

# 傾斜海底地形上における波・流れ相互干渉のモデル構築

Mohammad Mohiuddin\*・富樫宏由\*\*・平山康志\*\*\*

## 1. 序 論

流れに乗った波は, 海岸工学やその関連分野にかなり実質的な関心を与える。流れ場は, 波高, 波長, 波周波数及び波向等のような波のパラメータを変化させる。逆に, 波伝播速度や特定の波周波数に相応する波長も又, 流れ場によって変化されるであろう。更に, 流れの大きさや方向及び海底地形は波特性に大いに影響する。

波・流れ相互干渉のメカニズムは Longuet-Higgins・Stewart (1961) によって初めて説明され, その後 Jonsson ら (1970) はそこに平均エネルギーレベルの概念を導入した。Hedges・Lee (1992) は, 波・流れの計算に流れの効果を含めるために等価等流の概念を提示した。

本研究の目的は, 傾斜海底地形上における波伝播を解析するための非線形 1 次元波・流れ数値解析モデルを構築することである。このモデルは Madsen ら (1991, 1992) の拡張型 Boussinesq 方程式に基づいているが, この方程式は波・流れ共存場には未だ広く適用されていないので, その適用性を検証しておく必要もあり, これも自ずと目的の一つに含まれる。このモデルによれば, 水粒子速度の鉛直分布が深さ方向に変化する流れにおける波高や平均水位の低下のみならず, 波形や水粒子速度も, 従来のような繰り返し計算をしないで求められる。

## 2. 理論展開

### 2.1 支配方程式

全水深に亘って深さ方向に積分した 1 次元拡張型 Boussinesq 方程式は以下のようなものである。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P^2}{d} \right) + g d \frac{\partial S}{\partial x} - h^2 \left( B + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} - B g h^3 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} = \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{1}{3} h \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + 2 B g h^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

ここで,  $d$  は全水深,  $h$  は流れがある時の水深,  $S$  は水

面変動,  $P$  は水粒子速度  $u$  を全水深で深さ方向に積分した流量,  $g$  は重力加速度,  $B$  は curve fitting parameter (= 1/15) である。

### 2.2 分散関係式

図-1 は波・流れ共存場実験装置の概要図である。波・流れ共存場に対する速度ポテンシャルは, 定常流れ部分と真に振動している波動部分との重ね合わせとして次式のように記述される (Dean・Dalrymple, 1991)。

$$\Phi = Ux + A \cosh k(h+z) \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} U^2 t \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで,  $\omega = 2\pi/T$  は角周波数,  $T$  は周期,  $k$  は波数,  $h'$  は流れがない時の水深(静水深),  $u$  は  $x$  方向の流れ速度(等価一様流れ), そして  $A$  は定数である。式 (3) の最後の項は数学的な単純化のために含まれている。

上記の速度ポテンシャルは, 次のラプラス方程式 (4), 底面の境界条件式 (5) 及び水面の境界条件式 (6) を満たす。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h'} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Big|_{z=h-h'} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h-h'} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

水面の力学的境界条件から, 水面変動  $S$  は次式のように書ける。

$$S = \frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \Big|_{z=h-h'} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式 (7) に式 (3) を代入して,  $A$  と  $k$  の高次項を無視すると, 式 (8) となる。

$$S = \frac{A}{g} (\omega + Uk) \cosh kh \sin(kx - \omega t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

Skop (1987) により, 波・流れ場の水粒子の流れ速度は, 流れ場に関係する水粒子速度(流れ部分速度  $U$ ) と波動による水粒子速度(振動部分速度  $u$ ) との和として表される。水粒子速度  $u$  を全水深で積分した流量の流れ効果を含め, 波に関する運動のみに関係する高次項を無視

\* 学生会員 修(工) 長崎大学大学院海洋生産科学研究科  
 \*\* フェロー 工 博 長崎大学教授 工学部社会開発工学科  
 \*\*\* 長崎大学技官 工学部社会開発工学科

