

界面の粘性を考慮した Boussinesq 方程式によるトレンチ内の底泥の挙動解析

喜 岡 渉*・Md. Akter Hossain**・柏原 謙爾***

1. はじめに

波作用下での底泥の運動は, シルテーションによる港湾や航路の埋没問題を検討する上でも重要な要素である。中野ら (1991) は, 波動場では底泥が流動化して底泥層 (fluid mud) に波動運動が生じた後に巻き上げが生じることを明らかにしており, 底泥波と巻き上げ現象は密接に関わっていることを示している。また, 鶴谷ら (1994) は, fluid mud の挙動が航路や泊地の堆積にも直接関連することに着目して, 浮遊状態の泥の沈降によって fluid mud が形成されるとみなし, その流動計算を組み込んだシルテーション予測モデルを開発している。

一方で, トレンチやポケット浚渫への堆積底泥に生じる波動運動は, 周辺境界の影響を受け, 進行波下で一般的な底泥層に生じる底泥波と大きく異なることが Ting (1994) および Ting・Lemasson (1996) によって示されている。特に, トレンチ内の流動化した底泥層の内部波モードの共振周期が入射波周期と一致するとき, 底泥波の振幅は入射波高が比較的小さい場合でもかなり大きくなり, その挙動は線形理論では説明できないことが明らかにされている (Ting・Lemasson, 1996)。また, 鉛直岸壁のような反射境界前面にトレンチが設けられた場合, トレンチ内の底泥波の挙動は進行波下のものと異なることが予想されるが, 重複波の作用下での検討はなされていない。本研究では, こうした波-底泥-構造物の相互干渉の問題を検討するもので, 底泥波の挙動を支配する底泥界面の粘性を考慮した Boussinesq 方程式を用いて, トレンチ内に部分的に堆積した底泥に加え, 満杯状態の底泥の挙動, および鉛直壁前面に設けたトレンチ内の底泥の挙動を解析するものである。

2. 界面の粘性を考慮した Boussinesq 方程式

底泥を流体とみなし, 図-1 に示すような 2 次元 2 層密度流体を考える。静水時の上層と下層の流体の層厚をそれぞれ, h, d とし, 静水時の両流体の界面を界面変動

についての基準面とする。自由表面の変動を ζ , 界面の変動を ξ とすると, 両流体層はそれぞれ $-h+\xi < z < \zeta$, $-d-h < z < -h+\xi$ の領域で定義され, 各流体層における流体運動の基礎方程式は非圧縮性流体の連続式および Navier-Stokes 方程式により与えられる。いま, 両流体層のコア部分については粘性の影響を無視できるものとし, 非回転運動を仮定する。一方, 自由表面, 流体界面, 不透過境界の各境界近傍については境界層を考える。ただし, 上層流体は下層流体に比べて粘性が非常に小さく上層に対する境界層の影響は無視し得るとし, さらに底面の境界層における回転成分についてもその流速は小さく省略できるものと仮定すると, 各境界に対する条件式はそれぞれ次のように与えられる。

$$p_1=0 \quad (z=\zeta) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$\zeta_t + \zeta_x u - w = 0 \quad (z=\zeta) \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$p_1 - 2\rho_1 \nu_1 w_z = p_2 - 2\rho_2 \nu_2 (W + \hat{W})_z \quad (z=-h+\xi) \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$\xi_x [u - (U + \hat{U})] - [w - (W + \hat{W})] = 0 \quad (z=-h+\xi) \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$(U + \hat{U})_x + (W + \hat{W})_x = 0 \quad (z=-h+\xi) \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$u = U + \hat{U} \quad (z=-h+\xi) \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

$$dx U + W = 0 \quad (z=-d-h) \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

ここに, u, w および U, W はそれぞれ上層流体および下層流体の水平方向, 鉛直方向流速成分, p は圧力, ρ は密度, ν は動粘性係数を表し, 添字 1, 2 はそれぞれ上層流体, 下層流体における物理量であることを示している。また, $\hat{U}, \hat{W}$ はそれぞれ下層流体の界面近傍の境界層における水平方向, 鉛直方向の回転流速成分を表す。なお, 添字 x, z, t はそれぞれ水平方向, 鉛直方向, 時間についての微分を表している。式 (1), (2) はそれぞれ

