

開領域における波動場解析のための新しい無限要素

筒井 茂 明*

1. 緒 言

開領域での波動場解析のために種々のモデル方程式が提案されているが、適用に当たっては無限遠での境界条件の処理が重要である。ただし、遠方場における散乱波の減衰モードは判っており、遠方場での境界条件の処理にはこの特性が利用される。

緩勾配方程式に対して有限要素法 (FEM) を適用する際には、解析対象海域の外方に仮想境界を設定し、外部海域での水深は一定と仮定する。その上で、(1)内部領域での波を FEM、外部領域での波を他の方法で定式化し、両者を仮想境界上で接続するハイブリッド法、(2)領域全体を FEM で統一的处理する方法などが用いられる。

前者の 1 つである境界解を用いる方法 (HFEM) (Chen・Mei, 1975) は簡便で効率的な計算法であるが、境界解を構成する高次の Hankel 関数が対角成分に位置する特異な行列が生じる。ただし、その逆行列を求めることができるので、線形問題の場合にはこの問題点を避けることができる (Tsutsui, 1990)。しかし、沿岸での非線形な波浪変形を記述するためのモデル方程式 (筒井・大木, 1998) の FEM による離散化式は、各 Fourier モードごとにブロック化された非線形連立方程式であり、疎で非対称な複素係数行列を持っている。したがって、有限要素解析を開領域での非線形波動へ拡張する場合、HFEM はかなりの困難を伴うであろう。このことから、本研究では FEM により波動場を統一的处理することとし、その手法として無限要素を採用する。

代表的な無限要素 (Zienkiewicz ら, 1985) はアイソパラメトリックな写像であり、用いられる無限写像の特性として、要素積分の被積分関数に特異性が現れ、数値計算に工夫を要する。また、散乱波の減衰特性をより厳密に満たすため、無限要素に対する散乱中心を移動・調整する必要もある (Bettes ら, 1984)。これらの特性は数値処理上好ましくなく、早急に解決することが望まれる。

本研究では、新たな無限要素の開発に当たり、(1)要素積分の被積分関数中の特異性の除去、(2)仮想境界を

構成する内部要素との簡便な接続を念頭に置く。その上で、写像に関する新しい考え (菊池・岡部, 1986) に基づき Helmholtz 方程式に対する無限要素を開発・提案し、数値計算例によりその有用性を示す。

2. 波動方程式に対する無限要素を用いた弱形式

解析対象海域を、図-1 のように、仮想境界 Γ_1 により領域 Ω_1 および Ω_2 に分割する。内部領域 Ω_1 での水深は変化し、そこには海岸線や構造物などの境界 Γ_B あるいは水深不連続部 Γ_D が存在する。外部領域 Ω_2 での水深は一定と仮定し、無限要素はこの外部領域に適用される。

本章では、代表水深 h_0^* および重力加速度 g により定められる基準長 h_0^*/g 、時間 $\sqrt{h_0^*/g}$ 、速度 $\sqrt{gh_0^*}$ により全ての物理量を無次元化する。静水面に水平座標 (x, y) の原点を置き、鉛直上方に z 軸を採る。 (ζ, η) : 領域 Ω_1, Ω_2 での水面変動量、 η^c : 入射波および反射波の幾何光学的な波、 η^s : 散乱波、 c : 波速、 c_g : 群速度、 ω : 周波数とする。支配方程式および境界条件は次の通りである。

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \zeta_n) + \omega^2 (c_g/c) \zeta_n = Q \quad \text{領域 } \Omega_1 \text{ 内} \dots (1)$$

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \eta^s) + \omega^2 (c_g/c) \eta^s = 0 \quad \text{領域 } \Omega_2 \text{ 内} \dots (2)$$

$$n_1 \cdot \nabla \zeta_n + n_2 \cdot \nabla (\eta^c + \eta^s) = 0 \quad \text{境界 } \Gamma_1 \text{ 上} \dots (3.1)$$

$$\zeta_n = \eta^c + \eta^s \quad \text{境界 } \Gamma_1 \text{ 上} \dots (3.2)$$

$$n_B \cdot \nabla \zeta_n = B \zeta_n \quad \text{境界 } \Gamma_B \text{ 上} \dots (4)$$

$$\left[cc_g n_D \cdot \nabla \zeta_n \right]_{\zeta_n}^{\zeta_n^*} = D \zeta_n \quad \text{境界 } \Gamma_D \text{ 上} \dots (5)$$

