

鉛直不均質透水性地盤の波浪応答理論

北野利一*・溜本弘樹**・中野晋***・間瀬肇****

1. はじめに

海底地盤の波浪応答の研究においては、気泡を考慮した圧縮性間隙水と弾性体の土粒子骨格で構成される多孔質 2 相体として取り扱うのが一般的になってきた。これらの研究では、数学的な取り扱いが容易であるという点から、多孔質弾性地盤を等方かつ均質であるという便宜な仮定をしており、異方性や不均質性の地盤を扱った研究は現在のところわずかである(矢富ら, 1996; 北野ら, 1997; 石田・由比, 1997; Kitano and Mase, 1998; Kitano et al., 1998)。しかし、海底地盤の堆積過程や地盤そのものの自重による圧密効果などを考えると、水平互層構造による異方性や鉛直方向の不均質性を考慮するのがより現実的である。

異方性や不均質性を有する海底地盤の波浪応答を解析するにあたっては、有限要素法等の数値計算も利用できる。しかし、その効果・影響を一般的かつ系統的に明らかにするためには、解析解による検討が有効である。本研究では、透水係数が鉛直方向に変化する鉛直不均質透水性地盤に対する波浪応答理論を対象とするものであり、現象の理解に有効な境界層近似理論を導出し、透水性の鉛直不均質の効果を検討する。

2. 支配方程式

海底地盤は、土粒子骨格と間隙水の 2 相混合体として扱う。土粒子骨格は弾性体とし、変位と応力は Hooke の法則に従い、均質・等方性であるとする。間隙水の運動は、Darcy 則に従い、透水係数が鉛直方向に変化するものとする。透水係数が異方性を有する場合の波浪応答問題(北野ら, 1997; 石田・由比, 1997; Kitano and Mase, 1998; Kitano et al., 1998)によれば、水平方向の透水係数は波浪応答現象にほとんど寄与せず、鉛直透水係数についてのみ考慮すればいいので、Darcy 則は次のように表される。

$$K(z)\frac{\partial}{\partial x_3}p=n\frac{\partial}{\partial \tau}(u_3-v_3) \quad \cdots \cdots (1)$$

水平方向に $x_j(j=1,2)$ 軸、鉛直方向に x_3 軸をとし、 $K(z)$ は鉛直不均質性を表す透水係数、 v_j および u_j は土粒子骨格および間隙水の変動変位である。Darcy 則は間隙水の運動方程式である。その他、支配方程式として、2 相体の微小 6 面体における質量保存式と土粒子骨格相の運動方程式が必要である。間隙水の圧力変動をとすると、それらは以下のように表される。

$$n\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial \tau}u_j+(1-n)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial \tau}+\frac{n}{\theta}\frac{\partial}{\partial \tau}p=0 \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_j}p \quad \cdots \cdots (3)$$

ここで、 θ は圧縮性間隙水のみかけ上の体積変化率、 n は間隙率、 σ_{ij} は土骨格の応力テンソルである。なお、ひずみと応力の関係は、次の Hooke の法則に従うものとする。

$$\sigma_{ij}=G\left(\frac{\partial}{\partial x_j}v_i+\frac{\partial}{\partial x_i}v_j+\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}v_k\right) \quad \cdots \cdots (4)$$

G はせん断弾性率、 ν は Poisson 比である。問題を簡略化するため、無限大層厚の海底地盤を考える。海底地盤の表面および無限遠方における境界条件は以下のとおりである。

$$\sigma_{11}=\sigma_{33}=0 \quad (j=1,2), \quad p=e^{i(kx_1-\omega t)}; z=0 \quad \cdots (5)$$

$$p=u_j=v_j=0 \quad (j=1\sim 3); z=\infty \quad \cdots \cdots (6)$$

ここで、 k および ω は作用波の波数と角周波数を表す。

得られる解の物理的解釈を容易にするため、Mei and Foda (1981) による境界層近似の概念を用いる。境界層近似は、作用波のスケールに支配される一種の Terzaghi の圧密係数 (以下に現れる無次元量 ξ) が十分小さく、地盤の透水性の効果が認められる海底面からの深さが作用波の波長に比して十分小さいことを利用する。各相の変位、応力および圧力について、外部解 ($\sim$) と境界層補正解 ($\hat{\sim}$) に分けて

$$\left. \begin{aligned} (u_j, v_j) &= (kG)^{-1}(\tilde{u}_j + \varepsilon^2 \tilde{u}_j, \tilde{v}_j + \varepsilon^2 \tilde{v}_j) \\ (p, \sigma_{ij}) &= (\tilde{p} + \hat{p}, \tilde{\sigma}_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (7)$$

