

非線形干渉による平面波の不規則化とその特性

安田 孝 志*・大宮 雄 一**・河合 篤 司***・小林 智 尚****

1. 緒 言

海の波は本質的に平面 2 次元であり、それ故に方向スペクトルの現地観測や多方向不規則波の実験が行われるようになって来たと言える。しかしながら、これまでの取扱いでは不規則性を所与のものとして扱い、非線形性を無視し、無数の自由進行波の重ね合わせとしてきた。また、非線形性を考慮するとしても、その影響は波形の非対称性などに現れるに過ぎないとして来た。

これは、平面波の複雑さを考えれば止むを得ないことであるが、波浪推算において共鳴干渉が取り入れられていることなどからすれば、非線形性の影響についても検討が必要と言える。特に、一方向波列の場合であるが、3 次干渉と一定の自由度があれば、水面波がカオス的に不規則化する事実 (Yasuda and Mori, 1997) は、不規則性の原因が非線形性にあり、両者の一体的取扱いの必要性を示すものとして重要である。こうした非線形性の影響が平面波にも現れるならば、これまでの不規則波の統計理論の適用や方向スペクトルの推算において注意が必要となる。

本研究では、まず 3 次干渉を考慮した平面波の伝播シミュレーションを実施し、非線形干渉による不規則化過程について調べるとともに、これによる不規則波の水位および波高分布の特性を明らかにする。ついで、その波数スペクトルより与えられる真の方向スペクトルと波高計アレイデータより推算される方向スペクトルとの比較し、非線形干渉によって生成された不規則波浪場に対する後者の分解能を調べることににより、線形理論に基づく方向スペクトル理論の適用性について検討を行う。

2. 計 算 手 法

自由度が大きい平面波の長時間伝播計算を 3 次干渉まで考慮して行うには、現時点では非砕波周期境界条件下のポテンシャル理論によるスペクトル法が必須となる。計算は、Dommermuth and Yue (1987) に従い、3 次元

空間の正準方程式を深海波条件の下で解くことによって行った。

$$\eta_t = -\phi_x^2 \eta_x - \phi_y^2 \eta_y + (1 + \eta_x^2 + \eta_y^2) \phi_z|_\eta \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_t^2 = -g\eta - \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + \frac{1}{2}(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2) \phi_z|_\eta \dots\dots (2)$$

ここに、 x および y は水平座標、 z は平均水面を原点とする上向き鉛直座標、 t は時間、下つきの添字はこれらによる偏微分を表し、 $\phi^s(x, y, t)$ は水面 $z = \eta(x, y, t)$ での速度ポテンシャルであり、 $\phi_z|_\eta$ は深海波に対して次式のようになる。

$$\phi_z|_\eta = \sum_{m=1}^3 \sum_{l=0}^{3-m} \frac{\eta^l}{l!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (k_{nj})^{l+1} \phi_{nj}^{(m)}(t) e^{ik_n x} \dots\dots (3)$$

$$\phi^s = \sum_{m=1}^3 \sum_{l=0}^{3-m} \frac{k^l \eta^l}{l!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (k_{nj})^l \phi_{nj}^{(m)}(t) e^{ik_n x} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $k_{nj}x = (k_x)_{nj}x + (k_y)_{nj}y$ 、 k_x 、 k_y は x 、 y 方向の波数。

計算精度はエネルギー誤差 5% 以内とした。また、ストークス波の定常伝播、4 波共鳴干渉および変調不安定計算を行い、数値解がこれらに対して十分な精度を有していることを確認した。

3. 計 算 条 件

初期波の波長 L_p を 80 m とし、最大波数 $k_{\max}$ を $3k_p (6\pi/L_p)$ 以上の $k_{\max} = 4k_p$ とするため、実空間の大きさを x および y 方向にそれぞれ 16 波長分 $L_0 = 16L_p$ の $L_0 \times L_0 = 1280 \text{ m} \times 1280 \text{ m}$ とし、これを一辺 10 m の正方向格子 $\Delta x \times \Delta y = 10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ で区切った。これより、 $(k_x)_{\max} = (k_y)_{\max} = 4k_p$ の波数空間の刻みは $\Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k = 2\pi/L_0$ となり、 $k_p = 16\Delta k$ の関係が得られる。

