

# 非線形緩勾配方程式を用いた任意反射率を持つ 構造物周辺の入・反射波浪共存場の解析

有川 太郎\*・磯部 雅彦\*\*

## 1. はじめに

周期波の Mach 反射に対して, Yoon・Liu (1990) や森屋ら (1995) が浅海域 ( $h/L=0.016$ ) を対象として, 数値計算を用いて研究している。Yoon らは水深・波高比 ( $H/L$ ) が 0.2 および 0.4 について計算を行い, 入射角が 20 度以下では角度が大きいほど壁沿いの波高は大きくなることを示している。また, 線形の場合では回折散乱波の影響により, 壁沿いの波高が変動するのに対し,  $H/h=0.4$  の結果になるとその様子は見られない。それに対し, 森屋らは,  $H/h=0.1$  について計算を行い, 入射角が 15 度と 20 度の場合を比べると 15 度の時の方が壁の波高は大きく, また, 壁沿いの波高の変動も, 線形の場合と比べて緩やかになるものの存在することを確認している。

このような定性的な違いがあるが, 定常になるまでの距離が長いことから, Stem 波についての実験による検証は困難である。そこで, 強非線形性・強分散性を有する非線形緩勾配方程式 (磯部, 1994) を用いて数値計算を行い, 検討することを試みた。また, エネルギーの保存に対する誤差を検討することにより, 計算の精度を保証する。

また, 消波ブロックをおいた護岸のようにエネルギーが吸収されるような場で, Stem 波のような現象が起きるかどうかはまだわかっていない。そこで, 任意の反射率を有する構造物についても取り扱えるようにし, 吸収のある場で Stem 波のような現象が起きるかどうかを検討する。

## 2. 数値計算方法

### (1) 基礎方程式

非線形緩勾配方程式を用いた平面の数値計算に関して, これまでの研究から Newton 法を用いた陰的方法では, 計算が不安定になることがわかっている。そこで, 本研究では陽的に計算をする。しかし, 非線形緩勾配方程式は式の構造上そのままでは陽的に解くことは困難と

なるために, 以下の様に考える。

速度ポテンシャルは既知の鉛直分布関数  $Z_\alpha(z: h)$ , および未知係数  $f_\alpha(x, t)$  を用いて級数で表示され,

$$\phi(x, z, t) = Z_\alpha f_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (1)$$

となる。基礎方程式を水面変動  $\eta(x, t)$ ,  $f_1$ , および残りの項の変数  $f_\beta$  に分ける。ただし, ギリシャ文字に関しては総和規約を適用し,  $\alpha, \beta, \dots=2, 3, \dots, N$  とすると,

$$\begin{aligned} & Z_1^n \frac{\partial f_1}{\partial t} + Z_\beta^n \frac{\partial f_\beta}{\partial t} \\ & + g\eta + \frac{1}{2}(Z_1^n \nabla f_1 + Z_\beta^n \nabla f_\beta)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z_1^n}{\partial z} f_1 + \frac{\partial Z_\beta^n}{\partial z} f_\beta \right)^2 \\ & + \left( \frac{\partial Z_1^n}{\partial h} f_1 + \frac{\partial Z_\beta^n}{\partial h} f_\beta \right) (Z_1^n \nabla f_1 + Z_\beta^n \nabla f_\beta) \nabla h = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} & Z_1^n \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla(A_{11} \nabla f_1 + A_{1\gamma} \nabla f_\gamma) - (B_{11} f_1 + B_{1\gamma} f_\gamma) \\ & + (C_{11} - C_{1\gamma}) \nabla f_1 \nabla f_\gamma h \\ & + \left( \frac{\partial Z_1^n}{\partial h} f_1 + \frac{\partial Z_\gamma^n}{\partial h} f_\gamma \right) Z_1^n \nabla \eta \nabla h = 0 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Z_\alpha^n \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla(A_{\alpha 1} \nabla f_1 + A_{\alpha \gamma} \nabla f_\gamma) - (B_{\alpha 1} f_1 + B_{\alpha \gamma} f_\gamma) \\ & + (C_{\alpha 1} - C_{\alpha \gamma}) \nabla f_1 \nabla f_\gamma h (C_{\gamma \alpha} - C_{\alpha \gamma}) \nabla f_\gamma \nabla h \\ & + \left( \frac{\partial Z_\alpha^n}{\partial h} f_1 + \frac{\partial Z_\gamma^n}{\partial h} f_\gamma \right) Z_\alpha^n \nabla \eta \nabla h = 0 \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

