

基底展開による簡易津波数値解析法

河 田 恵 昭*・小 池 信 昭**

1. 緒 言

津波数値解析を実際の問題に適用する場合としては、地震断層モデルを想定して事前評価を行う場合や、津波数値予報に適用する場合などがある。事前評価でも気象庁に新たに導入される数値予報でも、あらかじめ断層パラメータやその位置などを数多く変化させてそれらによる影響を調べるが、すべてを調べ尽くすことはできないので、中間にあるものは近くのものから補間しようとするのが一般的な考え方である。しかし、最近の研究によって、津波の高さはマグニチュードに比例して大きくなるのではなく、地震の規模が小さくても津波の周期が湾の固有周期と一致すれば津波の高さが大きくなる場合があることがわかってきた。したがって、計算結果を補間によって求めようとする場合、単純に近くのものから補間するのは、その信頼性に問題が生じることになる。

ところで、津波の支配方程式は海域の大部分のところで線形長波方程式によって表されるので、その解についても重ね合わせが成り立つ。すなわち、ベクトル空間の基本的な性質である線形結合が成り立つが、この線形結合によってすべてのベクトルが得られるような最少個数のベクトルのことを基底という。このことに着目すれば、あらかじめそれぞれの基底について方程式の解を計算しておけば、どのような断層モデルから計算される津波初期波形であっても、それを基底に展開してしまえばそれらの解の重ね合わせで実際の解が得られるため、解を補間によって近似するよりも精度が高いと考えられる。したがって、問題はどのような基底に展開すれば実際に数値計算を行った場合と同等の精度が得られるかということに帰着する。ここでは、基底展開による津波数値解析の誤差評価と、実際の問題への適用性について検討した。

2. 基底展開による津波数値解析法

2.1 基底展開

ベクトル空間の基本的な性質は、少数のベクトルを何倍かして足しあわせることによってさまざまなベクトル

が得られることである。これを重ね合わせの原理とよぶ。津波の初期波形をベクトルとみなせば、少数の初期波形を何倍かして足し合わせるによってさまざまな初期波形が得られることになる。このような操作を線形結合という。このことは画像の場合と類似しており、画像の場合も線形結合によってさまざまな画像が得られる。その線形結合によってあらゆるベクトルが得られるような最少個数のベクトルを基底とよぶ。ベクトル空間の基底はどう選んでもそれを構成するベクトルの数は一定であることが知られている。その数をベクトル空間の次元とよぶ。

$n \times n$ 要素の場合、ベクトルの基底を $\{e_k\}$, $k=1, 2, \dots, n^2$ とすると、任意の初期波形 η_0 は、次のように基底の重ね合わせとして表わせる。

$$\eta_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_{n^2} e_{n^2} \dots \dots \dots (1)$$

このような操作を初期波形の基底に関する展開とよび、各項をその基底に関する成分とよぶことにする。

また、基底 $\{e_k\}$ を初期条件として津波の数値計算を実行した結果を $\{\eta_k\}$ とすれば、初期波形 η_0 に対する数値計算結果 η は、重ね合わせの原理より、

$$\eta = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_{n^2} \eta_{n^2} \dots \dots \dots (2)$$

と表せる (河田・小池, 1997)。

2.2 自明な基底

(i, j) 要素のみが 1 で、残りの要素がすべて 0 であるベクトルを e_{ij} と書くと、ベクトルの組 $\{e_{ij}\}$, $i, j=1, \dots, n$ は明らかに基底である。したがって、 (i, j) 要素の水位が c_{ij} である初期波形は、

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} e_{ij} \dots \dots \dots (3)$$

と展開できる。 e_{ij} は、自明な基底あるいは自然な基底などとよばれる。ただし、自明な基底を初期条件にして津波の数値計算をすると、計算精度を保って数値計算するためには 1 波長を 20~40 分割する必要があるという条件に反するため、多少の工夫が必要になる。

