

非線形緩勾配方程式を用いた回折の数値計算

Samir Abohadima*・余 錫平**・磯部 雅彦***

1. 序 論

近年, 高精度かつ実用的な浅海波動方程式が数多く発表され, それによって, 波浪変形における波の非線形性の影響が評価される傾向になってきている。しかしながら, 多くの既往研究において, 非線形波動方程式の解を求める際に必ずしも十分検討された数値計算法を用いたとは限らないため, 高精度な表現を必要とする現象に関しては十分な知見が得られたとは言えない。そこで本研究では, 磯部 (1994) によって提案された非線形緩勾配方程式に対して高精度な数値解が得られる差分法を提案し, それを防波堤背後への波の回折の数値計算に適用することによって, 回折現象における波の非線形性の影響を検討する。

波の回折現象に関してはこれまで多くの研究が行われてきた。半無限堤に対する Sommerfeld の解析解に基づいた Penney & Price (1952) の解が広く知られている。それを応用した Johnson (1952) の研究も実務者に多く引用されている。Mathieu 関数を用いた一文字防波堤および防波堤開口部周辺の波浪場に関する Carr & Stelzriede (1952) の厳密解, およびそれを実用化した Goda ら (1972) や Sobey & Jonsson (1986) の研究もあって, 一様水深における微小振幅波の回折に関してはほぼ正確な理解が得られている。また, 波の不規則性の影響も Wiegel ら (1971), Goda ら (1978) および Raissi & Wiegel (1978) の研究に示されている。これらはすべて微小振幅波に対するものであり, 本研究は回折現象における波の非線形性の影響を明らかにするものである。

2. 波動方程式

本研究に用いる波動方程式は磯部 (1994) によって提案された非線形緩勾配方程式である。まず, 波浪場を表す速度ポテンシャル ϕ を次のように級数表示する。

$$\phi(x, y, z, t) = Z_\alpha [h(x, y), z] f_\alpha(x, y, t) \quad \cdots (1)$$

ここに, $\alpha=1, 2, \dots$ に対して総和規約を適用する。 Z_α は既

知の鉛直分布関数 (ただし水平座標の変化に対してゆるやかに変化する。), f_α は鉛直座標に依存しない未知関数, h は平均水深, x および y は水平座標, z は鉛直座標, t は時間である。自由水面を有する理想流体運動の記述に用いる Lagrangian (Luke, 1967) に式 (1) を代入すると, そこに含まれる鉛直方向の積分を解析的に行うことが可能となる。Euler-Lagrange 方程式に積分された Lagrangian を代入すれば, 以下の非線形緩勾配方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} Z_\alpha^{(s)} \frac{\partial \eta}{\partial t} + [(2C_{a\alpha} + Z_\alpha^{(b)} Z_\beta^{(b)}) \nabla h + Z_\alpha^{(s)} Z_\beta^{(s)} \nabla \eta] \cdot \nabla f_\beta \\ + A_{a\alpha} \nabla^2 f_\beta + \left(\frac{\partial Z_\beta^{(s)}}{\partial h} Z_\alpha^{(s)} \nabla \eta \cdot \nabla h - B_{a\alpha} \right) f_\beta = 0 \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

$$\begin{aligned} Z_\beta^{(s)} \frac{\partial f_\beta}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} Z_\alpha^{(s)} Z_\beta^{(s)} \nabla f_\alpha \cdot \nabla f_\beta \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial Z_\alpha^{(s)}}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta^{(s)}}{\partial z} f_\alpha f_\beta \\ + \frac{\partial Z_\alpha^{(s)}}{\partial h} Z_\beta^{(s)} f_\alpha \nabla f_\beta \cdot \nabla h = 0 \end{aligned} \quad \cdots (3)$$

ただし, η は水面変動, ∇ は水平勾配演算子である。肩つき添字 s および b はそれぞれ自由水面 ($z=\eta$) および底面 ($z=-h$) における値を示す。また,

$$A_{a\alpha} = \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha Z_\beta dz \quad \cdots (4)$$

$$B_{a\alpha} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta}{\partial z} dz \quad \cdots (5)$$

$$C_{a\alpha} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} Z_\beta dz \quad \cdots (6)$$

