

微積分方程式を用いた方向スペクトルの高精度推定法 に関する研究

泉 宮 尊 司*・二 木 央**・泉 正 寿***

1. 緒 言

これまで種々の方向スペクトル推定法が提案されているが, その中でもベイズ型モデルを用いた推定法(BDM)および拡張最大エントロピー法(EMEP)は, 推定精度が高く, 現地観測データにも適用されてきている(橋本ら, 1988, Hashimoto et al., 1994)。しかしながら, BDM法は格子探索法等の繰り返し計算が必要のために, 計算が複雑で時間がかかるといった欠点を有している。また, 拡張最大エントロピー法はそれに比べて計算はやや簡単であるが, 波浪観測装置の配置やノイズの混入率によっては, 厳密な収束解が得られない場合がある(橋本ら, 1993, Kim et al., 1994)。

一般に方向スペクトルの推定法には, クロススペクトルと方向スペクトルとの関係式が用いられるが, この関係式を可能な限り満たし, かつ方向分布関数 $G(\theta)$ の値が非負で, その積分値が 1 となる条件が課せられる。精度が高いと言われている EMEP は, これらの条件をすべて満たしており, BDM では最後の条件が取り入れられていない。しかしながら, クロススペクトルの推定誤差やノイズの混入がある場合には, これらの条件をすべて満たす一意的な解が存在しない可能性がある。

そこで本研究では, 方向分布関数がある連続関数として取扱い, 自由度を最大限に大きくして考え, 拘束条件を汎関数に取り入れて, 汎関数の極値条件を満たす方向分布関数の満たすべき方程式を変分原理に基づいて導く。得られる方程式は, 方向分布関数をそのまま用いた場合には線形の微積分方程式となるが, それを指数関数に置いた場合には非線形の微積分方程式となる。これらを差分法で数値計算することにより, 比較的簡単に方向スペクトルを推定することができる。これらの推定法の精度を検討するために, 数値シミュレーションを行い, 理論値と比較検討している。

2. 方向スペクトルの推定法

方向スペクトルを推定する際には, 次の方向スペクトル $S(f, \theta)$ とクロスパワースペクトル $\Phi_{mn}(f)$ との関係式が一般に用いられる。

$$\Phi_{mn}(f) = \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) S(f, \theta) \times [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] d\theta \quad (1)$$

ここに, θ は成分波の波向, f は周波数, k は波数, $x_{mn} = x_n - x_m$, $y_{mn} = y_n - y_m$ であり, (x_n, y_n) は n 番目の波動量観測位置である。 $H_m(f, \theta)$ は波動量の水面変動に対する伝達関数であり, $*$ は共役複素数を表す。方向スペクトル $S(f, \theta)$ は, 一般に周波数スペクトル $S(f)$ と方向分布関数 $G(\theta|f)$ との積で表される。

$$S(f, \theta) = S(f) G(\theta|f) \quad (2)$$

ここで, 式の表現を簡単にするために, 橋本(1987)と同様に,

$$H_i(f, \theta) = H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \times [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] \quad (3)$$

とおくことにする。式(2)および式(3)の関係をいうと, 式(1)は次式のように書き換えられる。

$$\phi_j(f) = \Phi_{mn}(f) / S(f) = \int_0^{2\pi} H_j(f, \theta) G(\theta|f) d\theta \quad (j=1, \dots, N) \quad (4)$$

ここに, N は独立なクロスパワースペクトルの数である。上式において, $\phi_j(f)$ および $H_j(f, \theta)$ は一般に複素数であり, 実変数を用いて次式のように表すことにする。

$$\phi_j(f) = p_j(f) - iq_j(f) \quad (5)$$

$$H_j(f, \theta) = R_j(f, \theta) - iI_j(f, \theta) \quad (6)$$

式(4)は, 方向スペクトルとクロススペクトルの厳密な関係式であるが, ノイズの混入やクロススペクトルの推定誤差が存在する場合には, 厳密には成立しない。したがって, クロススペクトルの誤差も実数部と虚数部に分けて, 次式のように表す。

