

平面波浪場の数値解析における開境界処理法

富 田 孝 史*

1. 緒 言

平面波浪場の数値解析における開境界処理は、数値計算のコスト縮減という大きなメリットをもたらす。その開境界処理でとくに問題となるのは、計算領域内の構造物や陸域からの反射波などの波向である。計算領域内からの反射波などの波向に関する入力データを必要としない数値計算手法であれば、地形が複雑で波が不規則なときなどに反射波などの波向を予め推定する困難さを排除することができるので効率的である。

計算領域内の様々な方向から開境界へ入射する波に対して有効な開境界処理法の一つはスポンジ層を計算領域に接続するものである(大山・灘岡, 1990)。しかし、有効なスポンジ層は波長に相当する長さが必要であるため、波長が長い例えば港内における長周期波などに対しては港湾域に匹敵する大きさのスポンジ層を設置しなければならない。これは数値計算上不経済である。

本研究では、平面波浪場の数値計算を対象に、計算領域内から計算領域境界へ入射する波の波向について特別な配慮をすることなく計算領域内からの波を計算領域外へ透過させる開境界処理法を開発するものである。具体的には、仮想境界を設定する方法であり、日野・仲座(1988)により提案されている方法に準拠する。本研究の特徴は境界に入射する波の水位および水平 2 方向の流速を同じ計算格子上でかつ同じタイムステップで処理できることにある。

2. 数値計算で対象とする支配方程式

仮想境界設置による開境界処理法は長波性の波に対して最も効果を発揮することを考えて、本研究では以下に示す非線形長波方程式を基礎方程式とする。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial q_x^2}{\partial x} + \frac{\partial q_x q_y}{\partial y} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_{bx} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial q_x q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_y^2}{\partial y} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} - \tau_{by} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $h=d+\eta$ 、 d : 静水深、 η : 水面変動、 $q_x=hU$ 、 $q_y=hV$ 、 U と V : 鉛直方向に平均した x 方向と y 方向の流速、 $\tau_{bx}=0.5f_b U \sqrt{U^2+V^2}$ 、 $\tau_{by}=0.5f_b V \sqrt{U^2+V^2}$ 、 f_b : 底面摩擦係数、 g : 重力加速度、 x と y : 直交水平座標系、 t : 時間である。

3. 開境界処理法

本研究で使用する開境界処理法では、水位および流速のそれぞれについて開境界位置が自由端になるように仮想境界を設定する。数学的には、水位や流速のそれぞれについてノイマン問題・ディレクレ問題を解くことに相当する。自由端では波は図-1 に示すように完全反射されるので、仮想境界を使って計算した水位や流速の半分の値が仮想境界に入射する波になる。水位変動について自由端となるような境界は、式(2)と(3)の左辺が 0 になるような境界であり、波の非線形性が弱い場合には $q_x=0$ (x 軸上に開境界を設定するとき) あるいは $q_y=0$ (y 軸上に開境界を設定するとき) となる直立壁により近似できる。そのときの平面的な波のイメージを図-2 に示す。非線形性が強い波の場合には式(2)や(3)の左辺の空間微分項の作用により誤差が大きくなる。とくに、完全重複波ではその腹の位置で平均水位が上昇することが波動理論から明らかであり(例えば、合田・柿崎, 1966)、それが開境界における誤差となる。図-3 は完全重複波の 3 次近似解により計算した重複波の腹の位置における平均水位 η_{ave} の特性を示したものである。同図によると、長波性の波の場合には腹の位置の平均水位は入射波高 H_i の 1% 以下であるので、平均水位に関する