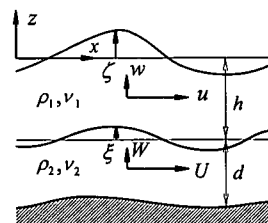


図-1 座標系と記号の定義

自由表面における力学的および運動学的境界条件, 式 (3), (4) はそれぞれ界面における力学的および運動学的境界条件である。また, 式 (5), (6) はそれぞれ界面におけるせん断力および水平

* 正 会 員 Ph.D. 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科
** 学生会員 名古屋工業大学 大学院工学研究科
*** 正 会 員 工 修 名古屋工業大学助手 工学部社会開発工学科

方向流速の連続条件, 式 (7) は底面における不透過条件を与える式である。

Boussinesq 方程式の誘導にあたって, 代表水深 h_0 , 代表振幅 a_0 および代表角周波数 ω を用いて無次元量パラメーター $\varepsilon = a_0/h_0$, $\mu = \omega^2 h_0/g$ を定義し, 独立変数および物理量を無次元化する。ただし, 表示を簡潔にするため, 以下では無次元量を次元量と同じ記号で表す。ここでは上層流体の粘性による影響については無視しているが, これは $\nu_1/\nu_2 = O(\varepsilon^2)$ と仮定することに相当する。回転成分 $\bar{U}$, $\bar{W}$ については $\bar{W}/\bar{U} \approx O(\varepsilon^2)$ とみなせるので, $O(\varepsilon)$ のオーダーの精度まで考える弱粘性の Boussinesq 方程式においては, $\bar{W}$ に関する項は無視することができる。連続式, 運動方程式ならびに境界条件式 (1)~(9) を速度ポテンシャル Φ , Ψ により記述し, $\bar{W}$ を省略するとともに式 (6) を用いて $U + \bar{U}$ を消去すると, 無次元量で次の各式を得る。

$$\mu^2 \Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0 \quad (-h + \xi < z < \zeta) \quad \cdots \cdots (10)$$

$$\mu^2 \Psi_{xx} + \Psi_{zz} = 0 \quad (-d - h < z < -h + \xi) \quad \cdots \cdots (11)$$

$$\varepsilon \Phi_t + z + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\Phi_x^2 + \frac{1}{\mu^2} \Phi_z^2 \right] = -p_1 \quad (-h + \xi < z < \zeta) \quad \cdots \cdots (12)$$

$$\varepsilon \Psi_t + z + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\Psi_x^2 + \frac{1}{\mu^2} \Psi_z^2 \right] = -p_2 \quad (-d - h < z < -h + \xi) \quad \cdots \cdots (13)$$

$$p_1 = 0 \quad (z = \zeta) \quad \cdots \cdots (14)$$

$$\varepsilon \xi_t + \varepsilon \mu^2 \xi_z \Phi_x - \Phi_z = 0 \quad (z = \zeta) \quad \cdots \cdots (15)$$

$$p_1 - \frac{1}{\mu^2} 2\rho_1 \nu_1 \Phi_{zz} = p_2 - \frac{1}{\mu^2} 2\rho_2 \nu_2 \Psi_{zz} \quad (z = -h + \xi) \quad \cdots \cdots (16)$$

$$\Phi_{xx} + \Psi_{zz} = 0 \quad (z = -h + \xi) \quad \cdots \cdots (17)$$

$$\mu^2 d_z \Psi_x + \Psi_z = 0 \quad (z = -d - h) \quad \cdots \cdots (18)$$

ここで, 水深方向に層積分を行い境界条件式を代入すると, 連続式 (10), (11) は次の積分形表記の方程式に書き換えられる。

$$\xi_t + \left[\int_{-h+\xi}^{\xi} \Phi_x dz \right]_x + \left[\int_{-d-h}^{-h+\xi} \Psi_x dz \right]_x = 0 \quad \cdots \cdots (19)$$

$$\xi_t + \left[\int_{-d-h}^{-h+\xi} \Psi_x dz \right]_x = 0 \quad \cdots \cdots (20)$$