となる。次に, 式(3)  $\times Z_\alpha^n$  - 式(4)  $\times Z_1^n$  を計算すると,

$$\begin{aligned} & Z_\alpha^n \nabla(A_{11} \nabla f_1 + A_{1\gamma} \nabla f_\gamma) - (B_{11} f_1 + B_{1\gamma} f_\gamma) \\ & + (C_{11} - C_{1\gamma}) \nabla f_1 \nabla f_\gamma h \\ & - Z_1^n \nabla(A_{\alpha 1} \nabla f_1 + A_{\alpha \gamma} \nabla f_\gamma) - (B_{\alpha 1} f_1 + B_{\alpha \gamma} f_\gamma) \\ & + (C_{\alpha 1} - C_{\alpha \gamma}) \nabla f_1 \nabla f_\gamma h + (C_{\gamma \alpha} - C_{\alpha \gamma}) \nabla f_\gamma \nabla h = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

となり, 式(2), 式(3) および式(5) を連立して方程式を解く。式(5) に関しては  $N-1$  だけ式の数が存在する。

また鉛直分布関数としては偶次べき乗関数を用い, 各係数 ( $A_{\alpha\beta}$  など) は磯部 (1994) に従うものとする。

### (2) 離散化

式(2) を次のようにし,

\* 学生会員 修(工) 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻  
\*\* フェロー 工 博 東京大学教授 新領域創成科学研究科

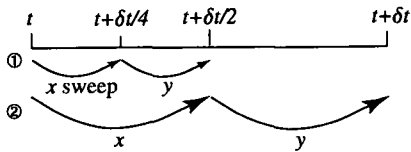


図-1 計算の流れの概念図

$$Z_1^n \frac{\partial f_1}{\partial t} + Z_\beta^n \frac{\partial f_\beta}{\partial t} + G(\eta, f_1, f_\beta) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$G(\eta, f_1, f_\beta) \equiv g\eta + \frac{1}{2}(Z_1^n \nabla f_1 + Z_\beta^n \nabla f_\beta)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z_1^n}{\partial z} f_1 + \frac{\partial Z_\beta^n}{\partial z} f_\beta \right)^2 + \left( \frac{\partial Z_1^n}{\partial h} f_1 + \frac{\partial Z_\beta^n}{\partial h} f_\beta \right) \cdot (Z_1^n \nabla f_1 + Z_\beta^n \nabla f_\beta) \nabla h \quad \dots\dots\dots (7)$$

既知数に\*の添え字を用いて、離散化を行うと、

$$Z_1^n \frac{f_1 - f_1^*}{\delta t} + Z_\beta^n \frac{f_\beta - f_\beta^*}{\delta t} + G(\eta^*, f_1^*, f_\beta^*) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。すると  $f_1$  は、

$$f_1 = - \frac{Z_\beta^n f_\beta + Z_\beta^n f_\beta^* - \delta t G + f_1^*}{Z_1^n} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となり、 $f_1$  は  $f_\beta$  ( $\beta=2, \dots, N$ ) を用いて表すことができる。

全体的な計算の流れはADI法を用いる。 $x$ 方向の時点( $x$  sweep)では、式(3)、式(5)の $x$ 方向空間差分は未知数を用い、 $y$ 方向差分は既知数を用い、 $A_{\alpha\beta}$ などにある $\eta$ については、既知数を用いる。このようにすることで、まず、式(9)を式(5)の離散化式に代入し、 $f_\beta$ について3重対角帯行列を用いて解くことができる。そして $f_1$ を求め、それらを、式(3)の離散化式に代入し、 $\eta$ を求める。

次に $y$ 方向の時点( $y$  sweep)では、空間差分の離散化について逆のを行うだけで、手順は同様のことをする。

(3) 計算の流れ

単に陽的にADI法を用いて計算を行うと、誤差が大きく、長時間計算することが困難であった。そこで、まず、 $t$ から $t+\delta t/4$ を経て $t+\delta t/2$ の値を予測するために、ADI法を用いた。次に、その予測値を用いて、 $t$ から $t+\delta t/2$ を経て $t+\delta t$ の値を求める際に、もう一度ADI法