* 正会員 工博 新潟大学教授 工学部建設学科
** 工修 新潟市
*** 正会員 国際航業(株)

$$\begin{aligned} p_j(f) &= \int_0^{2\pi} R_j(f, \theta) G(\theta|f) d\theta + \varepsilon_j \\ q_j(f) &= \int_0^{2\pi} I_j(f, \theta) G(\theta|f) d\theta + \varepsilon'_j \\ (j=1, \dots, N) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、 ε_j および ε'_j は、平均値が 0 の互いに独立な Gauss ノイズ成分であると仮定する。

一般に方向スペクトルの推定には、上の条件を可能な限り満たし、かつ方向分布関数の値が非負で、その積分値が 1 となる条件が課せられる。この積分値が 1 となる条件は、周波数スペクトル $S(f)$ および方向スペクトルの両方が厳密に推定される時に成立する関係で、それらが誤差を伴う場合にはその拘束条件は正確でなくなる。そこで、本研究では Gauss ノイズ成分の 2 乗和 $\sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon'_j{}^2$ と積分値の拘束条件を用いて、次のような汎関数を定義する。

$$\begin{aligned} J(G, G_{00}) &= w^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} (\Delta\theta) \right\}^2 d\theta \\ &+ \sum_{j=1}^N \left\{ \int_0^{2\pi} R_j(f, \theta) G(\theta|f) d\theta - p_j(f) \right\}^2 \\ &+ \sum_{j=1}^N \left\{ \int_0^{2\pi} I_j(f, \theta) G(\theta|f) d\theta - q_j(f) \right\}^2 \\ &+ \left\{ \int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta - 1 \right\}^2 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに、 w はある重み係数、 $\Delta\theta$ は方向角の間隔であり、右辺第 1 項は橋本 (1987) が用いたのと同様に推定値の滑らかさと安定性を保つための項である。

式 (8) の汎関数の極値問題は、変分原理を用いると次式を満たすことが要求される。

$$\begin{aligned} w^2 G_{0000}(\Delta\theta)^* &+ \sum_{j=1}^N R_j(f, \theta) \int_0^{2\pi} R_j(f, \theta^*) G(\theta^*|f) d\theta^* \\ &+ \sum_{j=1}^N I_j(f, \theta) \int_0^{2\pi} I_j(f, \theta^*) G(\theta^*|f) d\theta^* \\ &+ \int_0^{2\pi} G(\theta^*|f) d\theta^* \\ &= \sum_{j=1}^N \{ R_j(f, \theta) p_j(f) + I_j(f, \theta) q_j(f) \} + 1 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

上式は、方向分布関数 $G(\theta^*|f)$ に関する線形微積分方程式 (Linear Integro-Differential Equation) であるので、この方程式に基いた方向スペクトルの推定法を LIDE と呼ぶことにする。

この LIDE による推定法では、方向分布関数の非負性が取り入れられていないが、 $G(\theta|f) = e^{\psi(\theta|f)}$ とおくことによって、その条件を取り入れることができる。この時、汎関数を次式のように表すことにする。

$$\begin{aligned} J(\psi, \psi_{00}) &= w^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} (\Delta\theta) \right\}^2 d\theta \\ &+ \sum_{j=1}^N \left\{ \int_0^{2\pi} R_j(f, \theta) e^{\psi(\theta|f)} d\theta - p_j(f) \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{j=1}^N \left\{ \int_0^{2\pi} I_j(f, \theta) e^{\psi(\theta|f)} d\theta - q_j(f) \right\}^2 \\ &+ \left\{ \int_0^{2\pi} e^{\psi(\theta|f)} d\theta - 1 \right\}^2 \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

この汎関数の極値問題は、その第 1 変分が 0 となる関係式により満たされ、次の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} w^2 \psi_{0000}(\Delta\theta)^* &+ \sum_{j=1}^N R_j(f, \theta) e^{\psi(\theta|f)} \left\{ \int_0^{2\pi} R_j(f, \theta^*) e^{\psi(\theta^*|f)} d\theta^* - p_j(f) \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^N I_j(f, \theta) e^{\psi(\theta|f)} \left\{ \int_0^{2\pi} I_j(f, \theta^*) e^{\psi(\theta^*|f)} d\theta^* - q_j(f) \right\} \\ &+ e^{\psi(\theta|f)} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{\psi(\theta^*|f)} d\theta^* - 1 \right\} = 0 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