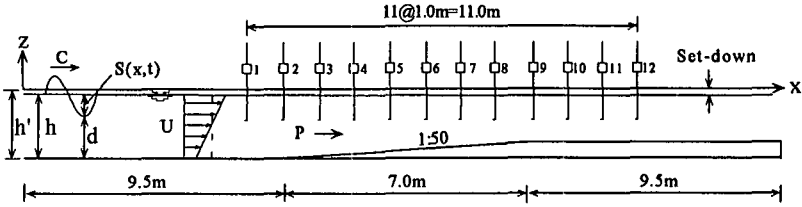


図-1 波・流れ共存場実験装置概要図

すると、式(2)の非線形項は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P^2}{d} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \{ U^2(S+h) \} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \{ 2uU(S+h) \} + \frac{\partial}{\partial x} \{ u^2(S+h) \} \\ &= 2U \frac{\partial P}{\partial x} - U^2 \frac{\partial}{\partial x} (S+h) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

この非線形項を式(2)に代入した後、それを式(1)と連立してPを消去し、Uとhの空間的変化(1階偏微分)及びそれと他の微分項との積を無視すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + U^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2U \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} - gh \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ - k^2 \left( B + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial t^2} + Bgh^3 \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} \\ = \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ h(2B+1) \frac{\partial^3 S}{\partial x \partial t^2} - 5Bgh^2 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + g \frac{\partial S}{\partial x} \right\} \\ \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(8)を式(10)に代入し、水深hはx方向に緩やかに変化すると仮定すると、波・流れ共存場に対する次の分散関係式が導かれる(Mohiuddinら, 1998)。

$$\begin{aligned} -\omega^3 \{ 1 + k^2 h^2 (B+1/3) \} + \omega^2 U k \{ 1 - k^2 h^2 (B+1/3) \} \\ + \omega k^2 \{ U^2 + gh(1+Bk^2 h^2) \} \\ - U k^3 \{ U^2 - gh(1+Bk^2 h^2) \} = 0 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$\omega = Ck$ の時は、式(11)は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{gh} = \frac{CU}{gh} \left\{ \frac{1 - k^2 h^2 (B+1/3)}{1 + k^2 h^2 (B+1/3)} \right\} \\ + \frac{1}{gh} \left\{ \frac{U^2 + gh(1+Bk^2 h^2)}{1 + k^2 h^2 (B+1/3)} \right\} \\ - \frac{U}{C} \frac{1}{gh} \left\{ \frac{U^2 - gh(1+Bk^2 h^2)}{1 + k^2 h^2 (B+1/3)} \right\} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

流れ速度  $U=0$  の時は、式(11)及び(12)はそれぞれ式(13)及び(14)となり、これは波伝播のみの場合に対してMadsenら(1991, 1992)によって導かれた分散関係式に一致する。

$$-\omega^2 + ghk^2 + Bgh^3 k^4 - \omega^2 k^2 h^2 (B+1/3) = 0 \dots (13)$$

$$\frac{C^2}{gh} = \frac{1 + Bk^2 h^2}{1 + \left( B + \frac{1}{3} \right) k^2 h^2} \dots\dots\dots (14)$$

式(12)は、図-1に示されるような領域に適用され、パラメータkについてはNewton-Raphson法を用いることによって解ける。この計算の場合、上流側の流れの大きさは-0.3 m/sから0.3 m/sの間の値の範囲で変化させ、その計算結果をJonssonら(1970)の解析解と比較したのが図-2である。図中で添字0の付いたパラメータ  $k_0, L_0, h_0$ 等は、沖合境界で流れがない時の値を示す。予想通り、波数kは同一方向流れの大きさが増大するにつれて減少し(図-2a)、逆方向流れの大きさが増大すると共に増大する(図-2b)。理論展開の仕方が互いに異なるけれども、両者の分散関係式は良く一致している。