まず, 速度ポテンシャル Φ , Ψ を次式のように底面まわりに水深方向について Taylor 展開する。

$$\Phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(z+h)^n \Phi_n(x, t)] \quad \cdots \cdots (21)$$

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(z+h+d)^n \Psi_n(x, t)] \quad \cdots \cdots (22)$$

上式をそれぞれラプラス式 (10), (11) に代入すると Φ_n , Ψ_n の漸化式, 式 (17), (18) に代入すると Φ_1 , Ψ_1 の Φ_0 , Ψ_0 で表された式が得られる。次に, Φ_n , Ψ_n , Φ_1 , Ψ_1 の

式から $O(\varepsilon) \approx O(\mu^2)$ の仮定下で $O(\mu^4)$ の精度をもつように Φ , Ψ を Φ_0 , Ψ_0 を用いて表記する。この表記式を式 (19), (20) に代入すると, それぞれ上層流体, 下層流体の連続式を得る。一方で, 式 (12), (13) に代入して $O(\mu^4)$ の精度をもつ p_1 , p_2 の式を導き, これらを自由表面および界面の境界条件式 (14) および式 (16) に代入すると運動量方程式が導かれる。

これらの方程式は, 両流体層における底面水平方向流速 $\partial \Phi_0 / \partial x$, $\partial \Psi_0 / \partial x$ で表されているため, $O(\mu^4)$ のオーダーで水深平均水平方向流速 $\bar{u}$, $\bar{U}$ による表記式に書き換えると, 最終的に界面の粘性を考慮した 2 層密度流体の Boussinesq 方程式は物理量表記で次式により与えられる。

$$\xi_t + [(h + \xi - \xi) \bar{u}]_x + [(d + \xi) \bar{U}]_x = 0 \quad \cdots \cdots (23)$$

$$\xi_t + [(d + \xi) \bar{U}]_x = 0 \quad \cdots \cdots (24)$$

$$\bar{u}_t + \bar{u} \bar{u}_x + g \xi_x - \frac{1}{3} h^2 \bar{u}_{xxt} - \frac{1}{2} h (d \bar{U}_t)_{xx} = 0 \quad \cdots \cdots (25)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_t + \bar{U} \bar{U}_x + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) g \xi_x + \frac{1}{\gamma} g \xi_x + \frac{1}{6} d^2 \bar{U}_{xxt} \\ - \frac{1}{2} d (d \bar{U}_t)_{xx} - \frac{1}{\gamma} \left[h (d \bar{U}_t)_{xx} + \frac{1}{2} h^2 \bar{u}_{xxt} \right] \\ - 2 \left(\nu_2 - \frac{1}{\gamma} \nu_1 \right) \bar{U}_{xx} = 0 \quad \cdots \cdots (26) \end{aligned}$$

ただし, γ は上層流体に対する下層流体の密度比 $\gamma = \rho_2/\rho_1$ である。

3. 数値計算法

式 (23)~(26) の計算は喜岡ら (1997) と同様, 差分法によった。水面変動 ξ および界面変動 ξ は, それぞれ上層流体および下層流体の連続式 (23), (24) から陽的に計算されるが, 上層流体および下層流体の流速 $\bar{u}$, $\bar{U}$ は運動量方程式 (25), (26) にともに陰的に含まれるため, 両式を同時に陰的に解くことによって求めた。また, 底泥のない上層流体のみの領域の波動場の計算には Peregrine の式を用いた。入射境界は上層流体のみが存在する計算領域に設定し, 水面変動 ξ と流速 $\bar{u}$ を与えた。また, 反射壁およびトレンチ内の壁面境界はすべて完全反射境界として取り扱った。