この非線形微積分方程式 (Nonlinear Integro-Differential Equation) による方向スペクトルの推定法を NIDE と呼ぶことにする。

式 (11) の意味することは、簡単のために $w=0$ とすると、拘束条件に対する誤差から作られる誤差ベクトル ($\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_N, \varepsilon_G$) と方向分布関数から作られるベクトル ($R_1G, \dots, R_NG, I_1G, \dots, I_NG, G$) が任意の θ で直交することである。

3. 数値計算法

3.1 LIDE の数値計算法

線形微積分方程式 (9) を用いて方向分布関数を推定する場合、方向角 θ を M 等分して ($\Delta\theta=2\pi/M$) 差分近似で表現すると、次式で表される。

$$\begin{aligned} w^2 (G_{i-2} - 4G_{i-1} + 6G_i - 4G_{i+1} + G_{i+2}) \\ + \sum_{k=1}^M \{ 1 + \sum_{j=1}^N R_{ji} R_{jk} + \sum_{j=1}^N I_{ji} I_{jk} \} G_k \Delta\theta \\ = \sum_{j=1}^N (R_{ji} p_j + I_{ji} q_j) + 1 \\ (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

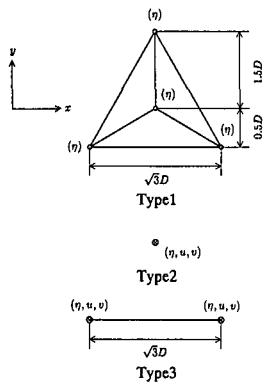
ここに、 $G_i = G(i\Delta\theta)$, $R_{ji} = R_j(f, i\Delta\theta)$, $I_{ji} = I_j(f, i\Delta\theta)$, $p_j = p_j(f)$ および $q_j = q_j(f)$ である。上式において、周期境界条件を用いると未知の方向分布関数 G_i の数は M 個となり、式の数と一致するために次の行列式を解くことによって、簡単に方向分布関数を推定できる。

$$AG = D \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 A は係数行列、 G は方向分布関数 G_i を成分にもつベクトル、 D は i 成分が式 (12) の右辺で与えられるベクトルである。上式は、係数行列式 $\det A$ が 0 でない限り解は存在する。

3.2 NIDE の数値計算法

方向分布関数の非負性を考慮した場合には、 $\psi(\theta|f)$ に関して非線形方程式となるが、それを差分近似し、Newton の線形化法を用いることにする。いま、 n ステップ目の解を ψ_n^* とし、 $n+1$ ステップの解 ψ_{n+1}^* を $\psi_n^* = \psi_n^*$



図一 波浪観測アレイの種類

表すパラメタである。有義波の波長を $L=88\text{ m}$ とし、主波向は 1 方向波浪の場合は、 $\theta_0=180^\circ$ 、2 方向波浪の場合には、 $\theta_1=180^\circ$ および $\theta_2=90^\circ$ とした。また、方向集中度パラメタ S_i については、3、10、25 および 50 の 4 通りとした。

波浪観測アレイの配置については、図一に示すように Type-1、Type-2 および Type-3 の 3 通りで検討を行っている。また、ノイズ混入率は、0%、1%、5%、10% および 20% の 5 通りとした。方向分割数 M については、LIDE および NIDE ともに $M=72$ ($\Delta\theta=5^\circ$) として計算を行った。非線形計算における収束条件として、式 (11) の平均絶対値残差が 10^{-6} 以下を原則とし、ノイズ混入率が高い場合には 10^{-5} のオーダーとした。

4. シミュレーション結果とその考察

方向スペクトル推定における重み係数の効果をまず調べるために、図二に NIDE における汎関数 J の極小値の変化を示す。この図には、 $S_{\max}=10$ におけるノイズ混入率が 0%、1% および 5% の結果が示されている。いずれも重み係数 w の値が 10^{-1} までは急激に汎関数の値が減少し、 $w=10^{-2}$ 以下では $\varepsilon=5\%$ の場合を除き、その値は 10^{-6} 以下の 10^{-7} のオーダーに達している。このオーダーでは、単精度の計算ではけた落ち誤差が無視できないオーダーであるので、これ以降のスペクトルの数値計算では、極値が 10^{-6} 以下となるように、重み係数を $w=0.01$ として計算を行っている。