3. 数値計算

3.1 差分式

支配方程式は準陰的差分法(Dronkers, 1969)で近似し、staggerd mesh schemeを使用した変数と共に図-3

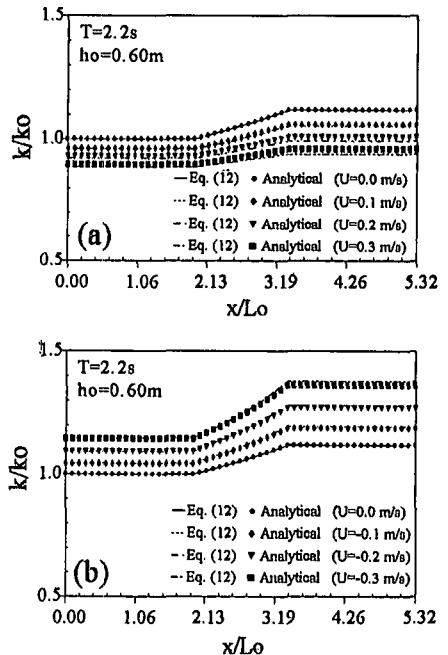


図-2 波数kの比較：(a) 同一方向流れの場合 (b) 逆方向流れの場合

に示した。このスキームでは、 $P$  と  $S$  は異なる時間レベルで定義される。水面変動の3階空間微分 ( $\partial^3 S / \partial x^3$ : Boussinesq 補正項) は式 (15) のように水表面曲率項  $S_{xx}$  で離散化し、それを更に離散化しないで直接  $S_{xx}$  を求めるために3次のスプライン法を採用した。

$$\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} = \frac{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{S_{xx} \Big|_{j+\frac{1}{2}} - S_{xx} \Big|_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \dots (15)$$

非線形対流項は次のように離散化される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P^2}{d} \right) &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left( \frac{P_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + P_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \right) \left( \frac{P_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + P_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \right\} \frac{1}{d_{j+\frac{1}{2}}^n} \\ &- \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left( \frac{P_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + P_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \left( \frac{P_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + P_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \right\} \frac{1}{d_{j-\frac{1}{2}}^n} \\ &\dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

上のような離散化に対する配慮をした上で、式 (1) と (2) の差分近似はそれぞれ式 (17) と (18) のようになる。

$$S_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - S_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( P_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - P_{j+\frac{1}{2}}^n \right) = 0 \dots \dots \dots (17)$$

$$\begin{aligned} &\frac{P_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - P_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{4\Delta x} \left\{ P_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left( P_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + P_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \frac{1}{d_{j+\frac{1}{2}}^n} \right\} \\ &+ \frac{1}{4\Delta x} \left\{ P_{j+\frac{1}{2}}^n \left( P_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + P_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \frac{1}{d_{j+\frac{1}{2}}^n} - P_{j+\frac{1}{2}}^n \right. \\ &\cdot \left. \left( P_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + P_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \frac{1}{d_{j-\frac{1}{2}}^n} \right\} - \frac{1}{4\Delta x} \\ &\cdot \left\{ P_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left( P_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + P_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \frac{1}{d_{j-\frac{1}{2}}^n} \right\} - \frac{1}{\Delta t (\Delta x)^2} \\ &\cdot \left\{ h_0^2 \left( B + \frac{1}{3} \right) \left( P_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2P_{j+\frac{1}{2}}^n + P_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right\} \\ &- \frac{1}{6} \frac{h_j}{\Delta t \Delta x} \frac{\partial h}{\partial x} \left( P_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - P_{j+\frac{1}{2}}^n - P_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + P_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{h_j^2}{\Delta t (\Delta x)^2} \left( B + \frac{1}{3} \right) \left( P_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - 2P_{j+\frac{1}{2}}^n + P_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &- g d_{j+\frac{1}{2}}^n \left( \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n - S_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right) + \frac{B g h_j^2}{\Delta x} \left( S_{xx} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^n - S_{xx} \Big|_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ &+ B g h_j^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( S_{xx} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^n + S_{xx} \Big|_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

全ての新しい時間レベルで、式 (18) は3重対角行列を形成し、この3重対角行列は Thomas algorithm によって解ける。

3.2 境界条件

水面変動  $S_{j-1}$  は、計算の各時間ステップ毎に入射波パラメータとして入射波境界線で発生させる。

$$P_{j-1} = U_{j-1} h_{j-1} + C_{j-1} S_{j-1} \dots \dots \dots (19)$$

入射波流量成分  $P_{j-1}$  は式 (19) から計算され、ここで  $U_{j-1}$  は流れ速度、 $h_{j-1}$  は水深、そして  $C_{j-1}$  は (波・流れ分散関係式から計算される) 入射波の位相速度である。