以上の結果、実平面は 128×128 点で離散化され、波数平面は 64×64 個のフーリエモードでおおわれることになる。また、時間刻み Δt は $T_p/100 = (\pi/50)[1/gk_p]^{1/2}$ とした。

x 軸の正方向に進む振幅 $k_p a = 0.15$ の規則波を主波 η_1 とし、これに角度 θ で交差する振幅 $k_p a = 0.015$ の規則波を攪乱 η_2 として重ね合わせることににより、初期波を生成した。

また、計算では実平面だけでなく波数平面も共に第 1

* 正 会 員 工 博 岐阜大学教授 工学部土木工学科
** 正 会 員 工 修 愛知県企業庁
*** 学生会員 岐阜大学大学院 工学研究科
**** 正 会 員 工 博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

象限 ($x, y \geq 0$ および $k_x, k_y \geq 0$) に限定したため、共鳴干渉および高調波の生成もこの枠内で生じ、すべての成分波は x および y 座標の正方向に向かうことになる。

4. 非線形干渉による不規則化

4.1 不規則化

まず、4組の側帯波 ($k_j = k_p \pm j\Delta k, j=1\sim 4$) を交差角 $\theta_i = 5^\circ, 15^\circ$ および 30° の攪乱 η_2 として主波 η_1 に加えた場合の波数スペクトルの時間変化について調べる。図-1はその結果であり、いずれの場合も $t/T_p = 100$ 前後までに急速にスペクトルが拡がり、 $t/T_p = 200$ 付近で一定のスペクトルに落ち着く。図-2はこれに対応した平面波形であり、スペクトルの拡がりに対応して波形の不規則化が進んでいる。この不規則化には一切の不規則要因は関与しておらず、十分な自由度と初期攪乱(不安定条件を満たす規則波)があれば、非線形干渉のみによって平面波は容易に不規則化することがわかる。

図-3は、主波 η_1 に $\theta_i = 15^\circ$ および 60° で交差する $ka = 0.015$ の1個の規則波 ($k = k_p$) を η_2 として加えた場合の $t/T_p = 0$ および 250 での平面波形を示す。この場合は同一波数の η_1 と η_2 の交差でしかないが、 $\theta_i = 15^\circ$ では主波の不安定攪乱となり、同様に不規則化が進むことがわかる。しかし、 $\theta_i = 60^\circ$ では不安定条件 $1 - \cos \theta < 2\sqrt{2} ka = 0.424$ を満たさないため、 η_2 は不安定攪乱とはならず、初期波形がほとんどそのまま保存され、不規則化は

生じない。

図-4は、図-1(b)に示した $\theta_i = 15^\circ$ の場合のスペクトルの拡がりを $k_y = 0$ の波数軸上のスペクトル $S(k_x, 0)$ の時間発展として示したものである。各モードのスペクトルは単一方向波の場合 (Yasuda and Mori, 1997) と同様、準周期過程を経て不規則過程に移行しており、平面波の場合も高調波の生成と変調不安定を中心とする共鳴干渉がその不規則化の原因であると判断できる。図-5はこのときの $t/T_p = 0 \sim 200$ の時間波形であり、スペクトルに対応して $t/T_p = 100$ 前後から不規則化することがわか