4. 実験方法

模型実験には, 長さ 26.0 m, 幅 0.60 m, 高さ 1.20 m の両面ガラス張り 2 次元造波水槽を用いた。造波水槽の中央付近から勾配 1/10 の斜面を設置し, 水深 12 cm で水平床を接続させた断面に, 斜面から 5.2 m 離してトレンチを設けた。トレンチは, 図-2 に示すように深さ 5 cm, 幅 50 cm の長方形断面で, トレンチ背後が水平床の

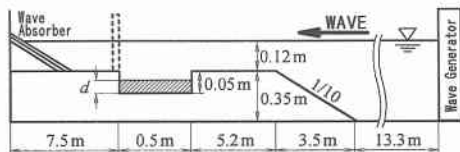


図-2 実験装置の概要

ケースと、トレンチ直背後に鉛直壁を設けたケースについて実験を行った。入射波としては規則波を用い、入射波高 H は沖側の一定水深部でほぼ2.0 cmになるようにし、入射波周期 T は0.8 s～1.6 sの範囲内で変化させた。底泥の層平均密度 ρ_2 は1.20 g/cm³前後で、底泥厚 d は3 cmおよび満杯の5 cmの2種類とした。

底泥には中央粒径が50 μ mのシルトを水とよく混ぜ合わせてスラリー状態にしたものを用い、あらかじめ両端に仕切り板を設け水平床と完全に遮断したトレンチ内に d cmの厚さまで入れて、トレンチ内外の水深が12 cmになるまで水を注入した後、トレンチ内を攪拌し底質と水を十分に混合させた。混合後1時間放置し底質を自然に沈殿、圧密させて所定の底泥層厚 d cmになった時点でトレンチ両端の仕切り板を取り除いた。密度 ρ_2 は実験直後に底泥表面まで排水した上で、底泥表面の水をスプーンで取り除いた後、計測した。

トレンチ背後が水平床のケースではトレンチ後端から80 cmの地点、トレンチ直背後に鉛直壁を設けたケースでは鉛直壁前面において、容量式波高計により水面変動を計測した。同時に、水槽側方からデジタルビデオカメラによりトレンチ内の底泥界面の空間波形を撮影し、画像処理した拡大ビデオ画像からその変動を読み取った。

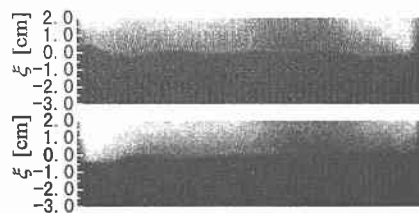
5. 実験および計算結果と考察

(1) 動粘性係数

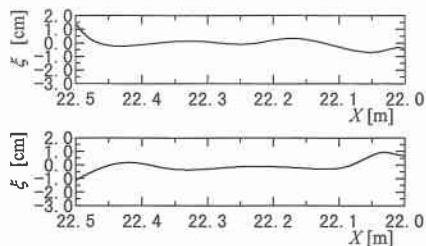
ここでは、底泥は波作用下で流体化し、粘性流体として振る舞うものとして取り扱っている。波と底泥の相互干渉下では、流動化層厚は動的变化を受けて入射波高や周期によって変化するが(Fodaら, 1993)、ここでは密度 ρ_2 が一定の流体層を考え、粘性は境界層近似により動粘性係数 ν_2 を介して評価している。動粘性係数 ν_2 は計測していないので、せん断力の大きさと無関係に密度 ρ_2 のみによって決まるとして従来の実験結果(Fodaら, 1993; Ting・Lemasson, 1996)より求めた。実験に用いた底泥については平均で $\nu_2=16.37$ cm²/sである。

(2) 進行波下での挙動

底泥厚 $d=3$ cmのケースにおいては、入射波周期が底泥界面の内部モードの共振周期に近いとき界面変動は比較的大きく、 $T=1.53$ sの実験では、図-3に示すように表面波とは異なり内部波による3つの峰が現れている。



(a) 実験波形



(b) 計算波形

図-3 底泥の界面変動

($T=1.53$ s, $H=2.0$ cm, $d=3$ cm, $\rho_2=1.18$ g/cm³)

