕波に伴う bore 前面の大規模渦により生成される成分  $P_B$  と流体のせん断変形による成分  $P_I$  の和として次のように評価した。

$$P_k = P_B + P_I \dots\dots\dots (29)$$

まず、 $P_I$  については、厳密には流れを回転成分と非回転成分に分離した上で評価すべきであろうが、ここでは単純に、一般的な以下の評価式を用いた。

$$P_I = \nu_t \int_{-h}^0 \left\{ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dz \dots\dots\dots (30)$$

一方、 $P_B$  については、ランキン渦を用いてモデル化を行うと(灘岡ら, 1997)、大規模渦として生成される単位時間あたりのエネルギー  $E_B$  が以下のように算定できる。

$$E_B \approx \frac{\rho \Gamma_0^3}{16(\pi r_0)^2} \dots\dots\dots (31)$$

ただし、 $\Gamma_0$  は循環、 $r_0$  は渦の半径である。ここでは、このエネルギーに対応した生成項を砕波点  $x = x_B$  で与えることとし、 $P_B$  を以下のように評価する。

$$P_B = \delta(x - x_B) \frac{E_B}{\rho(h + \eta)} \dots\dots\dots (32)$$

ただし、 $\delta$  はディラックのデルタ関数である。

式 (31) における循環  $\Gamma_0$  に関して、灘岡ら (1997) は進行波型の砕波を対象に波速を用いた評価式を与えているが、重合波動場に対して単一の波速を設定することは不可能であること、大規模渦の循環はむしろ局所的な流速に依存すると考えられることから、ここでは、波速ではなく砕波点波峰での水平流速  $u_c$  を用いて次のように表した。

$$\Gamma_0 = \pi r_0 |u_c| \dots\dots\dots (33)$$

ここで、重複波型の砕波形態を考えてみる。重複波では、まず、波峰どうしの衝突あるいは壁面へのはい上がりにより水面変動量が増大し、砕波限界を越えると水塊の一部が上方に放り出される。乱れエネルギーは、主にその水塊の落下やはいあがった水の戻り流れに伴って生成されるものと考えられる。すなわち、重複波型の砕波では進行波型砕波とは異なり大規模渦は形成されず、乱れエネルギーの生成過程は主に内部せん断 ( $P_I$ ) によりモデル化すべきであろう。完全重複波の波峰では水平水粒子速度が 0 であるため、式 (33) のように循環を見積もつ

ておけば重複波型砕波における  $P_B$  は 0 となり、物理的な整合性が保たれることになる。式 (31), (33) を式 (32) に代入することにより次式を得る。

$$P_B = \delta(x - x_B) \frac{\pi r_0 |u_c|^3}{16(h + \eta)} \dots\dots\dots (34)$$

次に渦のスケール  $r_0$  の評価について述べる。Tallent ら (1990) は、砕波による大規模渦のスケールを実験により求めている。これによれば、砕波波高に比べて波長が十分に長い長波領域では、渦の直径が砕波波高の 80% 程度となり、波長が短くなるにつれて渦のスケールが小さくなる。このような渦スケールの特性については今後の検討を要するが、ここでは長波近似を前提としていることから渦の直径と砕波波高の比を 0.8 程度とし、さらに砕波時には波峰高さ ( $\eta$ ) と波高 ( $H$ ) の比も同程度 (80% 程度) になるものと考え、半径  $r_0$  を以下のように設定した。

$$r_0 = 0.5\eta \dots\dots\dots (35)$$

なお、砕波点の検出には、水面上の圧力勾配に基づく判定法(灘岡ら, 1996)を適用した。

5. 模型振動実験との比較

(1) 実験の諸元および数値計算の方法

図-1 に示すような長さが 60 cm、奥行き ( $B$ ) が 35 cm の矩形断面容器を用いて、スロッシング実験を行った。実験では、静止状態から定常振動応答(流体力の周期的な応答)が得られるまで正弦波状に容器を加振した。水深は 3 cm で一定とし、加振周波数  $f$  および加振振幅  $D$  を変化させた。容器に作用する流体力  $F_x$  の計測には、図-1 に示される 2 個のロードセルを用いた。ロードセル B は容器と同じ重さ ( $M_T$ ) のおもりにかかる慣性力  $F_B (= M_T a_x, a_x$ : 加振加速度) を測定するためのものであり、これを容器に取り付けたロードセル A から得られる力  $F_A$  から差し引くことにより流体力  $F_x$  を求めた。