2.3 自明な基底の拡張

自明な基底の特徴は、基底の展開係数がその場所の水位の大きさと与えられるという実に明快な点にある。したがって、この特徴を残しつつ計算精度も満足させるた

* フェロー 工博 京都大学教授 防災研究所 巨大災害研究センター
** 学生会員 工修 京都大学大学院 工学研究科

めに、図-1のような基底を提案した。この基底は、半波長分が32メッシュで構成されるので、計算精度を満足させることができると同時に、基底を足しあわせるとすべて1になるので、基底の展開係数がその場所の平均水位の大きさと与えられるという特徴も合わせもっている。式で表すと、次式のようになる。

$$e_{ij} = \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} c(i) \cdot c(j) \dots\dots\dots (4)$$

$$c(i), c(j) = \begin{cases} \frac{i-1}{15}, \frac{j-1}{15} & \text{for } i, j \leq 16 \\ 1 - \frac{i-17}{15}, 1 - \frac{j-17}{15} & \text{for } i, j \geq 17 \end{cases}$$

2.4 離散コサイン変換

これは、初期波形を周波数ごとに展開しようとするものである。フーリエ変換でなくてコサイン変換を選んだのは、津波の波長は長いので周波数は低くなるが、それが低周波数域に効率よくエネルギーが集中するコサイン変換の特徴に一致するからである。この性質のため、高周波数成分は省略しても誤差は大きくなりなく、効率よく計算が行えることが予想される。

通常、2次元離散コサイン変換は、以下の式で表される。

$$F(u, v) = \frac{2}{n} C(u) C(v) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \eta(i, j) \times \cos \frac{(2i+1)u\pi}{2n} \cos \frac{(2j+1)v\pi}{2n} \dots (5)$$

また、2次元逆離散コサイン変換は、以下の式で表される。

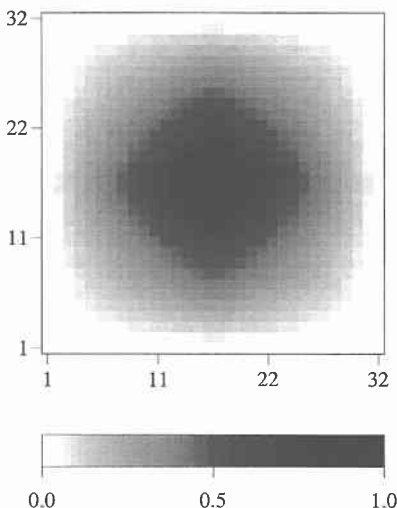


図-1 自明な基底の拡張

$$n(i, j) = \frac{2}{n} \sum_{u=0}^{n-1} \sum_{v=0}^{n-1} C(u) C(v) F(u, v) \times \cos \frac{(2i+1)u\pi}{2n} \cos \frac{(2j+1)v\pi}{2n} \dots (6)$$

$$C(u), C(v) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{for } u, v = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、 $i, j, u, v = 0, 1, \dots, n-1$, i, j は空間領域でのサンプルの座標、 u, v は周波数領域でのサンプルの座標を表す。

実際に離散コサイン変換を基底として数値解析するには、以下のようにすればよい。式(6)が基底展開の式(1)にあたるので、式(6)の

$$\frac{2}{n} C(u) C(v) \cos \frac{(2i+1)u\pi}{2n} \cos \frac{(2j+1)v\pi}{2n}$$

が基底となり、式(1)の $\{e_k\}$ に相当する。また、式(6)の $F(u, v)$ が式(1)の展開係数 c_k に相当する。

したがって、あらかじめ離散コサイン変換の基底を初期条件として津波の数値計算を実行して結果を出力しておき、初期波形 η_0 が与えられたら式(5)を用いて展開係数 $F(u, v)$ を求めれば、式(2)より初期波形 η_0 の数値計算結果 η が求められることになる。