この状況に対して、関係する領域の末端で発生する反射波が到達する前に計算が終了するような放射境界即ち式 (20) を持つ拡張領域の中で計算は実行される (Beji・Battjes, 1994)。

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C_{NN} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (20)$$

ここで、 $C_{NN}$  は外に抜け出す境界における位相速度である。

3.3 数値解析結果

前述した1次元モデルが、図-1に示す1/50の海底勾配で緩やかに変化する領域に適用される。入射波境界における水深は0.6m、入射波の波高は0.15mである。

図-4(a)は、逆方向流れの大きさが次第に増大する場合、波が伝播するにつれて波高は着実に増大することを示している。波高は傾斜底面から下流側水平底に遷移するまで増大する。即ち、波が逆方向流れに乗って遡上する時は、波長が減少して (図-2bの場合に相応する) 波高が増大することになる (図-4aで流れがない場合の実線より上側)。一方、波が同一方向流れ上を伝播する場合は、波長が増大して (図-2aの場合に相応する) 波高が減少する (図-4aで流れがない場合の実線より下側)。波・流れ相互干渉においては、平均水位は全領域で変化する。Wave set-downは流れの大きさがより大きい所程相応の大きさになる (図-4a)。

図-4(b)は、下流側浅水域上の測定点における水面波形の比較を示す。逆方向流れは波頂の振幅を増大させるのに対して、同一方向流れ上の波伝播の場合は波頂の振幅は減少する。

4. 結果とその考察

モデルの検証のために波動水槽による実験を行った。

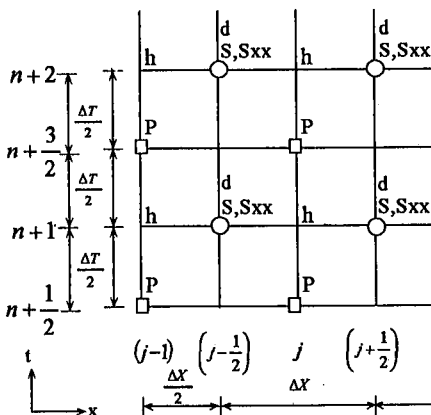


図-3 差分スキーム

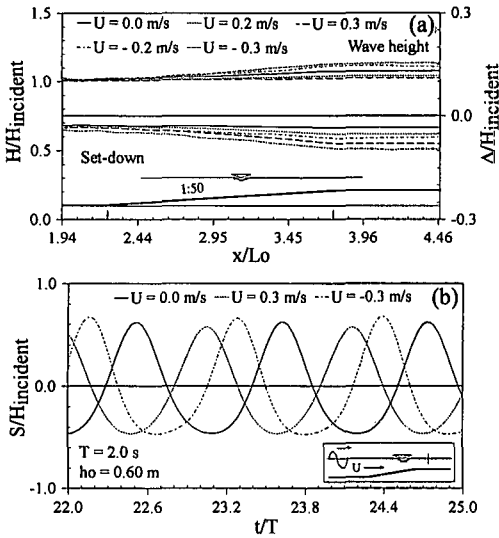


図-4 入射波諸元:  $T=2\text{ s}$ ,  $h_0/L_0=0.14$ : (a) 波高及び平均水位 (wave set-down) の空間分布 (b) 水面変動波形

は良い一致が見られる。しかし、図-7(a)に示す実験値の波高は、数値解や解析解と比べて沖合側ではほぼ一致しているが、斜面底浅水部とその岸側ではそれより少し

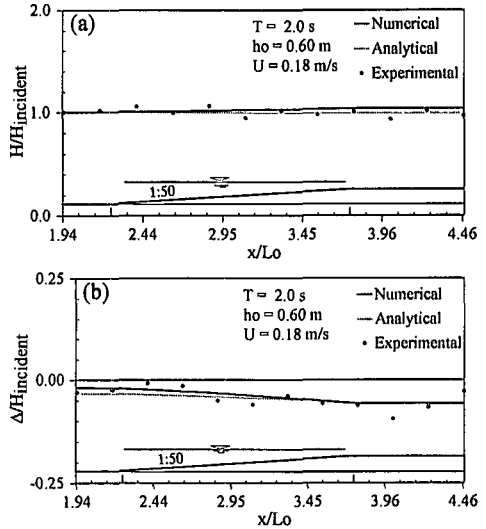


図-5 (a) 波高, 及び (b) 平均水位 (wave set-down) の空間分布の比較: 波・流れの条件:  $T=2\text{ s}$ ,  $h_0/L_0=0.14$ ,  $U=0.18\text{ m/s}$