である。後の数値計算を容易にするために, 式 (2) について磯部 (1994) と形式上少し異なったものを採用した。鉛直分布関数 Z_α につき, 原則として直交関数系を用いるのが望ましいが, 本研究においては以下のように与えることとする。

$$Z_\alpha = \left(1 + \frac{z}{h} \right)^{2(\alpha-1)} \quad \cdots (7)$$

式 (7) を用いれば以下の関係式が容易に得られる。

$$Z_\alpha^{(s)} = \zeta^{2\alpha} \quad \cdots (8)$$

* 学生会員 工修 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻
** 正会員 工博 (中国) 上海交通大学教授 応用力学科
*** フェロー 工博 東京大学教授 新領域創成科学研究科

$$Z_a^{(b)}=0 \dots\dots\dots(9)$$

$$A_{a\beta}=\frac{\zeta^{2(a_1+\beta_1)}+1}{2(a_1+\beta_1)+1}h \dots\dots\dots(10)$$

$$B_{a\beta}=\frac{4a_1\beta_1}{h} \frac{\zeta^{2(a_1+\beta_1)-1}}{2(a_1+\beta_1)-1}h \dots\dots\dots(11)$$

$$C_{a\beta}=-2a_1\zeta^{2(a_1+\beta_1)}\left[\frac{\zeta}{2(a_1+\beta_1)+1}-\frac{1}{2(a_1+\beta_1)}\right] \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $a_1=a-1$, $\beta_1=\beta-1$. 理論上、鉛直分布関数の個数を増せば波動方程式の精度が向上するが、基礎方程式および未知変数の個数もそれに依じて増えることとなるので、実質上、鉛直分布関数の個数がある程度を超えると、数値計算が膨大なものになってしまう。本研究では、線形波に対しては1個、非線形波の場合は2個を用いることとする。

3. 数値計算法

数値計算スキームを構築しやすくするために、形式上式(2)および(3)を以下のようなマトリックス方程式に書きかえる。

$$\Gamma_{ki}\partial V_i/\partial t + \Omega_{kij}V_iV_j=0 \dots\dots\dots(13)$$

ただし、 $V_i=\{f_a, \nabla f_a, \nabla^2 f_a, \eta, \nabla \eta, 1\}$; $i, j=1, 2, \dots, 6$; $k=1, 2$. また、 Γ および Ω は係数マトリックスであり、それぞれの要素(変数あるいは変数サブマトリクス)に関して、式(2)および(3)を参照することによって確定できる。

式(13)を以下のようにCrank-Nicolson法で差分化する。

$$\frac{\Gamma_{ki}^{n+1/2}(V_i^{n+1}-V_i^n)}{\Delta t} + (\Omega_{kij}V_iV_j)^{n+1/2}=0 \dots\dots\dots(14)$$

ただし、上添字 n , $n+1/2$ および $n+1$ はそれぞれ時刻 $n\Delta t$, $(n+1/2)\Delta t$ および $(n+1)\Delta t$ における値を示す。数値計算の精度を高めるために、本研究では繰り返し計算で時間ステップ $n+1/2$ および $n+1$ における値を求めることとする。時間ステップ $n+1$ における V_i の第 l 次繰り返し計算値を $(V_i^{n+1})^{[l]}$ とし、また、 V_i^{n+1} とその第 l 次繰り返し計算値の差を δV_i^{n+1} とすると、以下の関係式が成り立つ。

$$V_i^{n+1}=(V_i^{n+1})^{[l]} + \delta V_i^{n+1} \dots\dots\dots(15)$$

したがって、

$$V_i^{n+1/2}=(V_i^{n+1/2})^{[l]} + \frac{1}{2}\delta V_i^{n+1} \dots\dots\dots(16)$$

$$\begin{aligned} (V_iV_j)^{n+1/2} &\cong (V_i^{n+1/2})^{[l]}(V_j^{n+1/2})^{[l]} \\ &+ \frac{1}{2}[(V_i^{n+1/2})^{[l]}\delta V_j^{n+1} + \delta V_i^{n+1}(V_j^{n+1/2})^{[l]}] \end{aligned} \dots\dots\dots(17)$$

ただし、

$$(V_a^{n+1/2})^{[l]} \cong \frac{1}{2}[V_i^{n+1} + (V_i^{n+1})^{[l]}] \dots\dots\dots(18)$$