3. 誤差評価

例として、1944年東南海地震の相田モデル(相田, 1979)からMansinha・Smylie(1971)の方法で初期波形を計算し、通常の方法で津波の数値解析をしたものと、基底展開による解の重ね合わせによって計算したものとを比較することによって、その精度を調べることにした。なお、相田モデルの断層パラメータを表-1に示す。

計算領域は、図-2のような計算格子間隔を約1kmとする 400×400 メッシュをとった。さらに、図-2にあるように断層の周辺の 256×256 メッシュ分(図で網掛けの部分)だけを基底展開することにした。

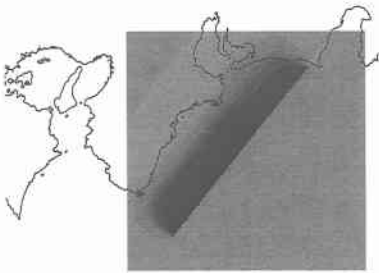
基底としては、1)自明な基底を拡張したもの、2)離散コサイン変換による基底をとりあげた。離散コサイン変換については、最低周波数から $8 \times 8 = 64$ までの成分(すなわち、式(5)、(6)において $u, v = 0, 1, \dots, 7$)と、 $16 \times 16 = 256$ までの成分($u, v = 0, 1, \dots, 15$)を考慮した場合を取り上げた。そして、それぞれに対してa)津波初期波形の誤差、b)代表点における時間波形の誤差、c)代表時刻(1時間後)における平面2次元波形の誤差を評価した。

3.1 津波初期波形の誤差

1944年東南海地震の相田モデルから計算される初期波形と、これをそれぞれの基底に展開して合成したものを図-3に表す。平均2乗誤差はどれも10cm前後であ

表一 相田モデルの断層パラメータ

	S-W fault	N-E fault
fault length (km)	154	84
fault width (km)	67	78
dip direction (deg)	N 45 W	N 45 W
dip angle (deg)	30	30
depth (km)	1	1
dip slip (m)	2.01	1.35
right-lateral (m)	-0.68	-0.45



図一2 計算領域と基底展開の領域

り、図一3からわかるように見た目からも近似の精度はあまりよくないように見える。

3.2 代表点における時間波形の誤差

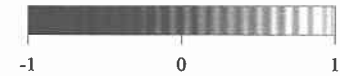
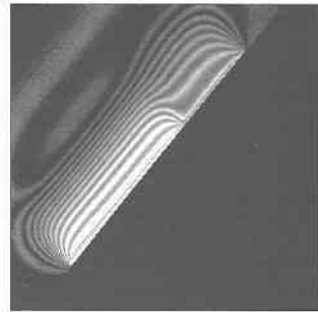
三重県尾鷲における時間波形の比較を図一4に表す。これを見ると、離散コサイン変換で基底展開した場合は、ほとんど誤差はないことがわかる。初期波形の近似の精度は悪かったが、津波初期波形の主成分は低周波成分であるので、計算結果についてはそれほど誤差は大きくならないと判断することができる。ただし、自明な基底の拡張は、波の峰と谷のところで近似の精度が悪いようである。また、表一2には尾鷲を含めた9つの代表点の誤差の平均値を示した。

3.3 代表時刻における平面2次元波形の誤差

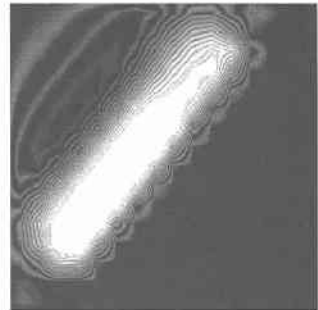
代表時刻（地震後1時間）における平面2次元波形の比較を図一5に表す。初期波形で高周波成分が抜けているので、基底展開した場合は1時間後の波形も高周波成分が再現できていない。しかし、離散コサイン変換では低周波成分は比較的再現できている。自明な基底の拡張の場合は、波の形が見えない。