図-3(a)の上の画像は図左端のトレンチ端通過側における変動が最大となったときの界面波形で、下の画像はそれから $T/2$ 後の波形を示すものである。表面波および内部波ともに長波近似が成り立つとすると、線形理論より共振周期 T は次式により与えられる。

$$T = \frac{2l}{n} \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)hd}{\rho_1 g(h+d)}} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (27)$$

ただし、 l はトレンチ幅、 h は底泥界面上の水深を示す。実験に用いた入射波周期の範囲内では $n=1, 2$ に対応するモードは現れず、 $T=1.53$ sは式で $n=3$ の共振周期にほぼ一致している。このときの計算波形は図-3(b)に示すように、底泥界面の挙動をよく再現している。図-4にトレンチ端入射側と通過側における底泥界面の時間波形を示す。実験波形および計算波形ともに、通過側における変動が入射側に比べてわずかに大きくなっている。計算結果は実験波形と比べると変動振幅を過大に評価する傾向があるが、ビデオ画像において変動のピーク値を読み取ることは難しく、実験波形のピーク値が過小に評価されている可能性がある。通過側の界面変動はすべての周期 T に対して入射側より大きく現れており、その差異はここに示した内部モードの共振周期付近以外の T に対してより著しい。

図-5はトレンチの入射側(斜面から1.3 m離れた地点)と通過側(トレンチ後端から0.8 mの地点)における表面波の時間波形を計算波形とともに示したものである。計算波形と実験波形の位相は入射側で合わせてある。底泥界面の変動が比較的大きいこの周期では、トレンチ幅が表面波の波長の半分以下の場合においても粘性によ

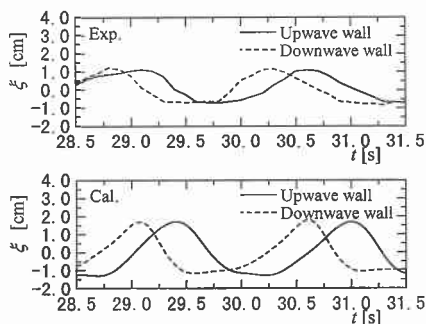


図-4 トレンチ端における底泥の界面変動
($T=1.53$ s, $H=2.0$ cm, $d=3$ cm, $\rho_2=1.18$ g/cm³)

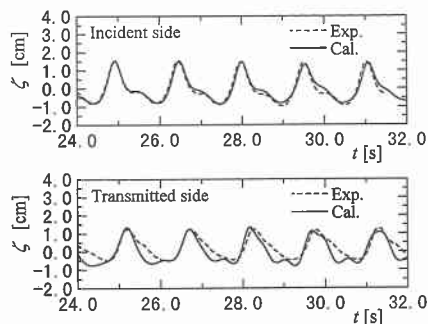
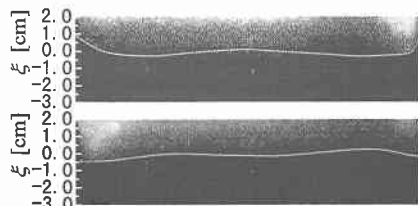


図-5 表面波の比較
($T=1.53$ s, $H=2.0$ cm, $d=3$ cm, $\rho_2=1.18$ g/cm³)

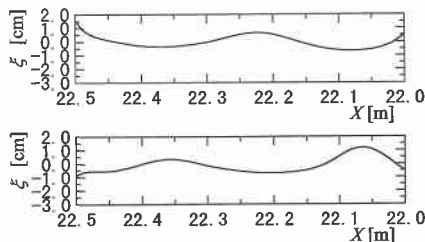
る減衰が生じ、実験ならびに計算結果ともに通過側では振幅が小さくなっている。ただし、計算波形に見られる高調成分は実験波形には現れていない。