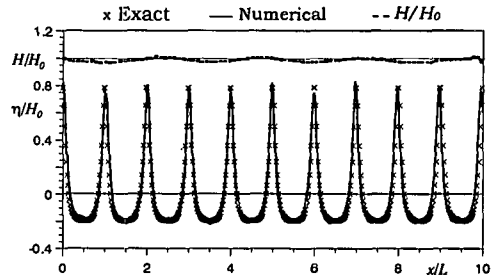
式(17)において微小量 δV_i^{n+1} に関する2次項を無視した。 Γ_{ki} および Ω_{kij} は f_a に依存しないため、以下の1次近似式も成立する。

$$\Gamma_{ki}^{n+1/2}=(\Gamma_{ki}^{n+1/2})^{[l]} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\Gamma_{ki}^{n+1/2})^{[l]}}{\partial \eta}\delta \eta^{n+1} \dots\dots\dots(19)$$

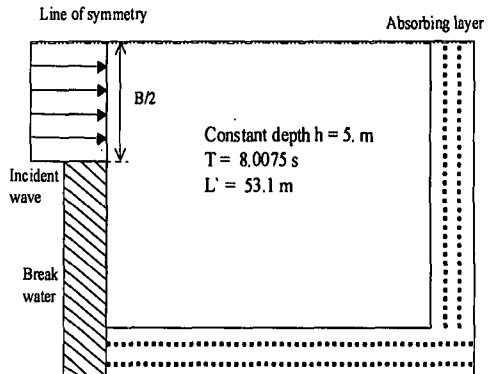
$$\Omega_{kij}^{n+1/2}=(\Omega_{kij}^{n+1/2})^{[l]} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\Omega_{kij}^{n+1/2})^{[l]}}{\partial \eta}\delta \eta^{n+1} \dots\dots\dots(20)$$

ただし、 $\delta \eta^{n+1}=\delta V_4^{n+1}$ である。また、 $(\Gamma_{ki}^{n+1/2})^{[l]}$ および $(\Omega_{kij}^{n+1/2})^{[l]}$ は式(16)に準じて定義されている。式(15)、(16)、(17)、(19)および(20)を式(14)に代入すると、以下の δV_i^{n+1} に関する線形代数方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{ki}^{n+1/2})^{[l]}\delta V_i^{n+1} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\Gamma_{ki}^{n+1/2})^{[l]}}{\partial \eta} \\ &\cdot [(V_i^{n+1})^{[l]} - V_i^n]\delta \eta^{n+1} + \frac{1}{2}(\Omega_{kij}^{n+1/2})^{[l]} \\ &\cdot [(V_i^{n+1/2})^{[l]}\delta V_j + \delta V_i(V_j^{n+1/2})^{[l]}]\Delta t \\ &+ \frac{\partial(\Omega_{kij}^{n+1/2})^{[l]}}{\partial \eta}(V_i^{n+1/2})^{[l]}(V_j^{n+1/2})^{[l]}\delta \eta^{n+1}\Delta t \\ &= (\Gamma_{ki}^{n+1/2})^{[l]}[(V_i^{n+1})^{[l]} - V_i^n] \\ &+ (\Omega_{kij}^{n+1/2})^{[l]}(V_i^{n+1/2})^{[l]}(V_j^{n+1/2})^{[l]}\Delta t \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$