3.4 ま と め

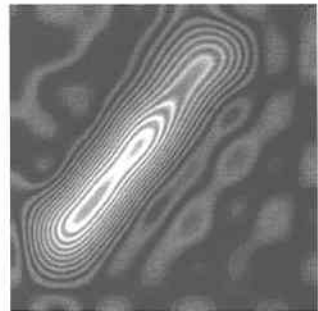
相対誤差評価のまとめとして、表一2にそれぞれの基底による相対誤差および平均2乗誤差を表した。これらから以下ことが言える。基底展開による津波数値解析法は、津波という現象を再現するには精度が十分とは



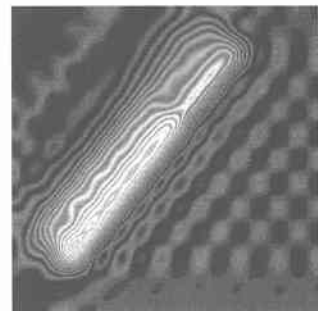
(a) 相田モデルの初期波形（単位：m）



(b) 自明な基底の拡張

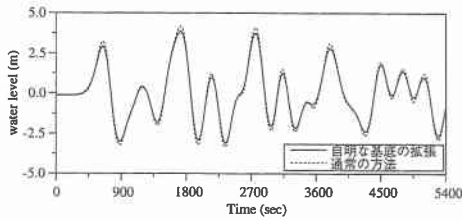


(c) 離散コサイン変換（64成分）

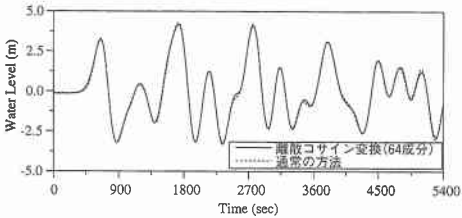


(d) 離散コサイン変換（256成分）

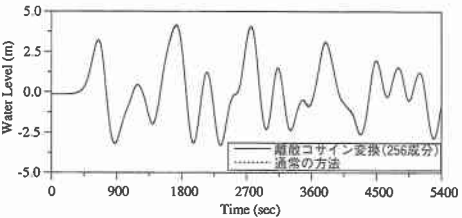
図一3 津波初期波形の基底展開の比較



(a) 自明な基底の拡張



(b) 離散コサイン変換 (64 成分)



(c) 離散コサイン変換 (256 成分)

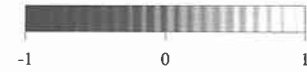
図一4 代表点における時間波形の比較

言い難いが，最大水位や到達時間などの伝播特性を求める津波防災対策のために行う数値解析には，十分な精度で解析を行うことができる。

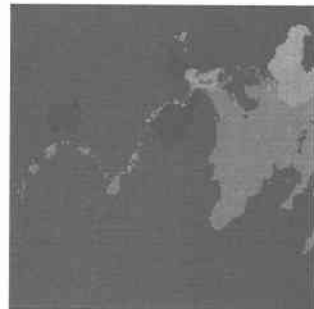
4. 断層の大きさと基底との関係

3章では，例として1944年東南海地震の相田モデルの場合の誤差を求めたが，断層の大きさと基底の関係によっては，初期波形が十分に基底展開することができずに誤差が大きくなる可能性がある。ここでは，相田モデルの断層パラメータのうち，長さと幅だけを120%，80%，60%の大きさにした断層モデルについて，3章と同様にa) 津波初期波形の誤差，b) 代表点における時間波形の誤差，c) 代表時刻（1時間後）における平面2次元波形の誤差を評価した。それぞれの断層モデルの長さ

と幅を表一3に示す。
それぞれの断層モデルを基底展開して数値解析した場合の相対誤差と平均2乗誤差を表一4から表一6に示す。ただし，基底をA：自明な基底の拡張，B：離散コサイン変換（64成分），C：離散コサイン変換（128成分）とする。これを見る限り，断層の大きさが小さくなると初期