図三は、スターアレイ (Type-1) を用いて観測した場合の一方方向波浪場における方向スペクトルの推定結果を示したものである。図の上から、 $S_{\max}=3$ 、 $S_{\max}=10$ 、 $S_{\max}=50$ の時の結果であり、真の方向スペクトルは実線で示している。方向集中度が低い場合には、LIDE による結果は真値と比較的よく一致しているが、MLM (Capon, 1969) による結果は逆に精度が低い結果となっている。一方、方向集中度が高くなると、LIDE ではサイドロブが顕著となる傾向にあるが、NIDE ではほとんど精度が落

$+\Delta\psi_i$ と表す。ここで、 $|\Delta\psi_i|\ll 1$ と仮定し、 $\Delta\psi_i$ の 2 次の微小項を無視すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} &w^2(\Delta\psi_{i-2}-4\Delta\psi_{i-1}+6\Delta\psi_i-4\Delta\psi_{i+1}+\Delta\psi_{i+2}) \\ &+ \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ijk} \Delta\psi_i + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ijk} \Delta\psi_k \\ &- \sum_{j=1}^N B_{ij} \Delta\psi_i + \sum_{k=1}^M C_{ik} \Delta\psi_i - D_i \Delta\psi_i + \sum_{k=1}^M C_{ik} \Delta\psi_k \\ &= -w^2(\psi_{i-2}^n-4\psi_{i-1}^n+6\psi_i^n-4\psi_{i+1}^n+\psi_{i+2}^n) \\ &- \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ijk} + \sum_{j=1}^N B_{ij} - \sum_{k=1}^M C_{ik} + D_i \quad \cdots (14) \end{aligned}$$

ここに、 $A_{ijk}=(R_{ij}R_{jk}+I_{ji}I_{jk})e^{\psi_i^n}e^{\psi_k^n}\Delta\theta$ 、 $B_{ij}=(R_{ji}\psi_i+I_{ji}q_j)e^{\psi_i^n}$ 、 $C_{ik}=e^{\psi_i^n}e^{\psi_k^n}\Delta\theta$ 、 $D_i=e^{\psi_i^n}$ である。周期境界条件を用いると、次の行列式の形で表される。

$$B\Delta\psi=F \quad \cdots (15)$$

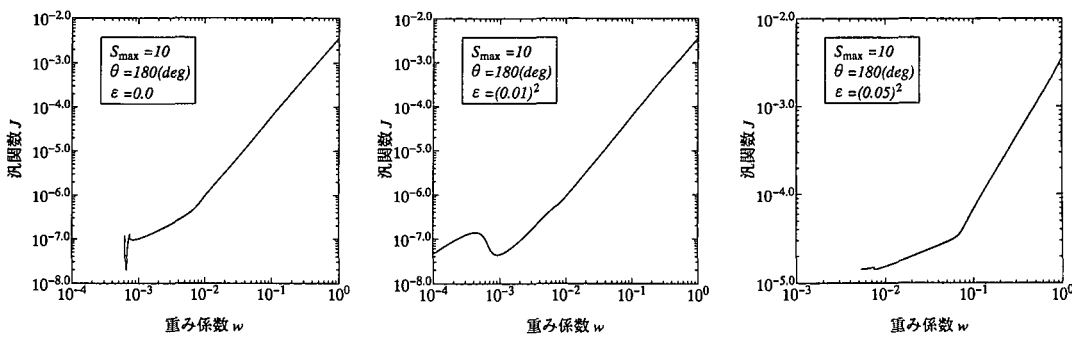
ここに、 B は係数行列、 $\Delta\psi$ は i 成分が $\Delta\psi_i$ であるベクトル、 F は i 成分が式 (14) の右辺で表されるベクトルである。この行列式も容易に解くことができる。