を用いるという2段階手法を開発した。この場合、1段階目のADIは通常通りに差分する。そして、2段階目のADIでは、 $x$  sweepでは、 $y$ 方向の空間差分に $\delta t/2$ と0の既知数の平均を用い、 $x$ 方向の空間差分は未知である $t+\delta t/2$ での値とする。 $y$  sweepでは、 $y$ 方向の空間差分には $t+\delta t/2$ の予測値(既知)と $t+\delta t$ の修正値(未知)との平均を用い、 $x$ 方向の空間差分は $\delta t/2$ の既知数を用いる。

全体の流れは図-1に示す通りである。

3. 矩形水路における精度の検証

本研究では、浅海域における数値計算を行うため、速度ポテンシャルの鉛直分布関数の項数を2項とした。また、本計算アルゴリズムを使用した際の実験結果と非線形性および分散性の精度を確かめるために、潜堤による規則波の変形計算を行った。実験は、大山ら(1993)によるものである(図-2)。入射方法は線境界法(石井, 1993)を用

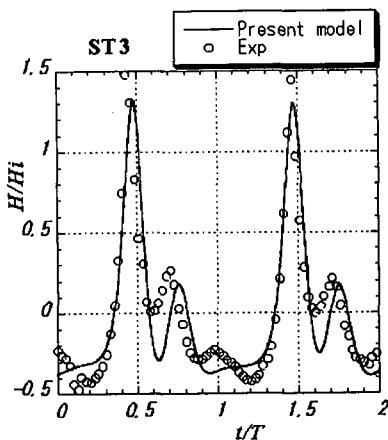


図-3 ST3での時系列波形

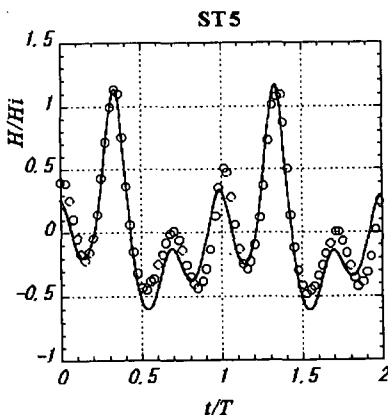


図-4 ST5での時系列波形

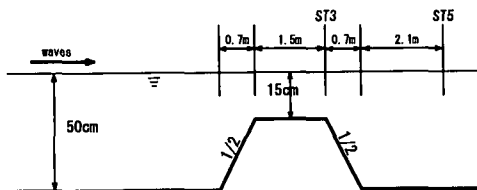


図-2 断面図

い、入射点で各変数に、流れ関数法より得られる厳密解を与えることとする(有川・磯部, 1997)。側方は完全反射境界を用い、岸側および沖側では、Sommerfeldの透過境界条件を用いた。また、空間格子サイズは  $L/40$ 、時間間隔は  $T/400$  である。

ST3およびST5での波形の比較を行ったものが図-3、図-4である。実験値とよく一致していることがわかり、浅海域では2項でも非線形性および分散性をよく表現していることがわかる。

4. 任意の反射率を持つ境界の取り扱い

(1) 概 念

エネルギー吸収帯による強制的な減衰方法を用いる場合、吸収帯前面より数値的な反射を起こす。その反射を制御することにより、任意の反射率を持つ境界を構築する。

エネルギーの吸収方法は、吸収帯内で変数を定数  $\mu$  で割ることで、変数を減少させる方法を用いる。波の進行方向を  $x$  とし、 $\mu$  を、

$$\mu(x) = \begin{cases} \exp\left\{2b^* \left(\frac{(u-x_s)/dx}{dx} - 2b^* \left(\frac{-x_s/dx}{dx}\right) \ln a\right)\right\} & \text{for } x_s \leq x \leq x_{max} \\ 1 & \text{for } x < x_s \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

のようにする。 $a$  は2.0とした。 $x_s$  は吸収帯を始める場所、 $x_{max}$  は岸側の境界点、 $b$  は定数の勾配を決定するパラメタである。

(2) 計算方法

式(10)での  $b$  および吸収帯の長さ ( $x_{max} - x_s$ ) を変化させることによる反射率の違いを計算する。線境界法の特徴として、入射点より沖側では反射波のみが現れることから、反射率の推定は、そこでの波高を求めて行った。計算は一樣水深、矩形水路で行い、側方は完全反射境界とする。また、計算に用いた波の諸量は、 $H_i = 0.01$  m,  $h = 0.1$  m, および  $T = 2.00$  s とし、空間格子サイズ  $dx, dy$  を  $L/25$ 、時間間隔  $dt$  を  $T/400$  とした。