図一 一様水深における非線形波の計算結果



図二 回折計算の領域

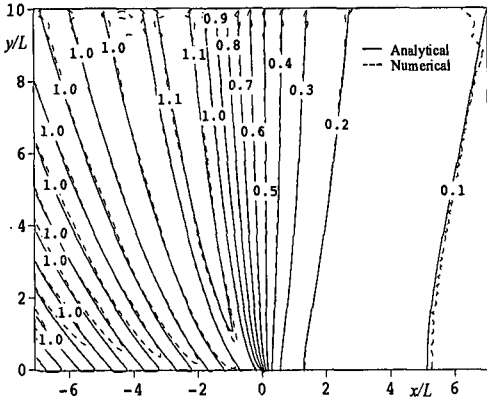


図-3 回折計算の結果

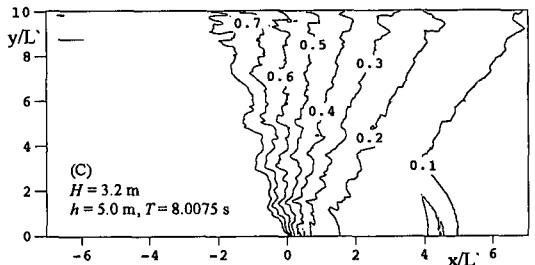
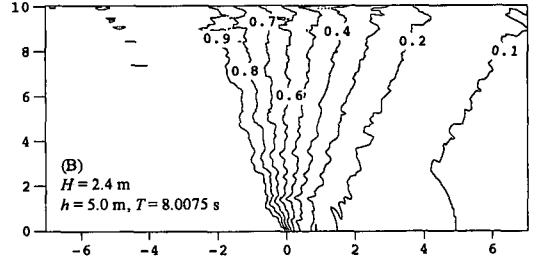
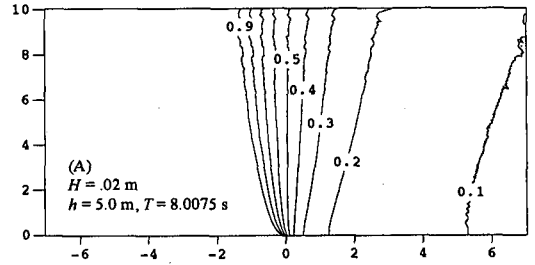


図-5 回折における波の非線形性の影響

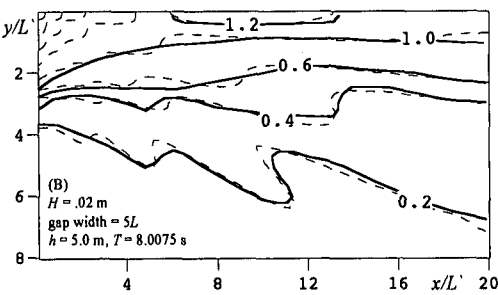
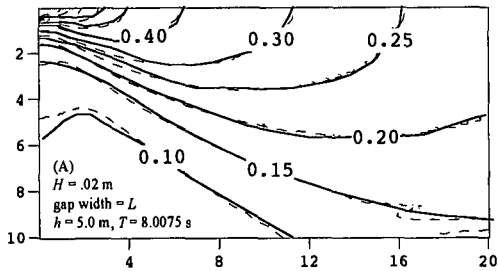


図-4 回折計算の結果

V_i^{n+1} に含まれている空間微分に対して、繰り返し計算毎に ADI 手法を用いれば、3重対角のマトリックス方程式を解くだけで δV_i^{n+1} が求められる。これによって V_i の第 $l+1$ 次繰り返し計算値を得ることができる。各時間ステップ毎に繰り返し計算を数回行うことによって、 V_i^{n+1} の相対誤差が予め指定された基準を満たすようになり、それを時間ステップ $n+1$ における V_i の値として、次の時間ステップの繰り返し計算に進み、最終的に V_i の数値解を得ることとなる。

4. 境界条件

防波堤背後への波の回折問題を解くために、不透過境界、造波境界および開境界の3種類の境界条件を定式化する必要がある。不透過境界に対しては、以下の条件を

与えればよい。

$$\frac{\partial f_a}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

造波境界に関して、入射波条件が既知であれば、 η および f_a を次のように指定することが可能である。

$$f_a = F_a(t) \dots\dots\dots (24)$$

$$\eta = E(t) \dots\dots\dots (25)$$

ただし、 $F_a(t)$ および $E(t)$ は以下のように定める。まず、与えられた入射波条件に対して流れ関数法 (Dean, 1965) を用い、 $E(t)$ および速度ポテンシャル $\phi(z, t)$ を計算する。最小2乗法に基づいて、計算された $\phi(z, t)$ を予め決定された鉛直分布関数系 $Z_a(z)$ の線形結合で表すことによって $F_a(t)$ を決定する。

開境界においては、Sommerfeld 放射条件を用いるが、その前面に吸波層を置くことを考える。吸波層の設置方法に関して Larsen & Dancy (1983) を参考することとした。つまり、吸波層内において各時間ステップ毎に計算された水面変動および流速に対して以下の係数で除算する操作を行う。