* 正 会 員 工務 徳島大学助手 建設工学科
** 学生会員 徳島大学大学院 工学研究科
*** 正 会 員 工博 徳島大学助教授 建設工学科
**** 正 会 員 工博 京都大学助教授 防災研究所

式 (7) のように無次元化するとともに、以下の無次元座標を用いる。

$$(x, y, z) = (kx_1, kx_2, kx_3), t = \omega\tau \quad \dots\dots\dots (8)$$

これらを利用して、境界層内のスケールにおける Hooke の法則は、次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \bar{\sigma}_{yy} = \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \bar{v}_z + O(\varepsilon^2) \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \bar{v}_z \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \bar{\sigma}_{yz} = \bar{\sigma}_{zx} = \bar{\sigma}_{zy} = O(\varepsilon) \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \bar{\sigma}_{yx} = O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

従って、境界層補正解のせん断力は無視できるので、海底地盤表面での外部解の境界条件は、以下になる。

$$\bar{\sigma}_{xx} = 0; \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

また、境界層補正解の支配方程式は、連続式

$$n \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}_3 - \bar{v}_3) + \frac{\partial}{\partial z} \bar{v}_3 + m \frac{\partial}{\partial t} \bar{p} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

と土粒子骨格の運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\sigma}_{xx} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} \bar{p} \\ \frac{\partial}{\partial y} \bar{\sigma}_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\sigma}_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} \bar{p} \\ \frac{\partial}{\partial z} \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \bar{p} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

と、式 (1) で表される Darcy 則となる。ここで、 m は飽和度に依存する無次元量である。境界層内の応力の釣り合い式 (12) を鉛直方向に積分して、

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) - \bar{p}(z) = \bar{\sigma}_{zz}(\infty) - \bar{p}(\infty) = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

を得ることができる。最左辺については境界層外縁では全ての物理量はその影響を失うことになる。これは、境界層補正解の有効応力は常に間隙水圧に等しく、海底地盤表面での全応力 $\bar{r}_{zz}$ は

$$\bar{r}_{zz}(0) = \bar{\sigma}_{zz}(0) - \bar{p}(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

となることを意味する。従って、式 (14) から外部解のもう一つの境界条件は、次のようになる。

$$\bar{r}_{zz}(0) = -e^{i(x-t)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

一方、外部解については透水性を考慮しない、つまり、

$$\bar{u}_j - \bar{v}_j = 0 \quad (j=1 \sim 3) \quad \dots\dots\dots (16)$$

が成立する領域として扱うため、弾性一相体の応答問題となるので、無限遠方で全ての物理量がゼロとなる条件である式 (6) と、海底地盤表面で式 (10) および式 (15)

の境界条件から導くことができ、間隙水圧は

$$\bar{p} = \frac{1}{1+m} e^{z+i(x-t)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。式 (17) より、間隙水圧の境界層補正項と外部項との比は $1:m$ となることがわかる。さらに、Hooke の法則における土骨格の弾性率に関して、異方性地盤の場合、その比は $1:m\Omega$ となる (北野ら, 1997; Kitano and Mase, 1998; Kitano et al., 1998)。以上の結果から、外部解は透水係数の均質・不均質にかかわらず、同じ結果が導かれることがわかる。

外部解が得られたので、透水係数に依存する境界層補正解について考える。式 (1) の Darcy 則において、海底面での透水係数で以下のように無次元化を行う。

$$\rho(z) \xi \frac{\partial}{\partial z} \bar{p} = \varepsilon^2 n (\bar{u}_3 - \bar{v}_3) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 ξ は、

$$\xi = \omega^{-1} GK(0)k^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

と定義される一種の Terzaghi の圧密係数であり、 $\rho(z)$ は正規化された透水係数の不均質関数である。式 (11)、(12) および (18) から、無次元化された境界層厚を次のように定義する。

$$\varepsilon = \sqrt{\xi / \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + m \right)} \quad \dots\dots\dots (20)$$

これは $K(z) = K = \text{const.}$ の時、透水性に関する均質・異方性地盤の境界層厚に等しくなる。境界層厚を定めることができたので、間隙水圧の境界層補正項についての支配方程式は、正規化されて以下になる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \bar{p} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{p} \quad \dots\dots\dots (21)$$