表面波のトレンチによる $n=1$ の共振周期にほぼ対応する $T=1.60$ s の結果を図-6 に示す。図の界面波形は、それぞれ図-3 と同様に、トレンチ通過側端の変動が最大となる位相の波形を上、それから $T/2$ 後の波形を下に示してある。表面波モードの共振周期下においても底泥界面の変動は著しく、内部モードによる2つの峰が現れている。この周期においては底泥の巻き上げが激しく、浮遊状態の泥と流動層を区別するため図-6(a) の画像にその界面を白線で示してある。Boussinesq 方程式モデルにおいては上層流体の粘性を無視していることもあり、浮遊泥層が発生したこのケースでは計算結果は振幅を過大に評価する傾向がある。このときのトレンチ両端における底泥界面の変動を比較したものが図-7 である。実験波形および計算波形ともに通過側端の方がその振幅は大きい。実験波形はビデオ画像から読み取っているので、特にピーク値付近については読み取り誤差の可能性があるが、計算値は両端ともに実験値とよく一致している。

トレンチ内の底泥を満杯とした $d=5$ cm のケースに



(a) 実験波形



(b) 計算波形

図-6 底泥の界面変動
($T=1.60$ s, $H=2.0$ cm, $d=3$ cm, $\rho_2=1.19$ g/cm³)

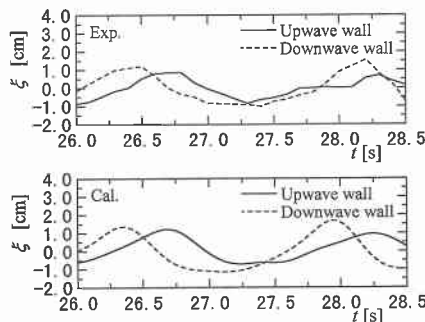
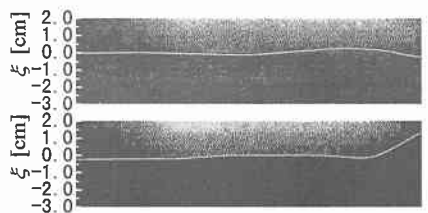


図-7 トレンチ端における底泥の界面変動
($T=1.60$ s, $H=2.0$ cm, $d=3$ cm, $\rho_2=1.19$ g/cm³)

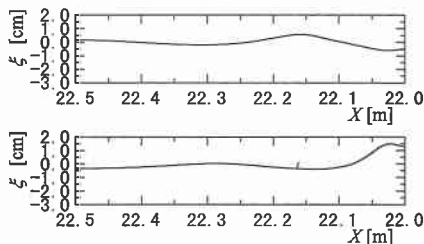
おいては、底泥界面の変動は $d=3$ cm のケースに比べていくぶん大きくなり、界面波の発生に伴ないトレンチ両端では越流が起こる。ただし、図-3 に示したような内部モードによる重複波の共振現象は発生しにくくなり、この周期 $T=1.53$ s については $d=5$ cm の界面変動の方が $d=3$ cm のケースと比べて小さい。越流のため底泥層厚が多少減少するので $d=5$ cm の底泥界面について計算結果と実験結果の厳密な比較は行えないが、トレンチ両端付近を除くと計算波形は実験波形をよく再現している。

(3) 重複波下での挙動

トレンチ直背後に鉛直壁を設けて重複波を作用させたときのトレンチ内の底泥の挙動は進行波のものと著しく異なる。入射波周期 $T=1.53$ s のときの底泥の界面変動を計算結果とともに図-8 に示す。図-3 に示した進行波



(a) 実験波形



(b) 計算波形

図-8 重複波動場での底泥の界面変動
($T=1.53$ s, $H=2.0$ cm, $d=3$ cm, $\rho_2=1.18$ g/cm³)

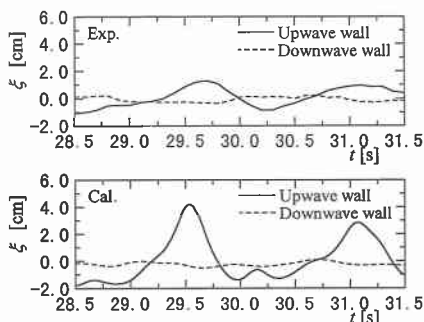


図-9 重複波動場でのトレンチ端における底泥の界面変動
($T=1.53$ s, $H=2.0$ cm, $d=3$ cm, $\rho_2=1.18$ g/cm³)