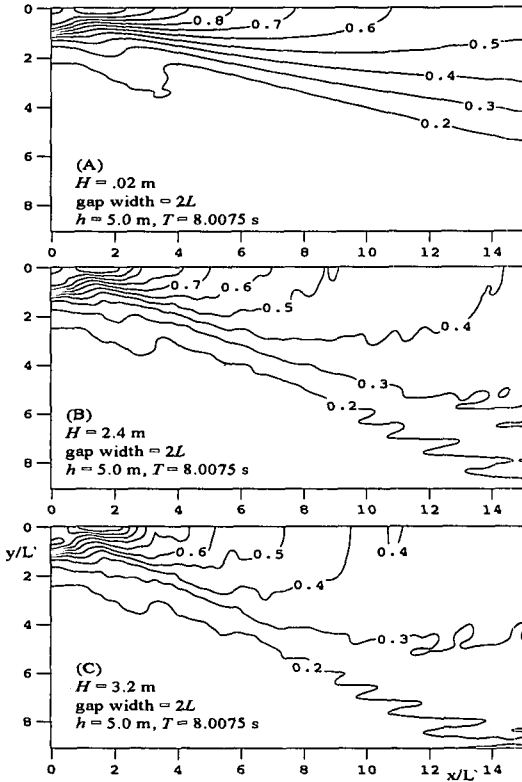


図-6 回折における波の非線形性の影響

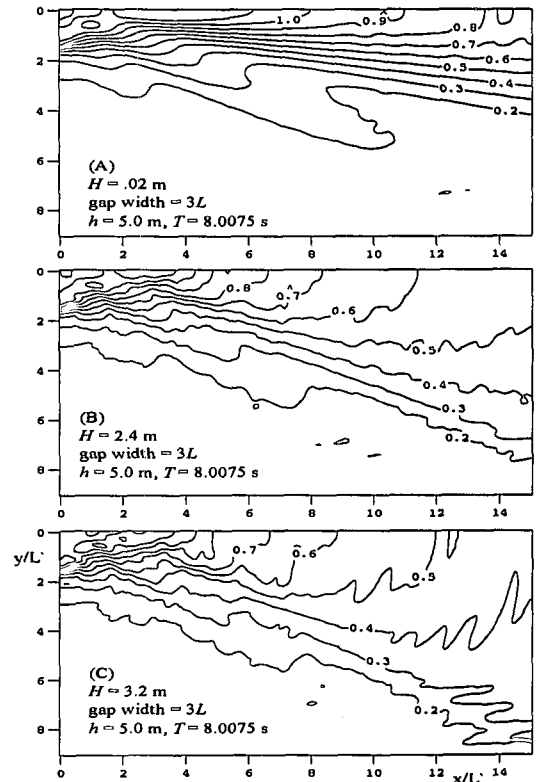


図-7 回折における波の非線形性の影響

$$\mu(s) = \begin{cases} \exp[(2^{-s/\Delta s} - 2^{-a/\Delta s}) \ln 2] & (0 \leq s \leq a) \\ 1 & (a < s) \end{cases} \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 s は境界の内向き法線方向の座標、 Δs は同方向に沿う格子間隔、 a は吸波層の厚さである。

5. 検証計算

図-1は、一様水深 $h=5.0$ m における周期 $T=8.0075$ s (沖波波長 $L_0=100$ m)、波高 $H=3.2$ m の波に対して計算された空間波形および空間波高分布を理論解と比較したものである。数値結果と理論解との間に有意な違いがほとんど見られないため、強非線形性の波に対する本研究の手法の有効性が確認できる。

回折現象への適用性を検証するために、半無限防波堤および防波堤開口部背後への微小振幅波の回折計算に本研究の数値計算法を用い、計算結果を解析解で検証してみることにした。計算領域は防波堤の方向に22波長分、入射波の進行方向に24波長分の範囲とした。直角入射の場合、物理問題の対称性を考慮して、図-2に示されているように、実際の計算は半分の領域において実施することとした。計算条件としては、 $\Delta x = \Delta y = L/20$ 、 $\Delta t = T/20$ (L =波長)である。図-3には計算された回折係数を示し

ている。計算値と Penney & Price (1952) の解析解の間に有意な差は見られない。

図-4は、一様水深 $h=5.0$ m において、異なる防波堤開口幅に対する周期 $T=8.0075$ s、波高 $H=0.02$ m の波の回折係数の計算結果を Johnson (1952) の解析解と比較したものである。精度よい数値結果が得られたことがわかる。

6. 波の回折における非線形性の影響

波の回折における非線形性の影響を検討するために、異なる波高の入射波に対する半無限防波堤の先端付近および防波堤開口部付近における回折係数分布の違いを調べることにした。一様水深 $h=5.0$ m の場合を考える。波の周期は $T=8.0075$ s とした。波高について $H=0.02$ m (微小振幅波)、2.4 m および 3.2 m と変化させた。数値計算における空間格子間隔および時間間隔をそれぞれ $\Delta x/L' = \Delta y/L' = 1/50$ 、 $\Delta t/T = 1/50$ とした。ただし、 L' は線形波理論による波長である。