図-1に示すように、波高計1~12は1m間隔で12測点における水面変動の時間波形を記録した。実験は非砕波の場合のみを対象とした。実験では、波変形に及ぼす流れの影響を調べるために、逆方向流れ及び同一方向流れを発生させた。数値解析モデルに用いた入射波高は、図-1に示す測点1で測定された水面変動波形の root mean square から計算した。

数値シミュレーション解析においては、波動水槽の上流側で測定された流れ速度を用いて等価等流を計算した (Hedges・Lee, 1992)。この場合、流れ速度の鉛直分布は水深に沿って直線的に変化すると仮定した。そして、波・流れ共存場に対する解析解としては、Jonssonら (1970) によって与えられた方法を採用した。

4.1 同一方向流れ上の波

図-5(a)と(b)は、それぞれの波高と平均水位 (wave set-down) の空間分布について、上記のように求めた著者らの数値解と実験結果及び Jonssonら (1970) による解析解との比較を示す。その結果は、数値解と解析解は互いに良く一致しており、また実験値とも全体的に良く一致していることを示している。

幾つかの異なる計測点における水面変動波形の比較を図-6に示す。数値解と実験値の間主な相違は、測点8, 9, 10の浅水域における波谷の形状だけである。

4.2 逆方向流れ上の波

波が逆方向流れ上を伝播する場合の波高と平均水位の空間分布を、それぞれ図-7(a)と(b)に示す。前述の同一方向流れ上の波の場合と比べて、波に対する流れの影響がより顕著である。両図共に数値解と解析解の間に

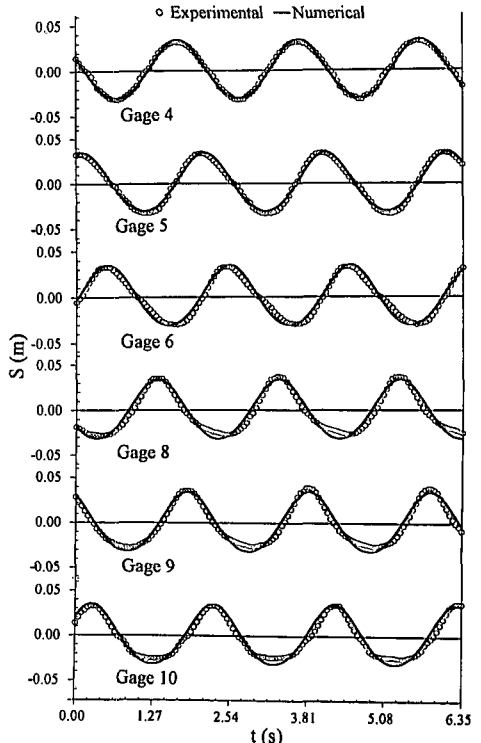


図-6 相異なる計測点における計算値と実験値の時間波形の比較: 波・流れの条件:  $T=2\text{ s}$ ,  $h_0/L_0=0.14$ ,  $U=0.18\text{ m/s}$

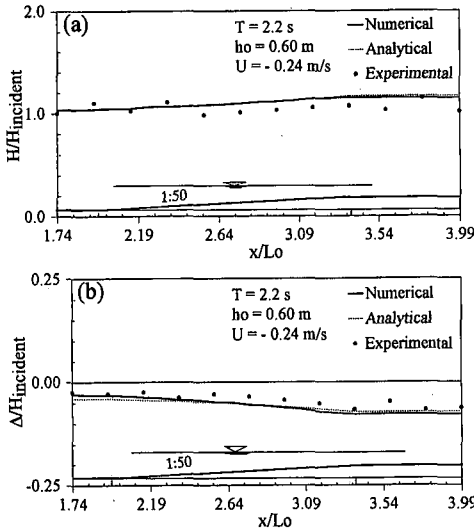


図-7 (a) 波高、及び (b) 平均水位 (wave set-down) の空間分布の比較: 波・流れの条件:  $T=2.2$  s,  $h_0/L_0=0.12$ ,  $U=-0.24$  m/s