3.3 数値シミュレーションによる検討

数値シミュレーションによる検討は、磯部ら (1984) と同様に次の光易型方向分布関数を与えて行った。

$$G(\theta|f)=\sum \alpha_i \cos^{2S_i}\{(\theta-\theta_i)/2\} \quad \cdots (16)$$

ここに、 α_i はスケールパラメタ、 S_i は方向集中度を



図二 重み係数 w に対する汎関数 J の極小値の変化

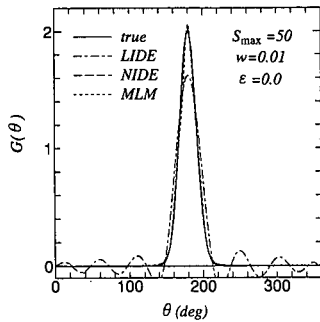
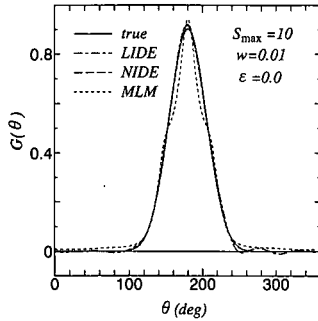
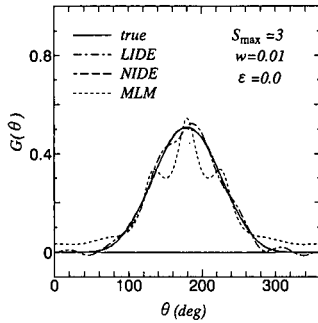


図-3 方向スペクトルの推定精度の比較
(一方向波浪場, Type-1)

ちることがないと言える。

図-4 は、同じくスターアレイを用いて観測した場合の二方向波浪場における方向スペクトルの推定結果を示したものである。ここには、ノイズ混入率が0%と5%の結果が示されている。このような波浪場では、MLMでは正確な方向スペクトルを得ることができないが、NIDEでは精度の高い結果を得ることができている。また、LIDEではサイドロブが存在するが、2つの主波向がほぼ一致しており、ある程度の精度を有していることが分かる。

1地点3成分観測 (η, u, v : Type-2) に対する方向スペクトルの推定結果を示したのが、図-5 である。3成分と波浪観測量が小さい場合においても、NIDEは真の方向分布関数にかなり近い結果が得られている。しかしな

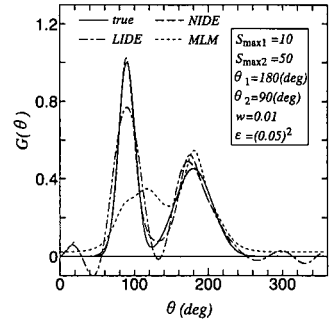
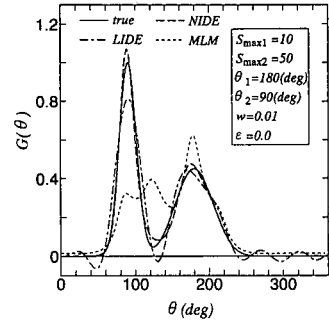


図-4 方向スペクトルの推定精度の比較
(二方向波浪場, Type-1)

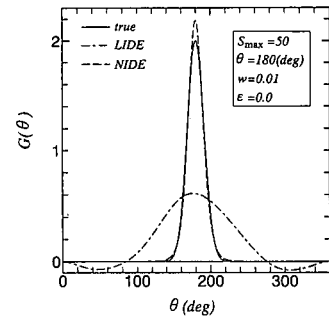
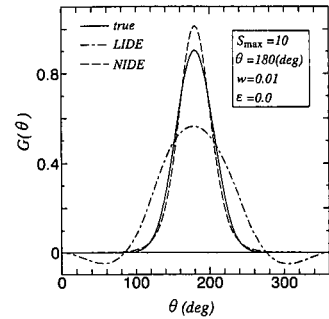


図-5 方向スペクトルの推定精度の比較
(一方向波浪場, Type-2)