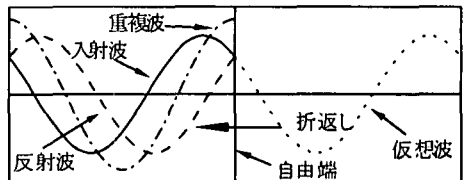


図-1 自由端における波の反射

* 正会員 博(工) 運輸省港湾技術研究所水工部

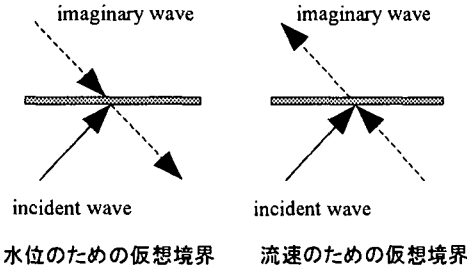


図-2 仮想境界による仮想波

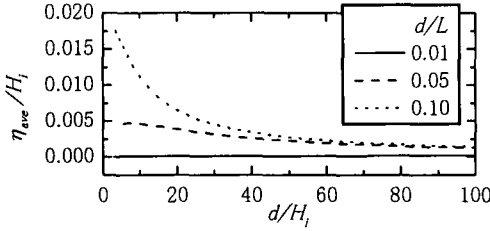


図-3 重複波の平均水位に関する理論計算

誤差は無視できる。流速変動に関する自由端境界の説明に $x=x_0$ に開境界を設定する場合を例に取り上げる。 q_x について自由端となるためには式(1)における q_x に関する項が0にならなければならない。そのため $x=x_0$ 上で $\eta=0$ と $\partial q_y/\partial y=0$ が必要である。 $\partial q_y/\partial y=0$ の条件は $x=x_0$ 線の両端の境界から流入が無ければ $q_y=0$ の条件と等しくなる。すなわち、 $x=x_0$ に開境界を設定するためには無変動水位の条件と y 方向に滑り無し条件の2つを課す必要がある。この仮想境界においても入射波と仮想境界の設置にともなう付加的な波の2つの共存場(図-2参照)を考えるために、非線形性が強い波の場合にはこの仮想境界は誤差を有する。

4. 数値計算法

本研究では式(1)~(3)の方程式をマコーマック法(Anderson et al., 1984)により差分化する。マコーマック法は予測子・修正子法の1種であり、時間的および空間的に2次の精度を有している。連続式(1)を例にとって具体的な差分式を式(4)と(5)に示す。マコーマック法の特徴は予測子と修正子で空間微分の差分方向を変えるところにあり、今回の数値計算では予測子において前進差分、修正子において後退差分を使用する。

予測子：

$$h_{i,j}^n = h_{i,j}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(q_x)_{i,j}^n - (q_x)_{i,j}^{n-1}] - \frac{\Delta t}{\Delta y} [(q_y)_{i,j+1}^n - (q_y)_{i,j}^n] \dots\dots\dots (4)$$

修正子：

$$h_{i,j}^n = h_{i,j}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(q_x)_{i,j}^n - (q_x)_{i-1,j}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta y} [(q_y)_{i,j}^n - (q_y)_{i,j-1}^n] \dots\dots\dots (5)$$

$$h_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [h_{i,j}^n + h_{i,j}^{n-1}]$$

反射境界あるいは開境界において、式(4)と(5)を適用すると、計算領域外の点における h , q_x や q_y などの値が必要になる。今回の計算では、反射壁について Fennema et al. (1990) が使用した方法を参考にす。すなわち、対象とする境界のすぐ外側に仮想点を設け、その点における h などの値に計算領域の水域内で計算される値を代入する。具体的には、 $i=i$ の線上に反射壁がある場合を考えると式(6)のような操作をおこなう。また、開境界処理を施す場合には、式(7)のようにする。

$$\left. \begin{aligned} h_{i+1,j} &= h_{i-1,j} \\ (q_x)_{i+1,j} &= -(q_x)_{i-1,j} \\ (q_y)_{i+1,j} &= (q_y)_{i-1,j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} h_{i+1,j} &= d_{i-1,j} - (h_{i-1,j} - d_{i-1,j}) \\ (q_x)_{i+1,j} &= (q_x)_{i-1,j} \\ (q_y)_{i+1,j} &= -(q_y)_{i-1,j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $(i+1,j)$ ：境界外の仮想点、 $(i-1,j)$ ：計算領域内の点である。