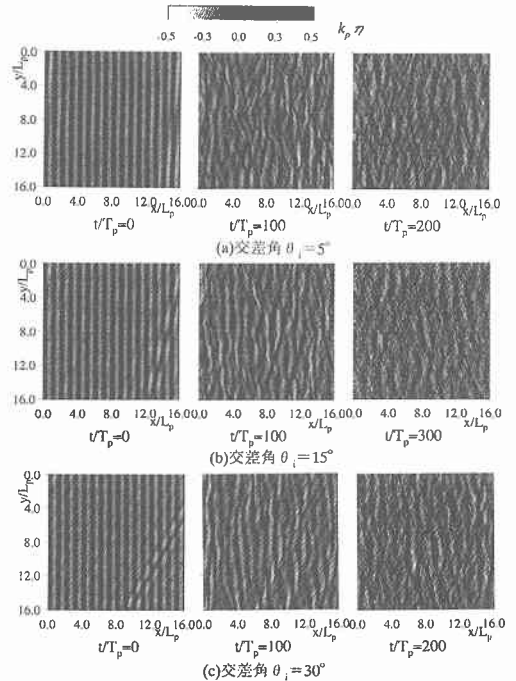


図-2 図-1に対応した平面波形のパターンの変化

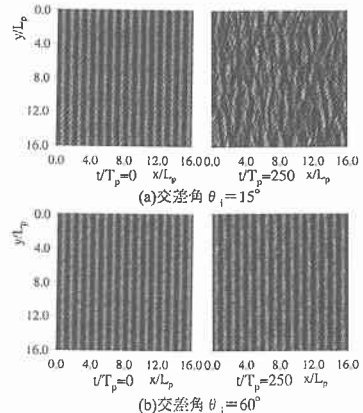


図-3 主波と同一波数で振幅1/10、交差角 θ_i の単一規則波を与えたときの平面波形

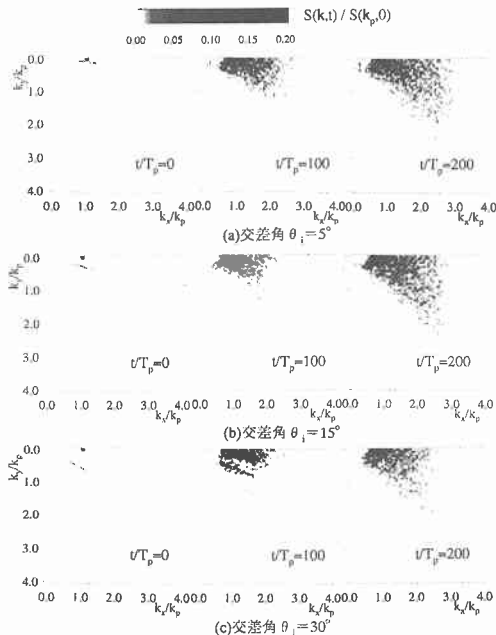


図-1 主波に斜めに交差する4組の側帯波 ($k_j = k_p \pm j\Delta k, j=1\sim 4$) を与えたときの波数スペクトルの拡がりの時間変化

る。また、図-6 は $t/T_p=200$ での x 軸上の波形 $\eta(x, 0)$ を示したものであり、空間波形からも不規則化が十分進んでいることがわかる。

このような不規則化は、非線形干渉を通じて主波から供給されるエネルギーによっているから、主波モードのスペクトル $S(k_p/t)$ の時間的変化によって不規則化過程の発展段階を知ることができる。図-7 は、交差角 $\theta_i=5^\circ, 15^\circ$ および 30° の側帯波を加えた場合の $S(k_p/t)$ の時間変化を示したものである。いずれの場合も、 $t/T_p \geq 100$ においてほぼ定常状態に達し、不規則化がほぼ終了することがわかる。

図-8 は、このことを総エネルギー $\int_0^{k_p} \int_0^{2\pi} S(k, \theta) d\theta dk$ によって規格化したスペクトル $S(k, \theta)$ の波数分布 $S'(k) = \int_0^{2\pi} S(k, \theta) d\theta$ および方向分布 $S'(\theta) = \int_0^{k_p} S(k, \theta) dk$ の時間変化によって示したものである。共に $t/T_p=0$ と 100 の間の変化は大きいですが、それ以降はほぼ一定の分布に落ち着いており、これからも $t/T_p=100$ 前後にお

いて不規則化過程がほぼ完了することがわかる。また、その方向分布の拡がりから、共鳴干渉が方向分散に大きな役割を果たしていることがわかる。

4.2 不規則化の特性

図-9 は、このときの平面波形の水位分布 (128×128 点) を比較したものであり、 $t/T_p=100$ においてほぼガウス分布に収束している。こうしたのガウス分布への収束は時間波形 ($t/T_p=100 \sim 200$) に対しても同様に認められる (図-10)。

このように、非線形干渉によって生成される不規則波であっても、ガウス分布に近い水位分布を持つが、図-11 から明らかのように、このときの空間波形の Skewness および Kurtosis の値はそれぞれ 0.25 および 3 前後の値となり、ガウス分布に完全には一致していない点に注意する必要がある。