(3) 推定結果

まず、岸側に吸収帯を用いず透過境界のみを用いて計

算したところ、入射境界より沖側では波高比の平均は0.009であり、有意な反射なしに透過していることを確認した。

次に岸側境界を完全反射境界として、 $b = 0.1 \sim 2.0$  まで変化させ、吸収帯の長さを  $L_i, 2L_i, 3L_i$  として、反射率を計算した。図-5は  $b = 1.0$ 、吸収帯の長さが  $L_i$  の場合の波高比である。これを見ると反射波の波高は一樣であることから上述の方法の妥当性を示すものである。

反射率をまとめたものを図-6に示す。これより、吸収帯の長さを固定すると、反射率は極値を持ち、吸収帯の長さが長いほど、極値は小さくなり、極値より大きい  $b$  をとると反射率は吸収帯の長さによらず、また吸収帯の長さが長いほど、より広く反射率の設定が可能であることもわかる。また、時間間隔を長くして同じ計算をおこなったところ、 $dt = T/200$  の時では、反射率は1割ほど小さくなったが傾向はほぼ変化しなかった。

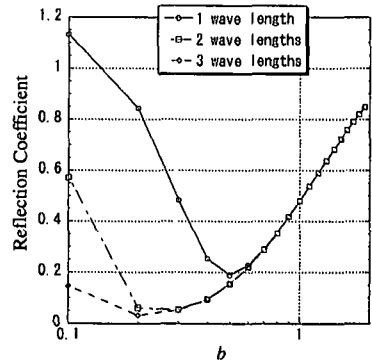


図-6 反射率 ( $dx = L/25, dt = T/400$ )

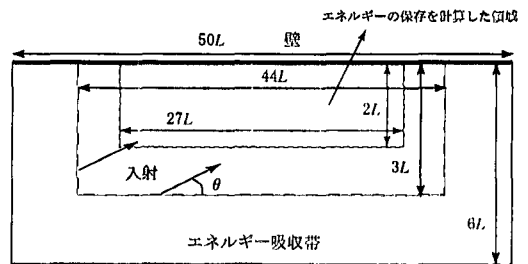


図-7 計算領域

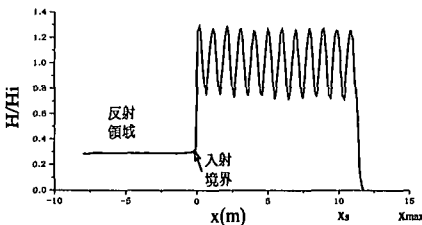


図-5 反射率計算例

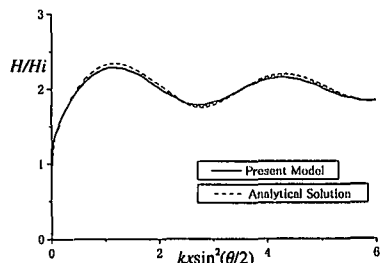


図-8 線形解との比較 ( $T = 2.0$  (s),  $H_i/h = 0.001, h = 0.1$  (m))

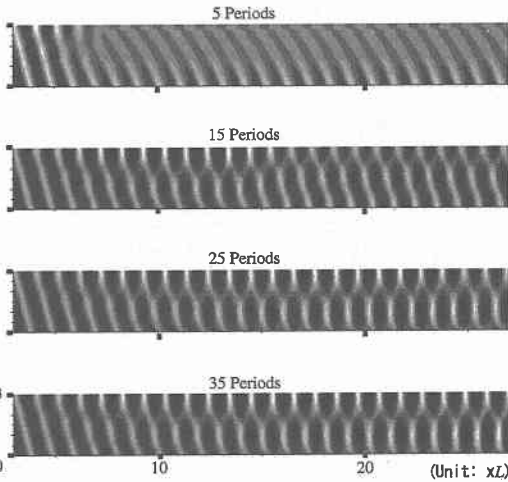


図-9 波形の変化の様子 (5周期~35周期)