また、開境界周りの差分格子間隔あるいは計算時間間隔に関する日野・仲座(1988)による制限条件を考慮して、今回の計算では計算時間ステップを内挿する方法を採用している。

開境界処理法の適用性を示す前に、マコーマック法の特性を検討する。図-4は周期 $T=30$ s の波が水深 $d=10$ m で長さ $L_B=20 L_A$ (L_A は微小振幅波の波長) の水路内を伝播するときの空間波形 ($t=18 T$ の瞬間：反射波が在しない時間) を示したものである。図中の a は波の振幅である。合田(1983)の非線形性パラメータ Π を使って各種波動理論の適用範囲を示した岩垣(1987)によると、 $a=0.08$ m, 0.3 m および 0.6 m の波はそれぞれ微小振幅波、3次のストークス波そして2次のクノイド波の適用範囲となる。なお、 $a=0.08$ m および 0.3 m の計算では造波境界においてストークス波の3次近似解、 $a=0.6$ m の計算ではクノイド波の3次近似解(磯部ら, 1978)を使用している。また、数値計算では、空間差分間隔 $\Delta x=0.02 L_A$ 、時間差分間隔 $\Delta t=0.5 \Delta x/\sqrt{gd}$ および摩擦係数 $f_b=0$ としている。図-4は、マコーマック法による数値計算では、波の非線形性が增大するほど数値誤差が増大して、波の伝播にともなう波が分散する特性があることを示している。

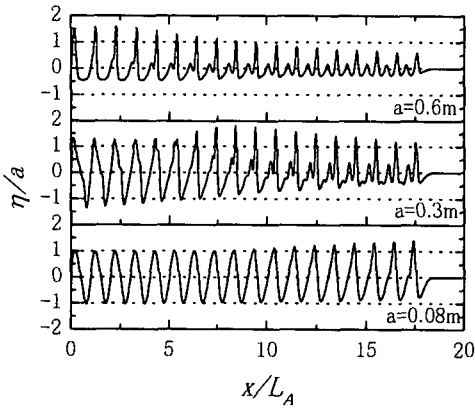


図-4 マコーマック法による波の伝播 (1次元)

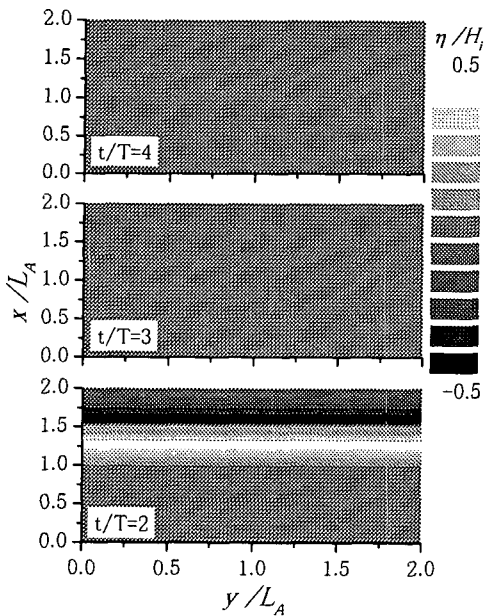


図-5 $\tan \beta = 0$ のときの水面の空間波形

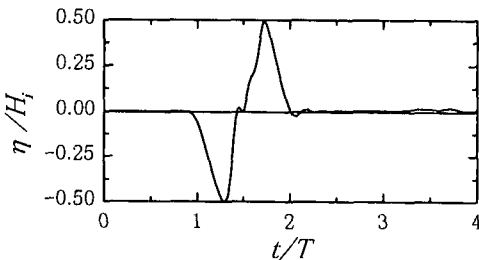


図-6 水面の時間波形 (図-5 中央部の位置)