一方、数値計算では、運動方程式 (22) の右辺に外力項  $a_x S[F]$  を加え、容器両側の壁面位置で不透過条件  $U_m = 0$  を与えた。連続式 (21)、運動方程式 (22) および乱れエネルギーの輸送方程式 (25) の空間的な離散化には Galerkin 型の有限要素法を採用し、時間方向には中央差

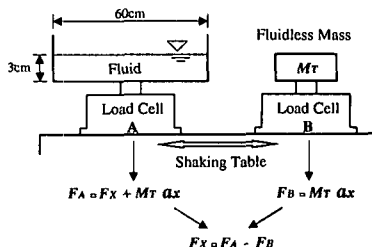


図-1 スロッシング流体力の測定方法

分を用いた。また、鉛直依存関数の数 $M$ は3と設定した。

## (2) 碎波時流体力の比較

加振振幅 $D=5\text{ mm}$ および $20\text{ mm}$ の場合について、流体力波形に含まれる基本周波数成分(1st), 3倍周波数成分(3rd), および5倍周波数成分(5th)の振幅 $|F_k|$ の周波数特性を図-2に示す。図中, $f_0$ は線形理論に基づく1次モードの固有周波数である。

数値計算によれば, $D=5\text{ mm}$ の場合は図に示される全周波数帯域で非碎波であるのに対して, $D=20\text{ mm}$ では $0.84 \leq f/f_0 \leq 1.35$ で碎波が検出された。また、いずれのケースでも流体力振幅が不連続に変化する周波数 $f_p$ が存在し( $D=5\text{ mm}$ ,  $20\text{ mm}$ に対して $f_p/f=1.14$ ,  $1.35$ ),  $f > f_p$ では高調波成分をほとんど含まない線形的な応答が得られている。模型実験においても数値解析と同様な不連続性が現れ、その振動数 $f_p$ の値は計算結果にかなり近い( $D=5\text{ mm}$ ,  $20\text{ mm}$ に対して $f_p/f=1.12$ ,  $1.34$ )。また、加振振幅が大きいほど $f_p$ が高周波数側にずれるハードニング型の振動特性は、非碎波の非線形理論によりすでに示されているが(例えば, Lepelletier・Raichlen, 1988), 碎波領域でも同様な性質を有している。

非碎波の $D=5\text{ mm}$ に対する実験結果(図-2(a))では、振動数 $f$ が $f_p$ よりも小さい周波数帯域において、各成分の振幅はやや複雑な変化を示し、5倍周波数成分の振幅が3倍周波数成分を上回る場合もある。このような現象は弱い非線形共鳴によるものと考えられるが、波が碎ける $D=20\text{ mm}$ の実験結果(図-2(b))ではこのような共鳴がエネルギー逸散に伴ってかなり抑えられ、非碎波の場合に比べて各成分振幅は比較的緩やかに変化している。 $D=20\text{ mm}$ のケースにおける碎波周波数帯域での解析結果は、基本周波数成分の振幅に対して若干過小

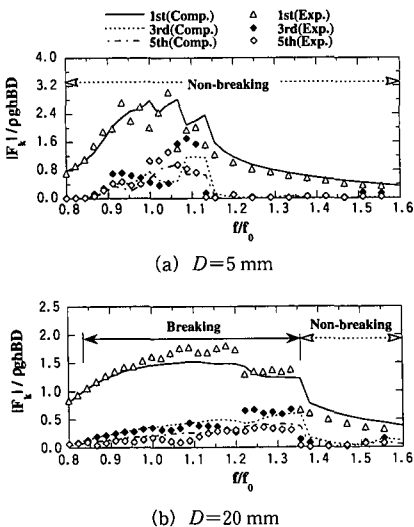


図-2 流体力応答波形における成分波の周波数特性

評価となるものの、高調波成分に対しては良好な一致を示している。なお、数値解析における1周波数あたりの計算時間はパソコンで数分であり、計算効率は非常に高い。

次に, $D=20\text{ mm}$ の場合における碎波時流体力波形に関して, $f/f_0=1.0$ ,  $1.11$ ,  $1.29$ に対する結果の比較を図-3に示す。本解析法では、実用性を重視して、弱非線形仮定などを導入するとともに、碎波現象についても空気の巻き込みの影響などを無視した簡易なモデル化を行っているが、図-3に示されるように、流体力波形に関する解析結果は実験結果と比較的良好一致している。