また、式 (17) の外部解の結果から、間隙水圧の境界層補正項の境界条件は次のようになる。

$$\bar{p}(0) = \frac{m}{1+m} e^{i(x-t)}, \quad \bar{p}(\infty) = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

以上の考察から、不均質透水性地盤の境界層内における波浪応答問題は圧密方程式である式 (21) について境界条件の式 (22) のもとでの固有値問題に帰せられることが明らかになった。

3. 不均質圧密方程式の厳密解析解

式 (22) で与えられるとおり、境界条件が水平空間および時間に対し正弦的であるので、解 $\bar{p}$ を次のように仮定する。

$$\bar{p}(x, z, t) = \bar{P}(z) e^{i(x-t)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

式 (23) を式 (21) に代入すると、鉛直関数 $\bar{P}(z)$ についての常微分方程式を得る。

$$\frac{d}{dz}\left\{\rho(z)\frac{d}{dz}\bar{P}\right\}+i\bar{P}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(24)$$

不均質性の圧密方程式である式 (24) において、透水係数 $\rho(z)$ の具体的な形が定まらないうと、一般的な議論は困難であるので、鉛直不均質性を表す関数を次のように仮定する。

$$\rho(z)=\exp(-2\alpha z), \quad \alpha>0 \quad \cdots\cdots\cdots(25)$$

式 (25) は、地盤内部にほど透水係数は小さくなることを示す。これは、海底地盤表面で土粒子が粗く、内部に向かって粒度が細かくなると仮定することに対応する。

まず、式 (24) の微分方程式を標準的な 2 階の常微分方程式に変形するために、鉛直関数 $f(z)$ について次のような Liouville 変換 (例えば、Dingemans, 1997 参照) を行う。

$$\bar{P}(z)=e^{\alpha z}f(z) \quad \cdots\cdots\cdots(26)$$

さらに次の変数変換を導入する。

$$s=\frac{\sqrt{-i}}{\alpha}e^{\alpha z} \quad \cdots\cdots\cdots(27)$$

以上の変換により、微分方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}f+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}f-\left(1+\frac{1}{s^2}\right)f=0 \quad \cdots\cdots\cdots(28)$$

と変形される。これは変形ベッセル関数の微分方程式である。その解は、積分定数 c_1, c_2 を用いると

$$f(s)=c_1K_1(s)+c_2I_2(s) \quad \cdots\cdots\cdots(29)$$

と表され、鉛直関数 $\bar{P}(z)$ に対して表示すれば、以下のとおりである。

$$\bar{P}(z)=\alpha\frac{1+i}{\sqrt{2}}s\{c_1K_1(s)+c_2I_2(s)\} \quad \cdots\cdots\cdots(30)$$

無限遠方 ($z\rightarrow\infty$ すなわち、 $|s|\rightarrow\infty$) での式 (30) における 2 つの独立解のふるまいは

$$\begin{aligned} sK_1(s) &\cong \sqrt{\frac{\pi}{2}}s\exp(-s)\left\{1+\frac{3}{8s}-\frac{15}{128s^2}+\cdots\right\} \\ sI_2(s) &\cong \sqrt{\frac{\pi}{2}}s\exp(s)\left\{1+\frac{3}{8s}-\frac{15}{128s^2}+\cdots\right\} \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(31)$$

であるので、式 (22) の境界条件を満たすためには

$$c_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots(32)$$

でなければならない。また、式 (22) のもう一つの境界条件から

$$c_1=\frac{m}{1+m}/K_1\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha^{-1}\right) \quad \cdots\cdots\cdots(33)$$