とった計算領域 ($L_x=2L_A$, $L_y=2L_A$) に波高 $H_i=0.6$ m, $T=30$ s の波を 1 波だけ入射させた場合の計算例を示す。計算では、空間差分間隔 $\Delta x=\Delta y=0.02L_A$, 時間差分間隔 $\Delta t=0.5\Delta x/\sqrt{gd}$ および摩擦係数 $f_b=0$ としている。入射波の非線形性は、 $\Pi=0.22$ であるので 3 次のストークス波程度である。なお、入射波は全て $x=0$ の境界 (以下の図における図の下端) から入射角 $\alpha=0^\circ$ (0 rad) で入射させる。一方、開境界処理法を適用する境界の角度を変化させて、開境界処理面に対する波の入射角度を変化させる。以下において、開境界処理面に対する入射角を β とする。また、計算領域の横方向の境界は斜めの開境界処理面からの反射波を検知しやすいように完全反射面としている。

図-5 は、入射角 $\beta=0^\circ$ (0 rad) の場合の計算例である。 $\beta=0^\circ$ の場合には、図の上端にある開境界処理面からの反射波はほとんど認められない。図-6 は図-5 における計算領域の中央 ($x/L_A=1$, $y/L_A=1$) における水面の時間波形である。もし、開境界処理面から反射波が発生していれば、 $t/T=3\sim 4$ の時間帯に反射波が検出されるはずであるが、反射波は存在しない。したがって、 $\beta=0^\circ$ の場合には無反射境界条件が達成されている。

図-7, 8 および 9 は、入射角 $\tan \beta=0.25$, 1 および 4 の場合の水面変動を表している。開境界処理面は図の左上側に設定している ($t/T=2$ の図の左上に認められる三角形の部分)。もし、開境界処理面からの反射波が無ければ、 $t/T=3$ 以降の時間には波は存在しないはずであるが、斜め入射波の場合には $t/T=3$ の図にその反射波が認められ、それが $t/T=4$ の図に示すように伝播している。

斜め入射波に対する開境界処理面の反射率を求めるために、反射率が 0 であった $\tan \beta=0$ の場合の水面波形データを入射波と考え、斜め入射波の場合に計算された水面波形からこの入射波を差し引いた残りが対象境界面からの反射波と考える。 $\tan \beta=1$ の場合を例として、(x/L_A , y/L_A) = (1.75, 0.5) の位置における入射波と反射波を図-10 に示す。それらの反射波高と入射波高の比により定義した反射率 r を図-11 に示す。図-11 には、3 次のストークス波が適用される $H_i=0.6$ m の波だけでなく、微小振幅波や 2 次のクノイド波にそれぞれ相当する $H_i=0.16$ m および 1.2 m に関する反射率も併記している。

図-11 によると、反射率の変化は波の非線形性の程度の影響よりも入射角に強く影響されている。波の非線形性が強く 2 次のクノイド波理論を適用しなければならないような波 ($H_i=1.2$ m のケース) の場合には、入射角が 75° 程度 ($\tan \beta=4$) になると反射率が 80% にも達するが、3 次のストークス波を適用する程度の非線形性の波 (H_i