図-12 は、上述の図-10 の水位分布を与える時間波形データより求めたゼロダウン波高の分布とレイリー分布の比較である。なお、測点による影響を除くため、8 測

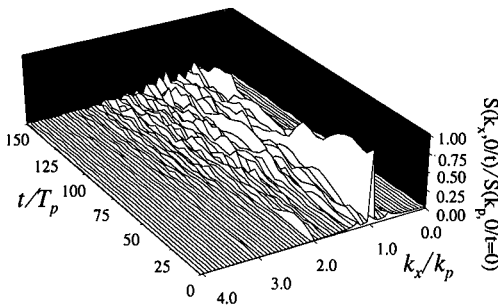


図-4 交差角 $\theta_i=15^\circ$ の4組の側帯波を与えたときのスペクトル $S(k_x, 0/t)$ の時間発展

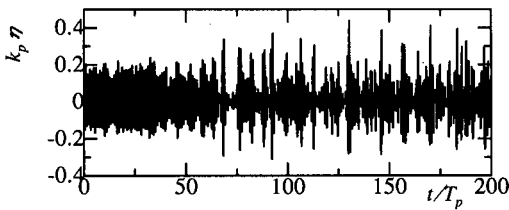


図-5 交差角 $\theta_i=30^\circ$ の4組の側帯波を与えたときの時間波形

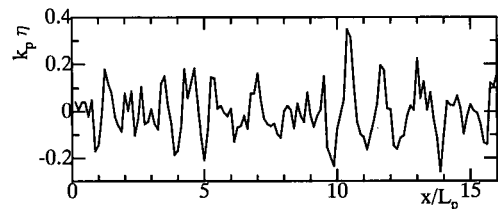


図-6 交差角 $\theta_i=15^\circ$ の4組の側帯波を与えたときの $t/T_p=300$ での x 軸上での空間波形 $\eta(x, 0)$

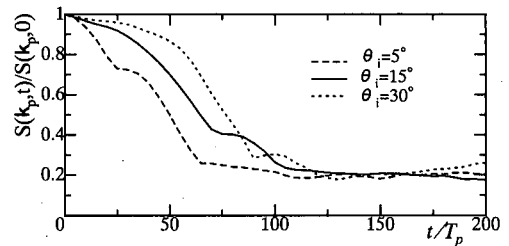


図-7 主波のピークスペクトル $S(k_p, t)$ の時間波形

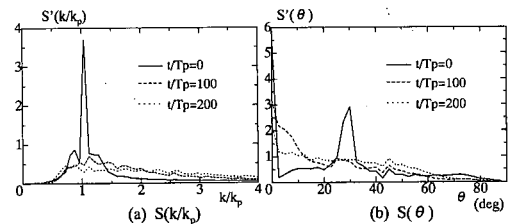


図-8 交差角 $\theta_i=30^\circ$ の側帯波を与えたときのスペクトルの波数分布 $S'(k/k_p)$ および方向分布 $S'(\theta)$ の時間変化

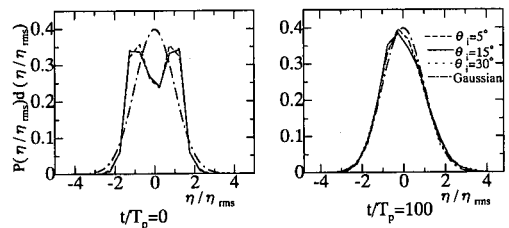


図-9 交差角 θ_i の側帯波を与えたときの平面波の水位分布 (128×128 測点)

点(後述の図-13 参照)の時間波形データを各ケースごとにそれぞれ合計している。基本的な分布形状はレイリー分布に対応しており、水位変動がガウス分布にほぼ従う限り、波高分布はレイリー分布に大きくは違わないことがわかる。ただし、ケースによる違いは大きく、 $\theta_i=15^\circ$ の場合はレイリー分布とほぼ一致しているが、 $\theta_i=5^\circ$ および 30° の場合ではずれが大きい。しかし、いずれの場合も高波高の出現頻度がレイリー分布のそれを上回っており、これは、単一方向波の場合も含めて非線形干渉の影響下にある不規則波の共通した特色と言えるようである。

5. 方向スペクトルに現れる非線形干渉

有限測点での水位や流速などのデータを用いて方向スペクトルを推定する場合、測点位置や測点数によって分解能が低下する事はよく知られている。しかし、それ以前の問題として、成分波間の独立性の仮定がある。これは、測点 x_m および x_n での遅れ時間 τ を伴う波形 η の共分散関数

$$\psi(x_m, x_n, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2+\tau} \eta(x_m, t) \eta(x_n, t+\tau) dt \quad \cdots (5)$$

のフーリエ変換としてクロススペクトル

$$\phi_{mn}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(x_m, x_n, \tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \quad \cdots (6)$$

を定義し、これを波数スペクトル $S(k, \sigma)$ のフーリエ変換

$$\phi_{mn}(\sigma) = \int S(k, \sigma) e^{ik(x_n - x_m)} dk \quad \cdots (7)$$

に帰着させる過程で用いられる本質的仮定である。これは周知のことであるが、非線形干渉によって生成される不規則波に対しては明らかに問題になると思われる。

そこで、方向スペクトルの推定精度を極力高めるため、推定法を含めて測点位置・数の検討を行い、図-13 に示す8点での $(t/T_p=100\sim182)$ 時間波形データを使用し、最尤法によって方向スペクトル $S(f, \theta)$ を求めることにした、これを真値である波数スペクトルによる結果と比較すれば、アレイデータに基づく方向スペクトルの分解能に及ぼす非線形干渉の影響が明らかとなる。