### 5. 構造物周辺の入・反射波浪場の解析

#### (1) 斜め波の入射方法

入射方法は、線境界入射方法を用いて矩形計算領域の境界の2辺から入射し、その外側ではエネルギー吸収帯を用いた。この結果規則波を用いて検証したところ、非線形波を精度よく入射できることを確認した。

#### (2) 線形条件での入・反射波浪場の比較

線形理論のもとで半無限の長さを持つ鉛直壁に規則波が斜めに入射し反射されてできる波浪場は、Helmholtz方程式により表される。そこで、その解と本計算との比較を行う。計算条件は  $h=0.1$  m,  $H_i/h=0.001$ ,  $T=2.0$  s, および入射角を45度とする。図-7は計算領域を表している。また、本数値計算の妥当性を示すため、エネルギーの保存則について図-7のなかで示す領域について調べた。これについては後述する。

図-8は壁沿いでの波高比の変動を示している。これによると回折散乱波の影響をうまく計算で再現していることがわかり、線形の計算に対する妥当性を確認することができた。

#### (3) 非線形条件での入・反射波浪場の比較

計算条件は波高1cm, 周期2s, 水深10cm, および  $dx(dy)=L/25$ ,  $dt=T/500$  とした。

まず、波浪場の形成過程を知るために、各周期ごとのある瞬間の波形を描いた図を示した(図-9)。このときの入射角は15度である。縦横の単位は波長である。縮尺は1:1であるので、実際に  $\theta$  は15度となっている。また、色が白くなるほど、水位が高くなっている。この結果から、時間とともに波峰線が延びていく様子がよくわかる。

また、図-7の領域内でのエネルギーの保存を計算し

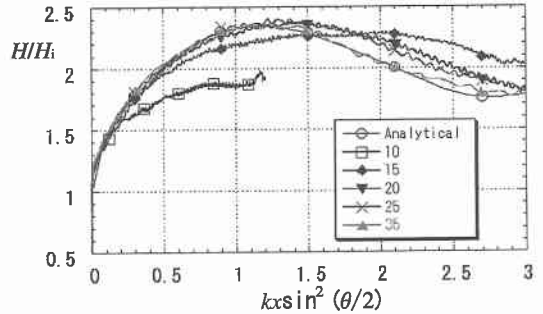


図-10 壁沿いの波高の変化の入射角による違い

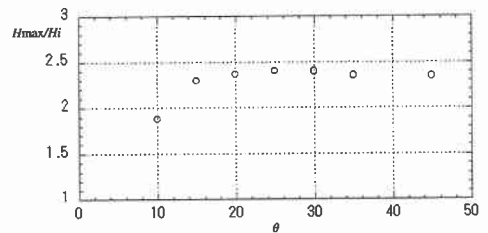


図-11 波高の最大値の比較

た。まず、領域内に入り出すエネルギーは、

$$F = \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + gz \right\} v dz \dots (11)$$

を領域の境界線に沿って積分することで計算でき、波のエネルギー  $E_w$  は、運動エネルギーおよび位置エネルギーであるので、

$$E_w = \iint_D \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + gz \right\} dz dA - \iint_D \int_{-h}^0 gz dz dA \dots (12)$$

で計算する。よって、1周期間での誤差は、

$$Err = (E_w|_{t+\tau} - GE_w|_t) + \int_t^{t+\tau} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds dt \dots (13)$$

となる。ここで、 $\mathbf{n}$ は線分  $ds$ の法線方向となる。また、1周期の平均エネルギーで無次元化を行う。その結果について49周期目から50周期目の誤差を表-1に示す。これによると、誤差は1%程度で、本計算が精度よいものであることを示している。

表-1 周期ごとによる誤差

周期	error(%)	Flux(放出+)(%)	$\Delta E_w$ (%) (増加+)	$\bar{E}_w$ ( $m^2/s^2$ )
50	-0.929	-1.237	0.309	0.046162

図-10に入射角による波高の変化を示す。これからわかることは、入射角度が小さくなるに従い、波高の変化はより緩慢になるということである。また35度や45度

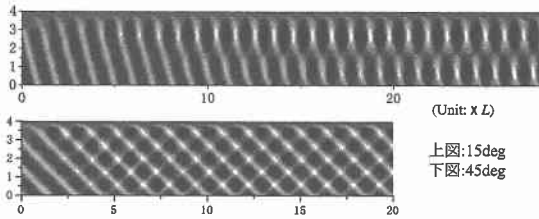


図-12 入射角 15 度および 45 度の時の波形の等高線 (吸収帯あり)