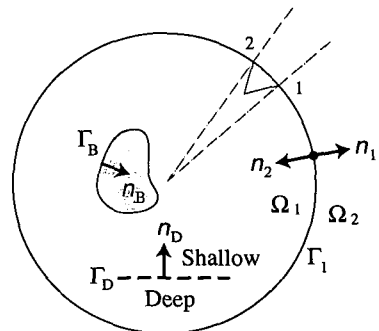


図-1 解析対象海域と定義

* 正会員 工博 琉球大学教授 工学部環境建設工学科

無限遠での Sommerfeld の放射条件 ……(6) ただし、 $\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $n=\pm 1, \pm 2, \dots$ であり、 (n_1, n_2) , n_B, n_D はそれぞれ境界 $\Gamma_1, \Gamma_B, \Gamma_D$ での外向き法線を表す。式(1)は n 次成分波に対する非線形波動方程式(筒井・大木, 1998)であり、右辺の Q は高次成分波を含む非線形項を表す。反射境界条件式(4)における B は波の反射率の関数である(Tsutsui・Lewis, 1992)。水深不連続部での条件式(5)は水深の深い側より浅い側へ波が伝播すると仮定して適用し(Tsutsui・Zamami, 1993), ξ_0 は水深不連続部の位置, D は無次元係数である。式(1)-(6)において、 Q を除く波動量は全て n 次成分波に対するものであるが、簡単のため、 ζ_n 以外の添字 n は省略されている。

式(1), (2), (3.1), (4), (5)に対する弱形式は、 v_1 を形状関数として、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_1} \{cc_0 \nabla v_1 \cdot \nabla \zeta_n - v_1 \omega^2 (c_0/c) \zeta_n + Q\} d\Omega_1 \\ & + \iint_{\Omega_2} \{cc_0 \nabla v_1 \cdot \nabla \eta^s - v_1 \omega^2 (c_0/c) \eta^s\} d\Omega_2 \\ & - \int_{\Gamma_B} v_1 cc_0 B \zeta_n ds - \int_{\Gamma_D} v_1 D \zeta_n ds \\ & = \int_{\Gamma_1} v_1 cc_0 n_1 \cdot \nabla \eta^c ds \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

式(7)の右辺は既知量であり、境界 Γ_1 における外力として作用する。ここで、式(7)の各項を離散化して得られる要素行列をそれぞれ $\{K\}$, $\{K^\infty\}$, $\{K_B\}$, $\{K_D\}$, $\{q\}$ とすると、次の連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_1} \{K\} \{\zeta_n\} + \sum_{\Omega_2} \{K^\infty\} \{\eta^s\} \\ & - \sum_{\Gamma_B} \{K_B\} \{\zeta_n\} - \sum_{\Gamma_D} \{K_D\} \{\zeta_n\} = \sum_{\Gamma_1} \{q\} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

残された境界条件の中、無限遠での境界条件式(6)は、外部領域 Ω_2 での無限要素による定式化の際に、近似的ではあるが自動的に満たされる。次に、支配方程式(2)は外部領域 Ω_2 における散乱波のみに対するものであるから、式(8)においては境界 Γ_1 上での波動量が不連続となっている。そこで、無限要素の要素行列 $\{K^\infty\}$ および境界 Γ_1 上の節点における幾何光学的な波 $\{\eta^c\}$ より $\{K^\infty\} \{\eta^c\}$ なる量を求め、式(8)の両辺の対応する節点に付加することにより境界条件式(3.2)が満たされる。

行列 $\{K\}$ は線形問題では対称であるが、非線形な場合には非対角ブロックが非対称となる(筒井・大木, 1998)。HFEMの困難はここに生じるが、無限要素を用いるとこれを回避することができる。

3. 可積分型の新しい無限要素

ここでは、写像に関する新しい考え(菊池・岡部, 1986)に基づき Helmholtz 方程式に対する無限要素を導く。その概念は図-2に示す通りである。まず、無限要素に対する

補要素を定義し、対応する正規 (ξ^*, η^*) 系を定め、この系により無限要素を表す。一方で、無限要素に対する正規 (ξ, η) 系を定める。ここで、所要の減衰モードが再現可能なように、両正規化写像系間の変換式を求める。さらに、散乱波の振動特性を持つように物理変数に対する形状関数を補正する。

従来のアイソパラメトリックな無限要素(Zienkiewiczら, 1985)に対して、本手法で得られる無限要素では、補要素を媒介とした空間座標と物理変数に対して異なる2つの正規化写像系が導入される点に特徴がある。