図-14 は、前述の図-8 のスペクトルの波数分布 $S(k)$ および方向分布 $S(\theta)$ をそれぞれ $\Delta k/k_p=100$ および $\Delta\theta=2.5^\circ$ 間隔で離散化し直し、 $t/T_p=140$ でのスペクトルについて各ケースの比較を示したものである。波数および方向分布共に、交差角 θ_i に関係なくそれぞれほぼ一定の形状に収束しており、初期状態に依らない非決定系の特徴が見られる。これに対し、図-15 は、8点の時間波形より求めた方向スペクトル $S_a(f, \theta)$ を f および θ に関して積分し、各ケースごとに $m_0 = \iint S_a df d\theta$ で規格化した方向分布 $S(\theta)$ および周波数分布 $S_a(f)$ を比較したものである。 $\theta_i=15^\circ$ とそれ以外の場合との差異が大きく、図-14 のスペクトルの真値におけるような一定形状への収束は見られない。これはアレイデータによる方向ス

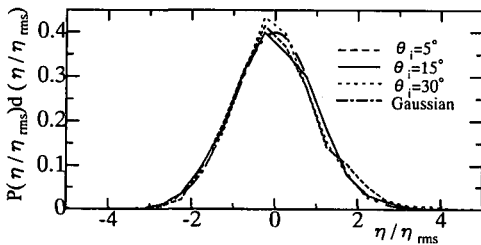


図-10 交差角 $\theta_i=5^\circ, 15^\circ$ および 30° の側帯波を与えたときの $t/T_p=100\sim200$ での各時間波形の水位分布

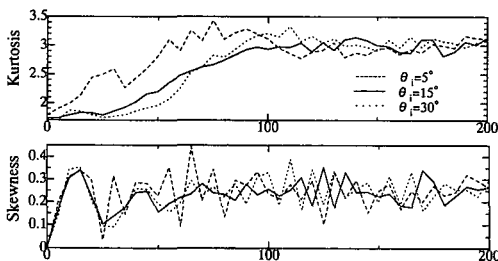


図-11 空間波形にたいする Kurtosis および Skewness の時間変化

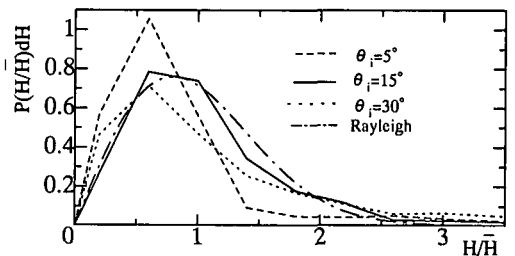


図-12 時間波形 ($t/T_p=100\sim200$) より求めた波高分布の比較

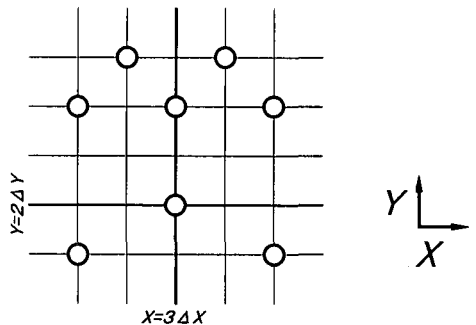


図-13 波高計アレイの配置図

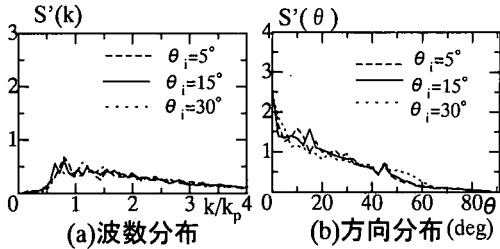


図-14 波数スペクトルから求めた波数分布 $S'(k)$ および方向分布 $S'(\theta)$

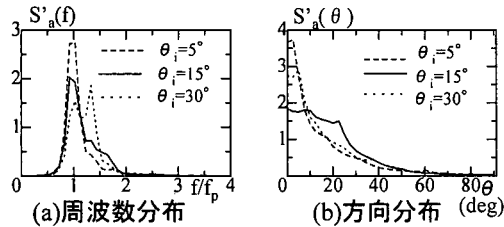


図-15 時間波形 ($t/T_p=100\sim 182$) から求めた周波数分布 $S'_a(f)$ および方向分布 $S'_a(\theta)$

ペクトルの推定誤差によるものと考えられ、注意が必要と言える。

図-15(a) を真のスペクトルである図-14(a) と比較する場合、波数分布に変換する必要があり、線形分散関係 $2\pi f = \sqrt{gk}$ を用いると、 $S_a(k) = (1/2k)S_a\{f(k)\}$ と書き換えられる。