図-5には半無限防波堤先端付近の回折係数の計算結果を示している。一方、図6~8にはそれぞれ開口度 $B/L' = 2, 3$ および 4 に対する防波堤開口部付近の回折係数の分布に関する計算結果である。これらの数値計算結

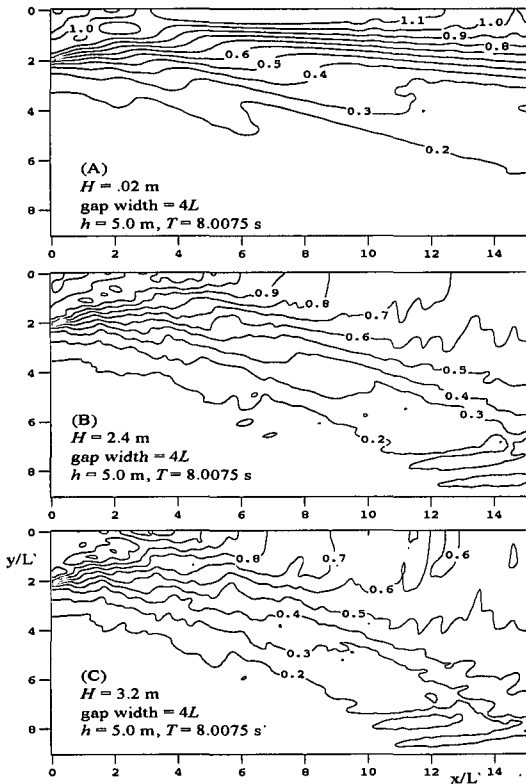


図-8 回折における波の非線形性の影響

果を総合すれば、波の非線形性が回折を促進する傾向に働くことがわかる。つまり、非線形性が強くなるほど波向き線の偏角が大きくなり、これに関係して、波の進行方向における波高の低減が加速される。

7. ま と め

磯部によって提案された非線形緩勾配方程式に対して有効な数値計算法を提案した。数値計算法を検証するために、まず、一様水深を進行する有限振幅波の計算を行った。次に防波堤背後への微小振幅波の回折計算を行い、その結果を Penney & Price (1952) および Johnson

(1952)の解析解と比較した。検証された数値計算法を用いて、異なる波高の入射波による防波堤先端付近での回折係数の違いを調べた上で、回折における非線形性の影響を明らかにした。その結果、波の非線形性が一般的に回折を促進する傾向に働くことがわかった。

本研究は文部省科学研究費の補助を得て行われたことをここに記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1994): 波浪解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No. 491/II-27, pp. 1-14.
- 合田良実・吉村知司・伊藤正彦 (1971): 島堤による波の反射および回折に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第10巻, 第2号, pp. 3-52.
- Dean, R. G. (1965): Stream function representation of non-linear ocean waves, *J. Geophysical Research*, Vol. 70(18), pp. 4561-4576.
- Carr, J. H. and Stelzriede, M. E. (1952): Diffraction of water waves by breakwaters, *Gravity Waves*, Circular No. 521, NBS.
- Goda, Y., Takayama, T., and Suzuki, Y. (1978): Diffraction diagrams for directional random waves, *Proc. of the 16th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE*, Ch. 35, pp. 628-650.
- Johnson, J. W. (1952): Generalized wave diffraction diagrams, *Proc. of 2nd Conf. on Coastal Eng., ASCE*.
- Larsen, J., and Dancy, H. (1983): Open boundaries in short wave simulation, *Coastal Eng.* Vol. 7, pp. 285-297.
- Luke, J. C. (1967): A variational principle for a fluid with a free surface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp. 359-397.
- Penney, W. G., and Price, A. T. (1952): The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters, *Phil. Trans. Royal Soc., London, England*, Vol. 244(A), pp. 236-253.
- Raissi, H., and Wiegel, R. L. (1978): Wind generated wave diffraction by breakwater gap, *Proc. 16th of the Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE*, Ch. 34, pp. 609-627.
- Sobey, R. J., and Johnson, T. L. (1986): Diffraction patterns near narrow breakwater gaps, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE*, Vol. 112(4), pp. 512-528.
- Wiegel, R. L., Al-Kazily, M. F., and Raissi, H. (1971): Wind generated wave diffraction by breakwater, *Tech. report HEL 1-19, Hydraulic Eng. Lab., Univ. of California, Berkeley, Calif.*