図-3に示すように2領域 Ω_1, Ω_2 の仮想境界 Γ_1 上における内部要素の2節点を1, 2とすると、無限要素 Ω_f はこの有限辺と放射状の直線とで構成される。放射状の2直線の交点を中心点0と呼び、三角形012を無限要素に対する補要素 Ω_f^c と定義する。中心点 (x_0, y_0) からの距離を r とし、物理変数 ϕ が外方で r^{-m} の形で減衰することが判っているものとする。ただし、 m は正の実数で、Helmholtz 方程式に対しては $m=1/2$ である。

図-4(a)に示す正規 (ξ^*, η^*) 系における四辺形1次要素に対する形状関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= (1-\xi^*)(1-\eta^*)/4 \\ N_1 &= (1+\xi^*)(1-\eta^*)/4 \\ N_2 &= (1+\xi^*)(1+\eta^*)/4 \\ N_{00} &= (1-\xi^*)(1+\eta^*)/4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

上式において、辺 $\xi^* = -1$ 上の節点 0_0 を補要素 Ω_f^c の頂点0に対応するように縮退させると、補要素 Ω_f^c に対する正規系は次式となる。

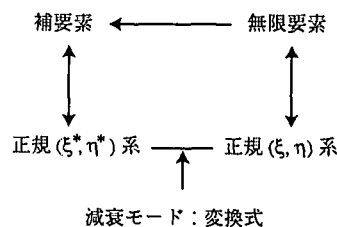


図-2 無限要素展開の概念

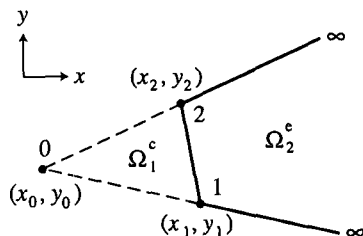


図-3 無限要素とその補要素

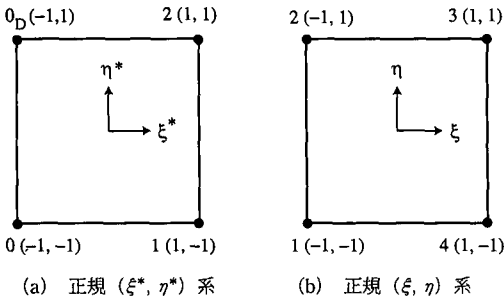


図-4 2つの正規化写像系

$$\left. \begin{aligned} x-x_0 &= \sum_{i=1}^2 (x_i-x_0)M_i \\ y-y_0 &= \sum_{i=1}^2 (y_i-y_0)M_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= N_1 = (1+\xi^*)(1-\eta^*)/4 \\ M_2 &= N_2 = (1+\xi^*)(1+\eta^*)/4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $M_0=N_0+N_{0D}$ 、 $M_0+M_1+M_2=1$ なる関係式が用いられている。補要素の2辺01, 02の長さを $r_i(i=1, 2)$ とすると、この2辺上($\eta^*=\pm 1$)での中心点からの距離 r は、写像(10)、(11)より $r/r_i=(1+\xi^*)/2$ で与えられる。

ここで、無次元距離として

$$\rho \equiv \frac{r}{r_i} = \frac{1}{2}(1+\xi^*) \dots\dots\dots (12)$$

を定義すると、無次元距離 ρ の性質が距離 r の性質に近いときには、無限要素が持つべき r^{-m} なる特性を ρ^{-m} のモードで代用させることができる。なお、補要素の中心点 $\xi^*=-1$ では $\rho=0$ 、辺 $\xi^*=1$ 上では $\rho=1$ となっている。

正規 (ξ^*, η^*) 系(10)、(11)を $\xi^* \ge 1$ へ適用することとすれば、無限要素は $\xi^*=[1, \infty]$ 、 $\eta^*=[-1, 1]$ として規定される。したがって、正規 $[-1, 1]$ 系へと変換する必要がある。

ここで、図-4(b)に示す正規 (ξ, η) 系を新たに導入し、無限要素をこの系に正規化できるものと仮定する。減衰性をもつ物理変数 ϕ を考えると、無限遠に相当する $\xi=1$ では $\phi_3=\phi_4=0$ であるから、試行関数 ϕ^h は次式で表される。

$$\phi^h = \phi_1 N_1(\xi, \eta) + \phi_2 N_2(\xi, \eta) \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ N_2 &= (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(13)、(14)において、 η のいかんに関わらず試行関数 ϕ^h が ρ^{-m} のモードを再現可能な条件は次式で与えられる。

$$\frac{1}{2}(1-\xi) = N_1 + N_2 = \rho^{-m} \dots\dots\dots (15)$$

無次元距離は辺 $\xi=-1$ 上で $\rho=1$ となり、正規 (ξ^*, η^*) 系の辺 $\xi^*=1$ と C_0 連続となっている。 $\xi=1$ は $\rho=\infty$ に対応する。