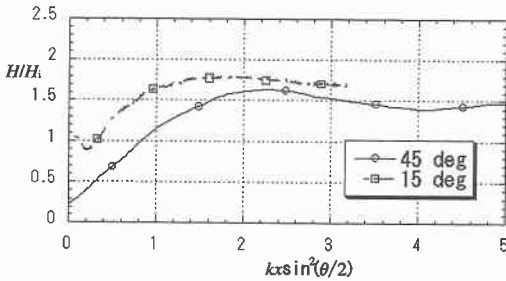


図-13 壁沿いの波高の変化の違い (吸収帯あり)

はほぼ線形解と等しいことがわかる。つまり、35 度より大きいところでは、通常の反射現象であることがわかる。それぞれの最大波高を見ると、図-11 の様になり、Mach 反射の起こると考えられる範囲では、最大波高はほぼ単調に増加することがわかる。(ただし、10 度については、計算領域が相対的に非常に小さくなるため、定常解を得るまでの領域をとることができず、 $kx \sin^2(\theta/2) = 1.0$  の値をとっている。)

これらから言えることは、森屋 (1996) の結果は 15 度においては波高比が 2.7 程度、20 度においては 2.5 程度と少し過大に算出していることがわかる。また、波高の変動は緩やかにはなるものの起こっていることがわかる。

#### (4) 吸収帯を設置した場合

壁の前に吸収帯を置き、任意の反射率を作り、その時の波浪場がどのようになるかをみた。吸収帯に用いたパラメタは吸収帯の長さが 1 波長であり、 $b = 1.0$  とし、その反射率は矩形水路では 0.5 程度であった (図-6)。

周期 2 s、波高 1 cm、水深 10 cm、入射角を 45 度および 15 度とした時の結果を示す。全体の波形は図-12 の様になった。先ほどと同じく色が白くなるほど、水位が

高くなっている。これらを見ると反射波の波峰高は当然であるが入射波の波峰高よりも小さくなっていることがわかる。また、15 度の時では、波峰線は徐々に延びていくことがわかる。

また、吸収帯前面に沿った波高の違いを表したものが図-13 である。これを見ると、45 度の時は、位相がずれ、変動は小さくなるものの、解析解と同じように変動するが、15 度の時は、Mach 反射のような挙動を示すことがわかる。

## 6. 結 語

非線形緩勾配方程式を用いて、平面の計算を精度よく安定に解くことのできる数値計算方法を提案し、入・反射波共存波浪場の計算を行った。その結果線形解とは精度よく一致し、さらに、非線形波による Mach 反射の起こる範囲では、波高の大きさは Yoon ら (1989) の示すように、入射角度が小さくなるほど波高は小さくなったが、波高の変動は、森屋ら (1995) の示すように緩やかになることがわかった。また、この結果はエネルギーの保存を満たしていることを確認し、計算の妥当性を示した。

さらに、任意の反射率を有する境界の取り扱い方法を提案し、消波効果のあるような壁沿いにおいても、Stem 波のような現象が見られることを明らかにした。今後は反射率をいろいろ変化させ、挙動を考察する予定である。

## 参 考 文 献

- 有川太郎・磯部雅彦 (1997): 非線形緩勾配方程式を用いた碎波判定法の適用性, 海岸工学論文集, 第 44 巻 (1), pp. 91-95.
- 石井敏雅・磯部雅彦・渡辺 晃 (1993): 非定常緩勾配不規則波動方程式における境界条件の改良と実用化の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻 (1), pp. 31-35.
- 磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻 (1), pp. 1-5.
- 大山 巧・喜岡 渉・多田彰秀 (1993): 非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について, 海岸工学論文集, 第 40 巻 (1), pp. 11-15.
- 森屋陽一・菊地正行・待立博樹・水口 優 (1995): 浅海域における周期波のマッハ反射について, 海岸工学論文集, 第 42 巻 (1), pp. 6-10.
- 森屋洋一 (1996): 斜め波の反射及び越波に関する基礎的研究, 中央大学 学位論文, p. 133.
- Yoon, S. B. and P. L.-F. Liu (1989): Stem waves along breakwater, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering (ASCE), Vol. 115, pp. 635-648.