小さくなっている。また、図-7(b)に示す平均水位の低下は実験値とも比較的良く一致している。

図-8は、数値計算と実験結果による水面変動の時間波形の比較である。波谷を比較して見ると、数値計算波形は実験波形から少し逸れていることが分かる。

### 5. 結 論

波・流れ場に拡張型 Boussinesq 方程式を適用して、新しい分散関係式を導き、新たな数値解析モデルを展開して構築した。この数値モデルを色々と異なった波・流れ場に適用し、その数値解を他の解析解及び著者らの実験結果と比較検討した、その結果、ここに提示した数値モデルによる解は解析解及び実験結果とかなり良い一致を示し、このモデルの妥当性が検証された。

### 参 考 文 献

Beji, S. and J. A. Battjes (1994): Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar, *Coastal Eng.*, Vol. 23, pp. 1-16.  
 Dean, R. G. and R. A. Dalrymple (1991): *Water wave mechanics for engineers and scientists*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 353 p.  
 Dronkers, J. J. (1969): Tidal computations for rivers, coastal areas, and seas, *J. Hyd. Div., ASCE*, Vol. 95, No. HY 1, pp. 29-77.  
 Hedges, T. S. and B. W. Lee (1992): The equivalent uniform current in wave-current computations, *Coastal Eng.*, Vol. 16, pp. 301-311.

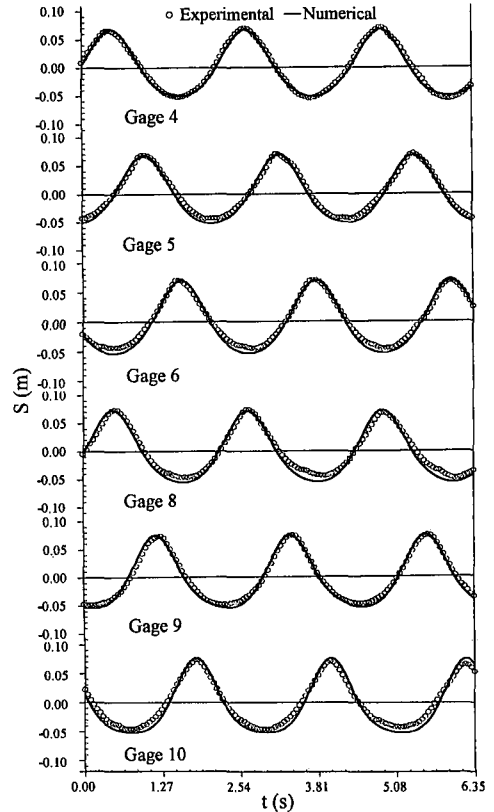


図-8 相異なる計測点における計算値と実験値の時間波形の比較: 波・流れの条件:  $T=2.2$  s,  $h_0/L_0=0.12$ ,  $U=-0.24$  m/s

Jonsson, I. G., C. Skougaard and J. D. Wang (1970): Interaction between waves and currents, *Proc. 12th ICCE*, pp. 489-507.  
 Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart (1961): The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, *J. Fluid Mech.*, Vol. 10, pp.529-549.  
 Madsen, P. A., R. Murray and O. R. Sørensen (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, Vol.15, pp. 371-388.  
 Madsen, P. A. and O. R. Sørensen (1992): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry, *Coastal Eng.*, Vol. 18, pp. 183-204.  
 Mohiuddin, M., H. Togashi and Y. Hirayama (1998): An Extended Boussinesq Equation Model for Wave-Current Interactions: Experimental Study and Numerical Simulation, *Proc. (on CD-ROM) 3rd ICHE*, Vol. III, pp. 1-16.  
 Skop, R. A. (1987): An approach to the analysis of the interaction of surface waves with depth-varying current fields, *Appl. Math. Modelling*, Vol. 11, pp. 432-437.