5. 開境界処理法の適用例

水深 $d=10$ m で縦横ともに入射波長の 2 倍の距離を

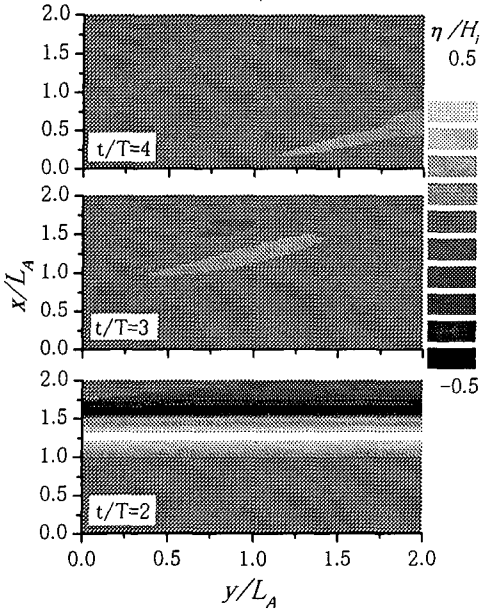


図-7 $\tan \beta = 0.25$ のときの水面の空間波形

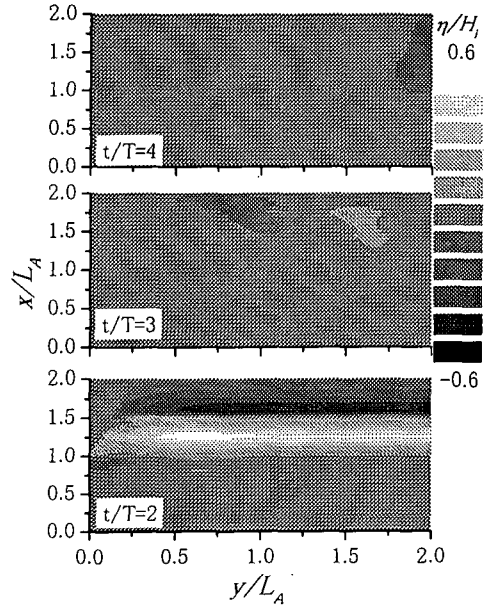


図-9 $\tan \beta = 4$ のときの水面の空間波形

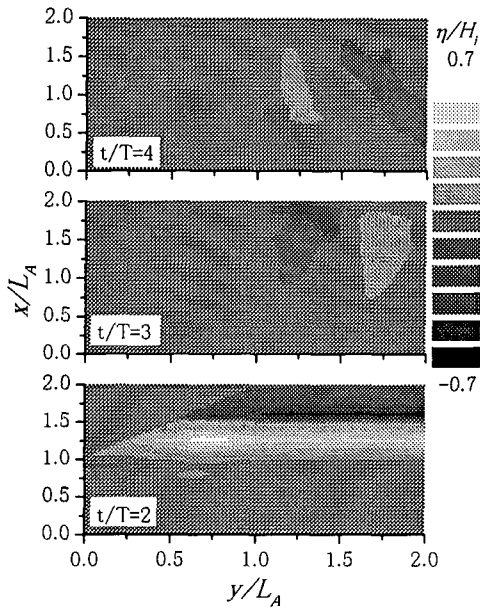


図-8 $\tan \beta = 1$ のときの水面の空間波形

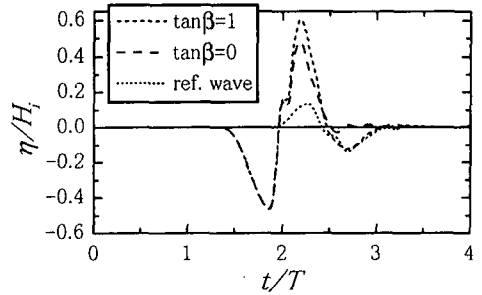


図-10 図-8に対応した入射波と反射波の時間波形

=0.6 m のケース)であれば, 入射角 β がおよそ 75° ($\tan \beta = 4$) になっても反射率はおよそ 30%程度にとどまっている。したがって, 入射角に依存して必ずしも反射率を 0 にすることはできないが, 3 次のストークス波の適用範囲にあるような波であれば, 大きなスポンジ層を設けることなく, さらに計算領域内からの反射波の入射角に

よらず概ね開境界処理が可能である。

開境界に沿うような波の場合には, 図-12 に示すように開境界付近で波高低減が生じる。図-12 は $\beta = 90^\circ$ とし, 側方境界に開境界処理を行ったときの水面波形を示している。この図の側方境界近傍では, 波のエネルギーの無い計算領域外へ計算領域内から波のエネルギーが輸送されるために波高が低減している。この現象が顕著な $\tan \beta$ が大きく波高が大きな波の場合の図-11 における $r = 80\%$ のケースでは, 反射率が過大評価している可能性がある。