図-16 は、 $S_a(f)$ より変換した標準化スペクトルの波数分布 $S'_a(k)$ と方向分布 $S'_a(\theta)$ をそれぞれ前述の図-14の $S'(k)$ および $S'(\theta)$ と比較したものである。波数分布については、いずれの場合も推定値 $S'_a(k)$ は真値 $S'(k)$ と $0.6 \leq k/k_p \leq 1.5$ において大きく異なっており、真のスペクトルが $k/k_p = 4$ まで広がっているのに対し、推定値は $k/k_p = 1$ 付近に集中している。これは、非線形干渉によって不規則化した波の場合、モード間の拘束のためにそのスペクトルのバンド幅に比べて波形のコヒーレンスが強くなること (Yasuda and Mori, 1997) に対応したものと考えられる。このために時間波形によるスペクトルの推定値 $S'_a(k)$ は実際よりも狭帯化し、それが $S'(k)$ との違いになって現れていると推察される。

これに対し、方向分布については、上述したように交差角 θ_i によって推定値 $S'_a(\theta)$ に差異が生じ、真値 $S'(\theta)$ との対応にもその影響が現れている。 $\theta_i = 15^\circ$ の場合は推定値と真値の対応は良いが、 $\theta_i = 5^\circ$ および 30° では、推定値は $0 \leq \theta \leq 10^\circ$ における方向集中度を過大評価する一方、 $0 \geq 30^\circ$ での方向分布を過小評価するなどの差異が見られる。

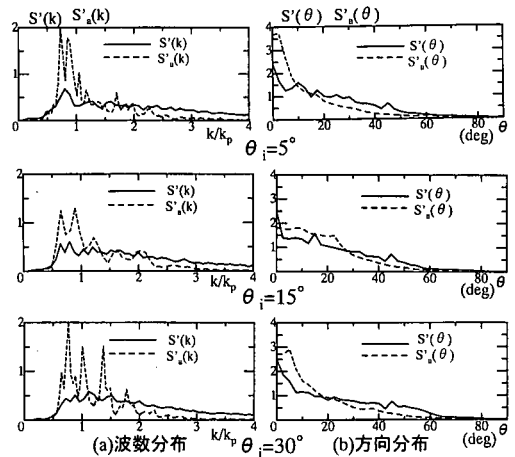


図-16 空間波形および時間波形より求めた交差角 $\theta_i = 5^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ の波数分布および方向分布の比較

これらの差異は線形理論に基づく方向スペクトルの推定誤差によっており、非線形干渉の方向スペクトル分解能に及ぼす影響の大きさを表すものと言える。

6. 結 語

平面波の場合、一方向波列よりも自由度が大きいため、非線形干渉によって規則波は容易にかつ急速に不規則化する。これによる不規則波は、0.25 および 3.0 前後の Skewness および Kurtosis の値を持つもののガウス分布にほぼ従い、波高分布もレイリー分布に近く、水位や波高分布に関する限り、非線形性の影響は小さい。これに対し、8 測点での時間波形からの方向スペクトルの波数分布は真値よりも狭帯化の傾向があり、方向分布についても推定値の方が主方向まわりへの方向集中度が高くなっている。こうした差異は、線形理論に基づく方向スペクトルの推定誤差を示すものであり、非線形性の強い不規則波への適用においては注意が必要と言える。ただし、ここで示された程度の差異は許容できるとするなら、このように、非線形干渉によって生成される不規則波であっても、自由度が大きい系では、線形理論に基づく取扱いが可能となる。

本研究は造船学術研究推進機構による研究助成による成果であり、謝意を表す。

参 考 文 献

- Dommermuth, D. G. and Yue, D. K. P (1987): A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, J. Fluid Mech., Vol. 184, pp. 267-288.
- Yasuda, T. and N. Mori (1997): Roles of sideband instability and mode coupling in forming a water-wave chaos, Wave Motion, Vol. 26, pp. 163-185.