が得られる。ここで $\alpha\rightarrow 0$ の極限を考えると、式 (27) の変数は

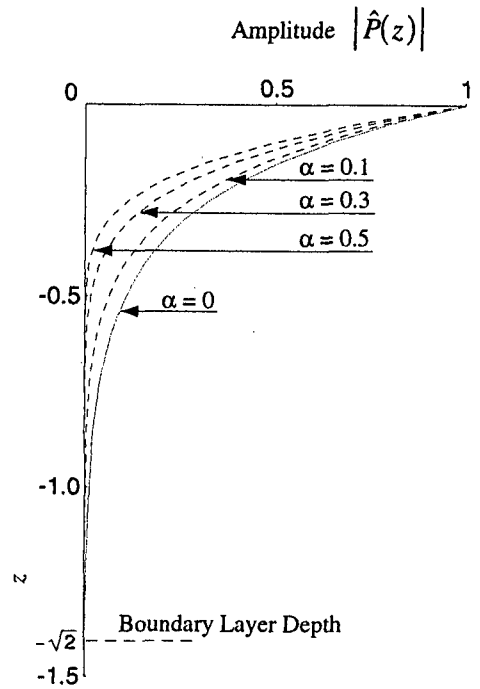


図-1 間隙水圧変動の振幅の鉛直分布

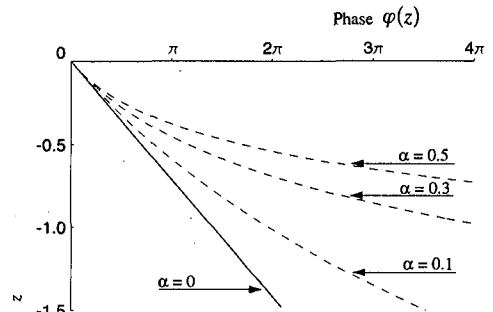


図-2 間隙水圧変動の位相の鉛直変化

$$s=\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\left(\alpha^{-1}+z+O(\alpha)\right) \quad \cdots\cdots\cdots(34)$$

となり、式 (28) は以下のように簡略化される。

$$\frac{d^2}{ds^2}f=f \quad \cdots\cdots\cdots(35)$$

従って、間隙水圧の境界層補正解は以下になる。

$$\bar{P}(z)=c\exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}z\right), \quad c=\frac{m}{1+m} \quad \cdots\cdots\cdots(36)$$

これは均質性地盤の解 (Mei and Foda, 1981) に一致する。

式 (32) および式 (33) で得られた係数を代入して、式 (30) の間隙水圧の振幅 $|\bar{P}(z)|$ についての鉛直分布を図-1 に示す。 α がゼロから増加、すなわち、不均質性が

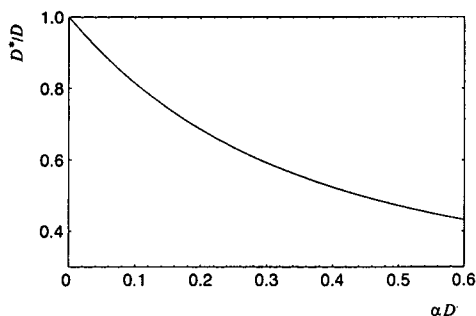


図-3 不均質性による境界層厚変化
(式 (40) の平均化による解)

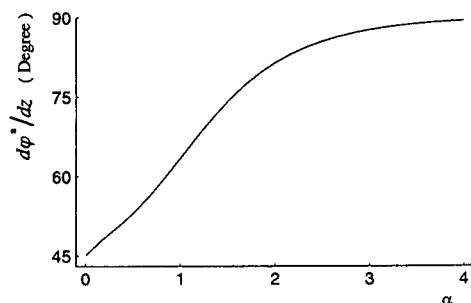


図-4 不均質性による位相遅れの勾配の変化

顕著になるにつれ、減衰が大きくなり、実質的には境界層厚が薄くなることがわかる。

境界層補正解は、一般に位相遅れを伴う。海底面の波圧変動に対する位相遅れを以下のように定義する。

$$\varphi(z) = \tan^{-1}\{\text{Im}(\hat{P}(z))/\text{Re}(\hat{P}(z))\} \quad (37)$$

$\alpha =$ である均質性地盤については、式(36)で表されたとおり、深さに比例する。 $\alpha > 0$ の不均質性地盤においては、その位相差は深さと比例関係にはないことが図-2からわかる。

4. 不均質圧密方程式の近似解

式(21)で与えられる不均質性海底地盤の圧密方程式の解である式(30)より、振幅の減衰や位相遅れの鉛直分布を図示することはできた。しかし、Bessel関数で表わされた式(30)は不均質性の効果を端的に評価する明解さに欠ける。そこで、式(26)のLiouville変換により得られた常微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f = (i\rho^{-1} + \alpha^2) f \quad (38)$$

をもとに、以下では不均質性海底地盤の圧密方程式の解の特性を調べる。

式(38)の右辺における関数 f の係数を定数とみなす

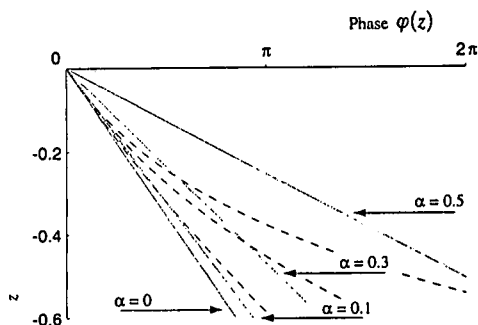


図-5 間隙水圧変動の位相の鉛直変化
(式 (44) の平均化による解)