したがって、式(12)および(15)より ρ を消去すると、 ξ^* と ξ を結ぶ次の関係式が得られる。

$$\frac{1+\xi^*}{2} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \dots\dots\dots (16)$$

さらに、補要素 Ω_f とこの正規 (ξ, η) 系が $\xi=-1$ で C_0 連続となるためには次の条件式が必要である。

$$\eta^* = \eta \dots\dots\dots (17)$$

式(16)および(17)が (ξ^*, η^*) 系から (ξ, η) 系への変換式である。両式を式(11)に代入すると、空間座標に対する無限写像の形状関数は結局次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{1-\eta}{2} \\ M_2 &= \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{1+\eta}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

無限写像を与える式(10)、(18)により、中心点からの距離は次式で表される。

$$r = \bar{r}(\eta) \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \dots\dots\dots (19.1)$$

$$\left[\bar{r}(\eta) \right]^2 = \left\{ \Delta x_1(1-\eta)/2 + \Delta x_2(1+\eta)/2 \right\}^2 + \left\{ \Delta y_1(1-\eta)/2 + \Delta y_2(1+\eta)/2 \right\}^2 \dots\dots\dots (19.2)$$

ただし、 $\Delta x_i = x_i - x_0$ 、 $\Delta y_i = y_i - y_0 (i=1, 2)$ であり、 $\bar{r}(\eta)$ は中心点から仮想境界上の辺12までの距離を表す。したがって、式(14)において $(1-\xi)/2 = \{r/\bar{r}(\eta)\}^{-m}$ となるので、無限写像の式(10)、(18)の下で中心点から出る放射線においては、試行関数 ϕ^h に r^{-m} のモードが含まれている。

以上は単調に減衰する現象に対する議論であるが、波動問題においては、時間項を $\exp(i\omega t)$ と仮定すると、散乱波は $\exp(-i(kr - \omega t))$ に比例する振動特性を有する。ただし、 i : 虚数単位、 t : 時間、 k : 波数である。したがって、形状関数(14)には $\exp(-ikr)$ なる項を含める必要がある。 A を未知係数とすると、式(19)により形状関数 N_1 は次式とならねばならない。

$$N_1 = \frac{A}{4}(1-\xi)(1-\eta) \left\{ -ik\bar{r}(\eta) \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

仮想境界上 Γ_1 、すなわち $\xi=-1$ においては内外の波の位相差はゼロとなるべきである。さらに、節点1, 2が半径 r_0 の円弧上にあり、要素長が十分小さいと仮定されるときには、 $\bar{r}(\eta) \cong \text{const.} \equiv r_0$ と近似できる。したがって、これら2条件を考慮して係数 A を定めると、 $A = \exp(ikr_0)$ となり、形状関数 N_1 は次式で与えられる。

$$N_1 = \frac{A}{4}(1-\xi)(1-\eta) \cdot \exp\left\{-ikr_0\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}}\right\} \dots\dots\dots(21.1)$$

同様に、形状関数 N_2 は次式となる。

$$N_2 = \frac{A}{4}(1-\xi)(1+\eta) \cdot \exp\left\{-ikr_0\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}}\right\} \dots\dots\dots(21.2)$$

以上、無限写像を与える式 (10)、(18) および物理変数に対する形状関数 (21) により無限要素が構成される。無限写像の特徴として、そのヤコビアンが

$$|J| = \frac{\Delta}{2m} \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-1-\frac{2}{m}} \dots\dots\dots(22)$$

で与えられ η に無関係になるため、要素行列が陽に表示される。ただし、 Δ は補要素の面積である。また、この無限要素は、内部領域の要素形状とは無関係で、仮想境界 Γ 上の節点位置にのみ依存し 内部領域との接続が容易である。

4. 数値計算例

ここでは、一定水深域での円柱による波の散乱および長方形港湾の周波数応答を例に採り、新しい無限要素の適用性を検討する。用いる支配方程式は緩勾配方程式であり、有限要素網は3角形の線形要素を用いる。