6. 結 言

特に長波性の波に対する開境界処理法として, 仮想的に完全反射壁境界と無変動水位境界を組み合わせる方法が有効であることが明らかとなった。今回の数値計算結果から, 入射角がおよそ 75° (1.3 rad) に達しても 3 次の

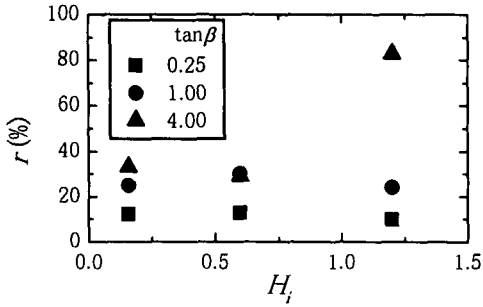


図-11 入射角 β による反射率 r の変化

ストークス波が適用できる程度 of 非線形性の波であれば、開境界処理を行った境界の反射率は 30%程度にとどまることや、波の非線形性の程度が弱い場合には境界からの波の反射率は波の非線形性よりも入射角の影響を強く受けることが判明した。したがって、ここに取り上げた開境界処理法は、強非線形性の波への適用は困難であるが、港内長周期波のように非線形性が強くなく、長波性の波で、さらに様々な角度で開境界に反射波が入射するような場合には有効である。その一方で、短周期で非線形性が強い波に対しては従来のスポンジ層を利用する方が良いと思われる。本研究では対象としなかったが、深海域への適用が可能なブシネスク方程式を使った数値計算には、スポンジ層と仮想境界設置型開境界を組み合わせた開境界処理法が有効であると考えられる。

今後、砂浜等により部分反射された長周期波の計算などのために、完全反射壁境界と無変動水位境界を線形的に組み合わせて任意反射率境界を開発する必要がある。

最後に、デラウェア大学の小林信久教授や運輸省港湾技術研究所水工部の平石哲也波浪研究室長には有意義なご意見を頂きました。ここに謝意を表します。

参 考 文 献

磯部雅彦・西村仁嗣・堀川清司 (1978): 保存波の摂動解の波高

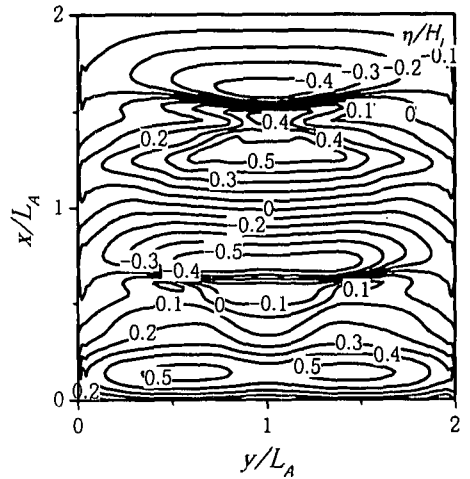


図-12 側方開境界による波高低減

による表示, 第 33 回年次講演会概要集, 土木学会, II, pp. 760-761.

岩垣雄一 (1987): 最新海岸工学, 森北出版, p. 54.

大山 巧・灘岡和夫 (1990): 数値波動水槽における開境界処理のための数値消波フィルターの開発, 海岸工学論文集, 第 37 巻, pp. 16-20.

合田良実 (1983): 波浪の非線形性とその記述パラメーター, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 39-43.

合田良実・柿崎秀作 (1966): 有限振幅重複波ならびにその波圧に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第 5 巻, 第 10 号, 57 p.

日野幹雄・仲座栄三 (1988): 数値波動解析における新しい無反射境界スキームの平面二次元問題への適用, 第 35 回海岸工学講演会論文集, pp. 262-266.

Anderson, D. A., J. C. Tannehill and R. H. Pletcher (1984): Computational fluid mechanics and heat transfer, Hemisphere, 599 p.

Fennema, R. J., M. H. Chaudhry (1990): Explicit methods for 2-d transient free-surface flows, J. Hydraulic Eng., Vol. 116, No. 8, pp. 1013-1033.