図-3における $f/f_0=1.0$ および $1.29$ の波形を比べてみると、前者がbluntな波形を示しているのに対して、後者では先鋭型の衝撃的な流体力が作用しているのがわかる。図-4, 5は、これらの振動数における水面変動量と乱れエネルギーの時空間変化の解析結果を示したものである。 $f/f_0=1.0$ の場合、波が容器内を段波状に進行し、bore前面の渦により常時乱れエネルギーが生成され、それとともに波動エネルギーの逸散も顕著である。これに対して $f/f_0=1.29$ のケースでは、容器側壁の近傍に達するまでは波は非碎波の状態で孤立波的に伝播し、側壁の前面で碎波が起きている。この場合、波峰が側壁に達した時点では波動エネルギーが十分に消散されておらず、衝撃的で大きな流体力が作用する。これらの結果は、振動実験における実際の状況を良好に再現している。

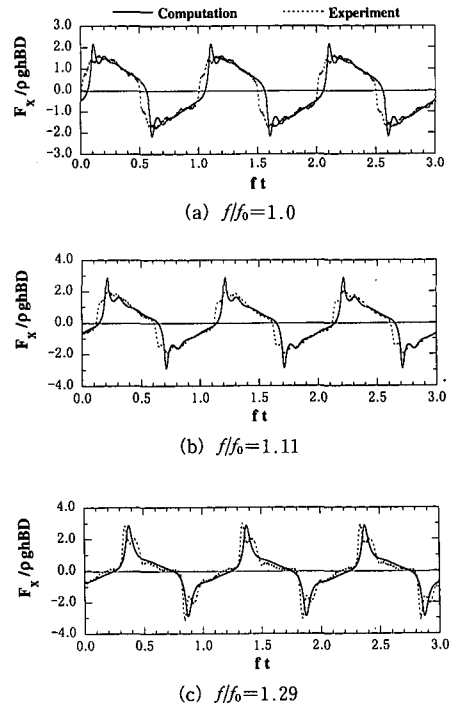
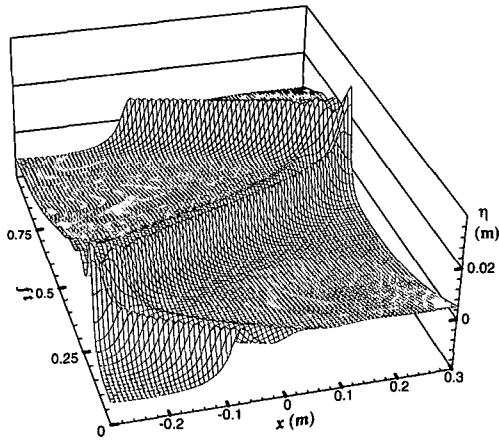
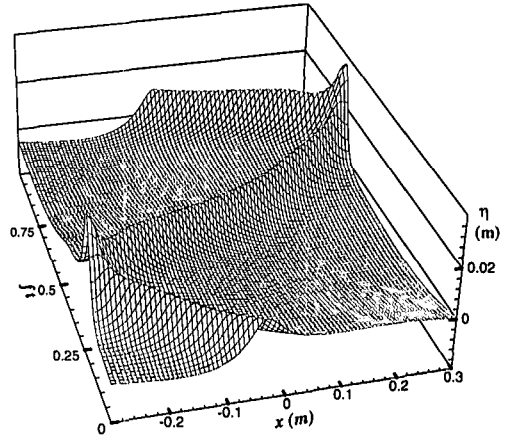