4.1 円柱による波の散乱

計算条件は、 $kh=ka=2$ (h : 水深, a : 円柱の半径)、 $kr_0=4$ であり、円柱表面は完全反射壁とする。図-5 は円柱の周りの等波高線を示す。ただし、波は紙面の右側より入射している。上半円が理論解(田中, 1956)、下半円が無限要素を用いた FEM による数値解析結果である。図中の数値は入射波高に対する波高比 K を表す。円柱の背後に見られるように、局所的にはわずかな差異が認められるが、両者は全体として良好な一致を示している。

その詳細を見るため、図-6 には円柱沿いおよび外方の仮想境界円 Γ 上での水面変動量の実部および虚部の比較が示されている。縦軸は入射波高に対する波高比、横軸は偏角である。実線が理論解、○、+ はそれぞれ無限要素を用いた FEM、境界解を用いた HFEM(Chen・Mei, 1974) による計算結果である。本推算結果(○)は、理論解と比較すると、 $\theta > 160^\circ$ において最大 3-4% 程度過小評価となっている。この影響が図-5 の円柱背後での等波高線のわずかな差異として現れている。しかし、推算結果は十分な精度を有しており、HFEM による結果(+)との差異は 1% 以下である。

仮想境界円 Γ の設定位置の影響を調べるため、図-6 の場合と同様に $kh=ka=2$ であるが、解析領域を $kr_0=6$

と広く採った場合の仮想境界円上での水面変動量の実部および虚部の比較を行うと、図-7 が得られる。外円での波高の推算精度はやや向上しているが、誤差の程度は、全体として、 $kr_0=4$ の場合とほぼ同じである。

Helmholtz 方程式のグリーン関数である 0 次の Hankel 関数 $H_0(z)$ の漸近展開の主項による近似誤差は、 $z=4$ のとき絶対誤差で約 0.13%、相対誤差で 0.4% 程度である。また、 $z=2$ のときの両誤差は 1% 程度である。し