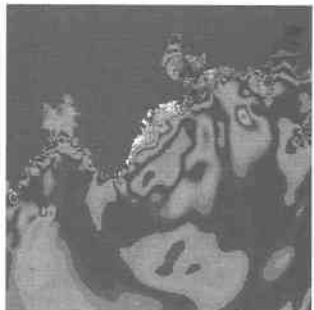
(a) 相田モデルで通常の方法で計算



(b) 自明な基底の拡張



(c) 離散コサイン変換 (64 成分)



(d) 離散コサイン変換 (128 成分)

図一5 代表時刻における平面2次元波形の比較

表-2 それぞれの基底による相対誤差と平均2乗誤差

基底	初期波形の誤差	時間波形の誤差	平面2次元波形の誤差
自明な基底の拡張	19.3%(11.2 cm)	12.0%(7.3 cm)	13.8%(8.8 cm)
離散コサイン変換(64成分)	16.5%(12.9 cm)	18.4%(9.8 cm)	1.6%(3.6 cm)
離散コサイン変換(256成分)	14.3%(9.3 cm)	5.9%(3.2 cm)	1.1%(2.5 cm)

表-3 断層モデルの長さと同幅

	S-W fault		N-E fault	
	長さ (km)	幅 (km)	長さ (km)	幅 (km)
120%	185	80	101	94
相田モデル	154	67	84	78
80%	123	54	67	62
60%	92	32	50	47

表-4 津波初期波形の相対誤差(%)と平均2乗誤差 (cm, 括弧内)

	A	B	C
120%	15.5(12.2)	11.6(14.5)	11.7(10.3)
相田モデル	19.3(11.2)	16.5(12.9)	14.3 (9.3)
80%	20.3(10.0)	20.3(11.8)	17.6 (8.3)
60%	22.8 (9.0)	35.5(11.2)	26.6 (7.3)

A: 自明な基底の拡張

B: 離散コサイン変換 (64成分)

C: 離散コサイン変換 (256成分)

波形の近似度は悪くなるが、計算結果に関してはそれほど大きな影響はないようである。

1. 結 語

1) ここで取り上げた基底展開による2つの方法は、通常の数値計算結果との誤差が数cm程度であるので、実際問題への適用において実用上十分な精度で計算することができる。

2) 自明な基底を拡張したものと離散コサイン変換による方法を比較した場合、計算精度および必要な基底の数でも離散コサイン変換による方法の方が優れていることがわかった。

表-5 時間波形の相対誤差(%)と平均2乗誤差 (cm, 括弧内)

	A	B	C
120%	12.5(7.8)	20.9(11.3)	7.4(3.8)
相田モデル	12.0(7.3)	18.4 (9.8)	5.9(3.2)
80%	9.5(6.0)	15.7 (8.5)	3.5(2.1)
60%	9.1(5.1)	18.0 (9.2)	3.5(1.9)

表-6 平面2次元波形の相対誤差(%)と平均2乗誤差 (cm, 括弧内)

	A	B	C
120%	9.2(9.7)	2.0(3.8)	1.3(2.7)
相田モデル	13.8(8.8)	1.6(3.6)	1.1(2.5)
80%	11.3(7.3)	2.7(3.3)	1.0(2.3)
60%	5.3(5.6)	2.7(3.2)	0.7(2.0)

3) 離散コサイン変換による方法は周波数ごとに基底展開するので、湾の固有周期との共振を考える場合にも都合がよい。

4) 以上の点を考えると、離散コサイン変換による基底展開は、津波の性質も考慮した非常に有効な簡易津波数値解析法であることがわかる。

参 考 文 献

- 相田 勇(1979): 1944年東南南海地震津波の波源モデル, 東大地震研報, Vol. 54, pp. 329-341.
- 河田恵昭・小池信昭(1997): 重ね合わせの原理に基づく津波数値解析方法, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 271-275.
- Mansinha, L and D. E. Smylie (1971): The displacement fields of inclined faults, Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 61, No. 5, pp. 1433-1440.