と、その解は指数関数で表される。式(18)においては、底面での透水係数で不均質性の鉛直関数を正規化したのが、ここでは以下のように正規関数を考える。透水係数の鉛直分布において、境界層内(境界層厚： D)における平均透水係数 K^* を以下のように定義する。

$$K^* = \int_0^D K(z) dz / D \quad (39)$$

この時、みかけの境界層厚 D^* は

$$D^* = D \sqrt{\frac{K^*}{K(0)}} = D \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha D}}{2\alpha D}} < D \quad ; \alpha = 0 \quad (40)$$

となり、もとの層厚 D より小さくなる(図-3参照)。境界層内($0 \leq z \leq D$)で $1/\rho$ を平均して、

$$\Lambda(\alpha) = \int_0^D dz / \rho(z) = \frac{e^{2\alpha D} - 1}{2\alpha D} \quad (41)$$

となる。従って、境界層内で平均化した微分方程式(38)は、以下になる。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f^* = (i\Lambda(\alpha) + \alpha^2) f^* \quad (42)$$

その結果、間隙水圧変動の鉛直分布関数は

$$P^*(z) = \frac{m}{1+m} \exp z(\alpha - \sqrt{i\Lambda(\alpha) + \alpha^2}) \quad (43)$$

となる。従って、海底面での波圧変動との位相遅れは

$$\varphi^* = z \text{Im} \sqrt{i\Lambda(\alpha) + \alpha^2} \quad (44)$$

となる。図-4に不均質性の勾配 α を変化の対応する位相遅れの勾配 $d\varphi^*/dz$ の変化を示す。不均質性が顕著になる(α が増加する)につれて、位相遅れが大きくなることがわかる。また、鉛直分布について、3.で得られた厳密解と比較した結果を図-5に示す。ここで導かれる結果は、境界層内での平均化されたものであるという意味で、厳密解と非常に良く一致する。また、厳密解の位相遅れの鉛直分布が下に凸になる性質についても、本章と同様、平均化による簡易法で示すことができるが、これ

は別の機会にゆずる。

5. 結 論

本研究では、海底地盤の透水係数が鉛直方向に指数的に変化する場合の波浪応答解を導いた。その解は式(32)および式(33)の係数を代入した式(30)で示される変形ベッセル関数で表され、 $\alpha \rightarrow 0$ の極限で、Mei and Foda (1981)による均質地盤に対する波浪応答解に一致することを示した。

得られた解によると、不均質性が顕著になるにつれ、実質的に境界層厚が薄くなり、また、位相遅れが大きくなることを示した。

境界層および位相遅れに関して、微分方程式の平均化による評価を試み、ベッセル関数による厳密解との比較を行った。その結果、式(40)および式(44)で示される簡易な方法での評価でも不均質性の効果を評価できることがわかった。

最後にグラフ作成に協力して頂いた重岡典昭君(大学院生)に感謝します。

参 考 文 献

- 北野利一・間瀬 肇・中野 晋 (1997): 異方性を有する海底地盤の波浪応答の近似理論, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 906-910.
- 石田 啓・由比政年 (1997): 直交異方性海底地盤の波浪応答特性に対する理論解析, 土木学会論文集, No. 572, II-40, pp. 49-61.
- 矢富盟祥・由比政年・石田 啓・渡部英一 (1995): 海底地盤の波浪応答に対する地盤の異方性の影響, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 906-910.
- Dingemans, M. W. (1997): Water wave propagation over uneven bottoms, part 1-Linear wave propagation, pp. 383-384.
- Kitano, T. and H. Mase (1998): Boundary Layer Approximation for Wave-Induced Pore Pressures to Anisotropic seabed, Jour. of Waterway, Port, Coastal & Ocean Eng., ASCE (in printing).
- Kitano, T., Mase, H. and S. Nakano (1998): Approximation theory for wave-induced responses of anisotropic seabed, ICHE 98 (in printing).
- Mei, C. C. and M. A. Foda (1981): Wave induced responses in fluid filled poro-elastic solid with a free surface-a boundary theory, Geophy. J. R. Astr., Vol. 68, pp. 597-637.