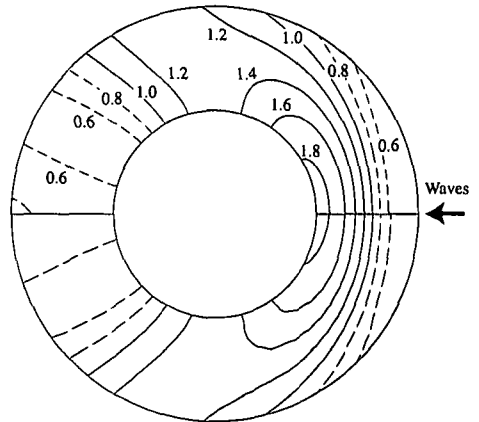


図-5 円柱の周りの等波高線: $kh=ka=2, kr_0=4$

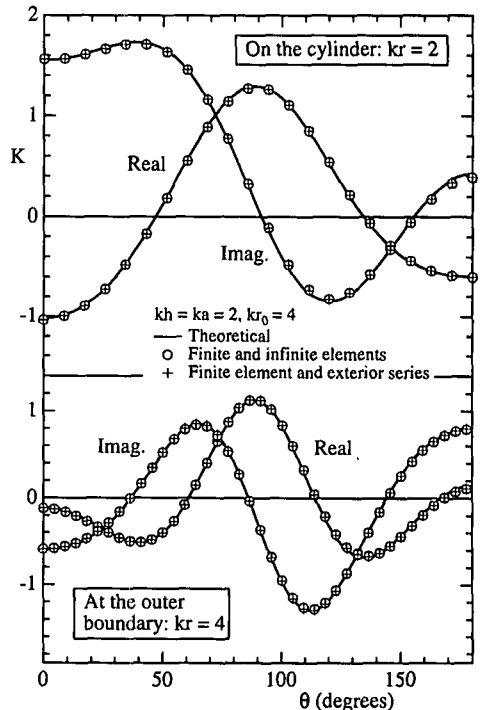


図-6 円柱沿いおよび仮想境界円上での水面変動量の实部および虚部: $kh=ka=2, kr_0=4$

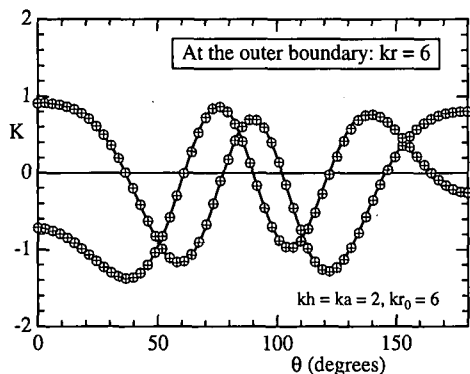


図-7 仮想境界円上での水面変動量の実部および虚部： $kh = ka = 2, kr_0 = 6$

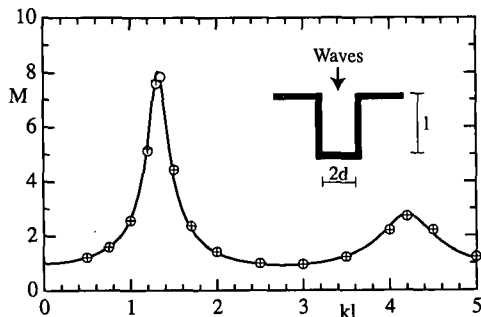


図-8 防波堤の無い長方形港湾での周波数応答

たがって、仮想境界円 Γ_1 の半径は $kr_0 \geq 2 \sim 4$ とすればよからう。ただし、一般的な場合には散乱源が複数となるので、仮想境界円の設定位置については検討を要する。

4.2 長方形港湾の周波数応答

湾口に防波堤が無い長方形港湾に対して、海岸線に垂直な方向から波が来襲する場合の港内での強制振動について考える。モデルの諸元は、長さ： $l = 31.13$ cm, 幅： $2d = 6.05$ cm, 水深： $h = 25.73$ cm (Ippen・Gode, 1963) である。また、全ての境界は完全反射壁と仮定する。

図-8は種々の周期をもつ来襲波に対する周波数応答の推算結果を示す。横軸は港湾の相対長、縦軸は港内の最奥の隅での重複波の波高と港外での重複波の波高との比として定義される波高増幅率 M である。図中の実線は Ippen・Gode (1963) による理論曲線であり、他の記号は図-6と同じである。全ての周期について数値解析結果と理論値との整合性は良好であり、推算精度はこの場合も HFEM とほぼ同じである。

5. 結 言

ここでは、開領域での波動場解析のために、取り扱いが簡単な無限要素を提案し、数値計算例によりその有用性を示した。その結果は次のように要約される。

- (1) 無限要素に対する補要素を媒介とした空間座標と物理変数に対して異なる2つの正規化写像系を導入することにより新しい無限要素が導かれた。
- (2) 無限要素においては、要素積分の被積分関数に強い特異性が存在せず、要素行列が陽に表示される。

- (3) 解析対象海域の内部要素の形状のいかんにかかわらず、それらとの接続が簡単である。

参 考 文 献

- 菊池文雄・岡部政之 (1986): 有限要素システム入門, 日科技連, 東京, 191 p.
- 田中 清 (1956): 円形島による波の回折, 第3回海岸工学講演会講演集, 土木学会, pp. 33-35.
- 筒井茂明・大木洋典 (1998): スロープおよびステップ型リーフ上での波の非線形挙動, 海岸工学論文集, Vol. 45, JSCE, pp. 41-45.
- Bettes, P., C. Emson and T. C. Chiam (1984): A new mapped infinite element for exterior wave problems, Numerical Methods in Coupled Systems, John Wiley Sons Ltd, pp. 489-504.
- Chen, H. S. and C. C. Mei (1975): Hybrid-element method for water waves, Proc. Modelling Techniques Conf. (Modelling 1975), Vol. 1, pp. 63-81.
- Ippen, A. T. and Y. Goda (1963): Wave induced oscillation in harbors: The solution for rectangular harbor connected to the open sea, Hydrodynamics Laboratory Rep. No. 59, MIT.
- Tsutsui, S. (1990): CATWAVES-Wave analysis system, Centre for Water Research, Univ. of Western Australia, Report No. WP-318-ST, 61 p.
- Tsutsui, S. and D. P. Lewis (1992): Wave height prediction in unbounded coastal domains with bathymetric discontinuity, Coastal Eng. in Japan, JSCE, Vol. 34, pp. 145-158.
- Tsutsui, S. and K. Zamami (1993): Jump condition of energy flux at the line of bathymetric discontinuity and wave breaking on the reef flat, Coastal Eng. in Japan, JSCE, Vol. 36, pp. 155-175.
- Zienkiewicz, O. C., K. Bando, P. Bettess, C. Emson and T. C. Chiam (1985): Mapped infinite elements for exterior wave problems, Int. Jour. for Numer. Methods in Eng., Vol. 21, pp. 1229-1251.