の結果と比べると、重複波動場では波峰は1つしか現れず、表面波の波高が倍になるにもかかわらず図右側のトレンチ入射側端付近を除いて界面変動は小さくなる。ただし、底泥の巻き上げは進行波のケースより激しく、ビデオ画像は流動層を白線で区分している。図-9は、トレンチ入射側端と後端鉛直壁における底泥界面の時間波形を示すもので、後端反射壁においては実験および計算波形ともその振幅はきわめて小さくなっている。入射側端では特に計算波形の振幅が大きく現れているが、入射側端では振幅が2 cm以上になると越流するので、越流を考慮していない計算波形は見かけ上変動を大きく評価する。また、実験には画像の読み取り誤差がある。

このときの表面波について入射側(斜面から1.3 m離れた地点)と鉛直壁の各点で実験結果と計算結果を比較したものが図-10である。重複波動場の結果からは表面波の減衰特性を議論することはできないが、進行波に比

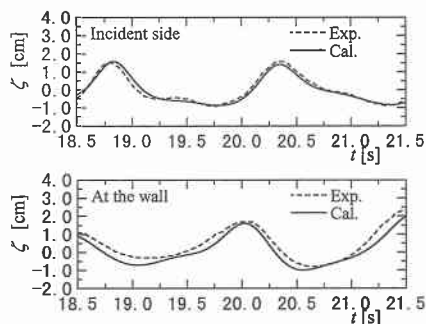


図-10 重複波動場での表面波の比較
($T=1.53$ s, $H=2.0$ cm, $d=3$ cm, $\rho_2=1.18$ g/cm³)

べて底泥による波高減衰の度合いは小さいようである。

6. おわりに

底泥と流体の界面における粘性を考慮した Bousinesq 方程式を導き、それによりトレンチ内の底泥の挙動を調べた。弱い粘性を仮定した弱非線形の波動方程式であるにもかかわらず、表面波、または底泥界面に生じた内部波がトレンチ内で共振を起こすケースについても、底泥波の挙動をよく再現することがわかった。特に、進行波下ではトレンチ通過側端における底泥界面の変動が入射側端より常に大きく現れるが、こうした傾向を計算モデルで再現することができた。また、トレンチ直背後に鉛直壁を設けたケースでは、鉛直壁付近の界面変動はきわめて小さくなり、入射側の変動が相対的に大きくなるのが実験および計算の両面より明らかになった。ただし、計算モデルにおいては流動底泥層の越流や浮遊泥の影響は考慮されておらず、これらの効果を考えることはトレンチ内の底泥の挙動解析を進める上でも重要であることから今後の課題としたい。

参考文献

- 喜岡 渉・柏原謙爾・Md. Akter Hossain・猪垣智晴 (1997): 流動化した底質による湾水振動の制御について, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 711-715.
- 鶴谷広一・村上和男・入江 功・笹嶋 博・糸井正夫 (1994): Fluid Mud を考慮した三次元シミュレーション予測モデルについて, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 1011-1015.
- 中野 晋・伊東信幸・井上 洋 (1991): 波による底泥の流動限界と巻き上げ限界, 海岸工学論文集, 第38巻, pp. 461-465.
- Foda, M. A., J. R. Funt and H. T. Chen (1993): A nonlinear model for the fluidization of marine mud by waves, J. Geophys. Res., Vol. 98, pp. 7039-7047.
- Hill, D. F. and M. A. Foda (1996): Subharmonic resonance of short internal standing waves by progressive surface waves, J. Fluid Mech., Vol. 321, pp. 217-233.
- Ting, F. C. K. (1994): Wave interaction with mud fluid in rectangular trench, J. Waterwave Port Coastal Ocean Eng., Vol. 120, pp. 154-178.
- Ting, F. C. K. and W. J. Lemasson (1996): Dynamic response of fluid mud in a submarine trench to water waves, Coastal Eng., Vol. 27, pp. 97-121.