がら、LIDEでは精度が低く、負の値も顕著となっている。このことから、方向スペクトルの正值性の重要性は、

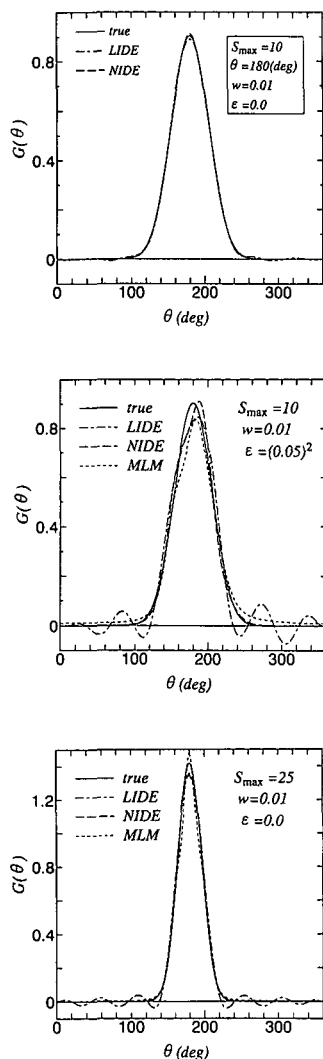


図-6 方向スペクトルの推定精度の比較
(一方向波浪場, Type-3)

特に波浪観測量の数が小さい場合に大きく効いてくると言える。

図-6は、波浪観測アレー(Type-3)における推定結果である。ノイズの混入がない上図では、LIDEおよびNIDEともに極めて精度が高くなっている。しかしながら、ノイズ混入率5%ではLIDEの推定値には、サイドロブが現れ、負の値も顕著となっている。一方、NIDEの結果は多少ピークの位置がずれてはいるものの全体的な一致度はよいことが分かる。

5. 結 論

本研究では、変分原理に基づき方向スペクトルの推定法を考案し、その数値計算を行って、推定精度の検討を行ったところ、次の事柄が明かとなった。

(1) 線形微積分方程式による推定法(LIDE)は、行列演算を1回行えばよく計算が簡単であり、方向集中度が低い場合には精度は高いが、逆の場合にはサイドロブが現れて精度が低下することが分かった。

(2) 非線形微積分方程式による推定法(NIDE)では、行列の繰返し計算が必要であるが、代表的な3種類の波浪観測アレーに対して、方向集中度によらず推定精度が高いことが分かった。

(3) ノイズの混入率に対して、LIDEによる推定結果は影響を受け易く、波浪観測量の数が小さい場合や方向集中度が高い場合には推定精度が低くなるが、NIDEではいずれの場合においても精度は極めて高く、実際の観測データに適用できる。

(4) 重み係数 w の値については、ノイズがない場合には $w=0.01$ で汎関数の極小値が 10^{-6} 以下のオーダーとなり、実用上は $w=0.01$ として十分な精度で適用可能である。

参 考 文 献

- 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司(1984): 方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 173-177.
- 橋本典明(1987): ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第26巻, 第2号, pp. 97-125.
- 橋本典明・小舟浩治・亀山 豊(1988): 現地観測データを用いた方向スペクトル推定法, 港湾技術研究所報告, 第27巻, 第2号, pp. 59-94.
- 橋本典明・永井紀彦・浅井 正・菅原一晃・久高将伯・小野修平(1993): 方向スペクトルの推定における最大エントロピー原理法(MEP)の拡張, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 136-140.
- Capon, J. (1969): High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis, Proc. IEEE, Vol. 57, No. 8, pp. 1408-1418.
- Hashimoto, N. and Kobune K. (1987): Directional spectrum estimation from a Bayesian approach, Proc. 21st ICCE, pp. 62-76.
- Hashimoto, N., T. Nagai, and T. Asai (1994): Extension of the maximum entropy principle method for directional wave spectrum estimation, Proc. 24th ICCE, pp. 232-246.
- Kim, T. L. Lin and H. Wang (1994): Application of maximum entropy method to the real sea data, Proc. 24th ICCE, pp. 340-355.
- Mitsuyasu, H., et al. (1975): Observation of the directional spectrum of ocean wave using a cloverleaf buoy, J. Phys. Oceanogr. Vol. 5, pp. 750-760.