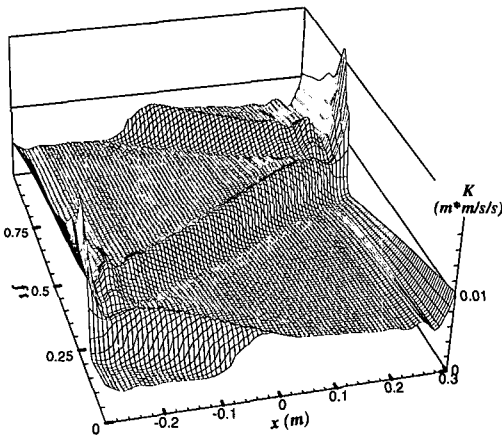
図-3 流体力波形の比較 ( $D=20\text{ mm}$ )



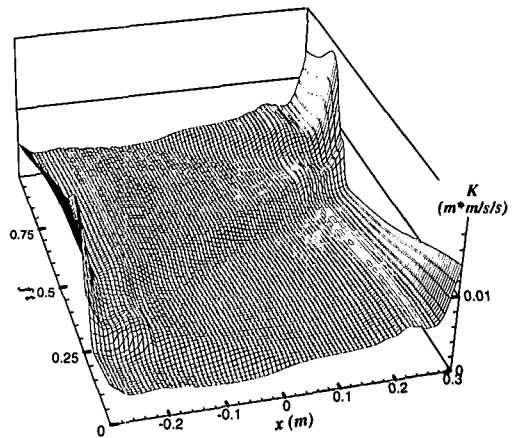
(a) 水面変動量



(a) 水面変動量



(b) 乱れエネルギー

図-4 水面変動量と乱れエネルギーの時空間変化  
( $f/f_0=1.0$ ,  $D=20$  mm)

(b) 乱れエネルギー

図-5 水面変動量と乱れエネルギーの時空間変化  
( $f/f_0=1.29$ ,  $D=20$  mm)

## 6. おわりに

多成分連成法に基づく鉛直積分型 Reynolds 方程式と乱流モデルを連結させた砕波変形解析法を開発し、スロッシング問題に対する模型振動実験との比較により、砕波時の流体力評価に対する適用性を検討した。本解析法では、既存の砕波モデルに改良が加えられており、重合波動場での砕波を取り扱うことも基本的に可能となっている。模型振動実験で確認された砕波形態の差異およびそれに伴う流体力波形の変化は本モデルによりほぼ良好に再現され、計算効率も非常に高いことから、本モデルが実用的な流体力評価モデルとなり得ることが示された。

## 参考文献

- 有川太郎・磯部雅彦 (1998): 非線形緩勾配方程式を用いた砕波モデルの構築, 海岸工学論文集, 第45巻, pp. 141-145.  
 柴山知也・Nguyen T. D.・岡安章夫 (1995): 乱流方程式を用い

た砕波帯内流速場・圧力場の計算法の検証, 海岸工学論文集, 第42巻, pp. 21-30.

澁岡和夫・大野修史 (1997): 水深積分型乱流エネルギー輸送方程式を連結させた砕波帯内波動場モデルの提案, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 106-110.

澁岡和夫・大野修史・栗原 礼 (1996): 波動場の力学状態に基づく砕波過程の解析と砕波条件, 海岸工学論文集, 第43巻, pp. 81-85.

安田孝志・西尾保之・山本康裕 (1991): 砕波帯における現地波浪の拡散係数について, 海岸工学論文集, 第38巻, pp. 66-70.

Lepelletier, G. and F. Raichlen (1988): Nonlinear oscillations in rectangular tanks, Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 114, No. 1, pp. 1-23.

Nwogu, O. G. (1990): Numerical prediction of breaking waves and currents with a Boussinesq model, Proc. 25 th ICCE, Chapt. 374, pp. 4807-4820.

Schäffer, H. A., P. A. Madsen and R. Deigaard (1993): A Boussinesq model for waves breaking in shallow water, Coastal Eng., Vol. 20, pp. 185-202.

Tallent, J. R., T. Yamashita and Y. Tsuchiya (1990): Transformation characteristics of breaking water waves, In: Water Wave Kinematics, Kluwer Academic Pub., pp. 509-523.