

孤立波の遡上と海岸堤防への波力に関する ダイレクト・シミュレーション

M. A. Hamzah*・間瀬 肇**・高山知司***

1. はじめに

沿岸に來襲した津波は巨大なテトラポッドを持ち運び、遡上した津波は家々を流失させる。沿岸および陸上での津波の挙動を明らかにすることは防災対策上重要であり、従来精力的に研究が行われてきた。本研究はナビア・ストークス方程式のダイレクト・シミュレーション (NASA-VOF 法) により、孤立波の変形、陸上遡上、海岸堤防への打ち上げおよび作用波力を算定するものであり、また実験結果と比較する際に必要となるシミュレーションモデルとしてパソコン上にライブラリー化し、各種断面を有する津波防御構造物の効果を容易に算定するためのシミュレータの構築を目的とする。

2. 基礎方程式および解析モデル

2.1 基礎方程式

基礎方程式は、非圧縮性流体に対する質量保存式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

と、Navier-Stokes 方程式 (運動方程式) である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (2a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (2b)$$

ここで、 u および w は x および z 方向の流速、 ρ は流体の密度、 g_x および g_z は重力加速度の x および z 方向成分、 p は圧力、 ν は動粘性係数である。

2.2 境界条件

自由表面における境界条件は、曲率が小さい場合、以下のようにつける。

$$\frac{p}{\rho} - 2\nu \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\nu \left(\frac{\partial u_n}{\partial \tau} + \frac{\partial u_\tau}{\partial n} \right) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 u_n および u_τ は自由表面に垂直方向および接線方向の流速成分である。

また、計算領域を囲む境界での条件として、問題に応じてスリップ、ノースリップ、流入出固定、および自由流入出条件が課せられる。

2.3 解析モデル

ここで用いる解析モデルは NASA-VOF といわれるものであり、特に VOF 関数 F に対する移流方程式の差分化が SOLA-VOF のそれに比べ改良されている (Hirt et al., 1986)。

空間の離散化は、図-1 に示すように、SMAC 法で用いられると同様のスタッガード格子 (不等間隔) を用いる。流速はセル境界面に、圧力および VOF 関数値 F はセル中心に定義する。ここで、 $AC_{i,j}$ はセルが流体に対して開いている割合であり、すべて物体で占められる場合には 0 である。また、 $AR_{i+1/2,j}$ および $AT_{i,j+1/2}$ はそれぞれセルの右側界面および上側界面における流体に対して開いている割合である。

(a) VOF 法

Volume of Fluid (VOF) 法は Marker and Cell (MAC) 法におけるマーカーの存在密度を VOF 関数 F として表し、マーカーを移動させる代わりに F の移流方程式を解いて自由表面の移動をモデル化する。表面形状

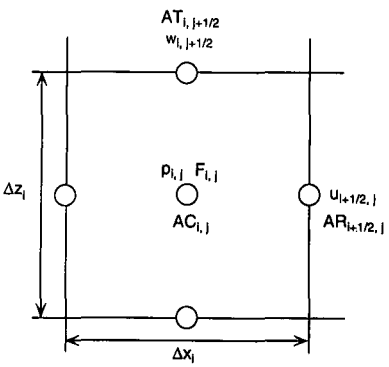


図-1 非一様格子における変数の配置

* 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科 後期博士課程
** 正 会 員 工博 京都大学助教授 防災研究所
*** 正 会 員 工博 京都大学教授 防災研究所

の精度は差分格子の離散精度となるが、MAC 法のように多くのマーカーを必要としない。 F の値はセルにおける流体の占有割合を示し、 F 値により気体セル、表面セル、流体セルに区別する。すなわち、 $F=0$ は気体セル、 $0<F<1$ は表面セル、 $F=1$ は流体セルである。また、セル内での流体の存在方向を示すフラッグ NF により、表面形状を表す。

表面セル (i, j) は $0<F<1$ であるとともに、 $(i\pm 1, j)$ あるいは $(i, j\pm 1)$ の少なくとも 1 つのセルは $F=0$ でなければならない。

(b) 流速場の計算

x 方向および z 方向の運動方程式は、それぞれセルの右辺および上辺の中心点において陽的に差分化する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j} - u_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = & g_x - \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\rho \Delta x_{i+1/2}} - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} \\
 & - \left(w \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i+1/2,j} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{i+1/2,j} \quad \dots\dots\dots (5a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{w}_{i,j+1/2} - w_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = & g_z - \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\rho \Delta z_{j+1/2}} - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i,j+1/2} \\
 & - \left(w \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,j+1/2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)_{i,j+1/2} \quad \dots\dots\dots (5b)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta x_{j+1/2} = x_{i+1} - x_i$ 、 $\Delta z_{j+1/2} = z_{j+1} - z_j$ である。このようにして求めた流速は連続式を満足しないので、圧力と流速を連成させて連続式を満足するように補正する。

(c) 圧力と流速の補正計算

連続式はセルの中心点において差分化する。差分式は、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 D_{i,j}^{(n)} = & \frac{1}{AC_{i,j}} \left(\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} AR_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}^{n+1} AR_{i-1/2,j}}{\Delta x_i} \right. \\
 & \left. + \frac{w_{i,j+1/2}^{n+1} AT_{i,j+1/2} - w_{i,j-1/2}^{n+1} AT_{i,j-1/2}}{\Delta z_j} \right) \cong 0 \quad \dots\dots\dots (6)
 \end{aligned}$$

ここで、 (n) は補正計算の n 回目の結果を示す。式 (5) を近似して、流速の補正は圧力の増分値 $\Delta p_i^{(n)}$ を用いて以下のように表される。

$$u_{i\pm 1/2,j}^{(n+1)} = u_{i\pm 1/2,j}^{(n)} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_{i\pm 1/2}} \Delta p_i^{(n)} \quad \dots\dots\dots (7a)$$

$$w_{i,j\pm 1/2}^{(n+1)} = w_{i,j\pm 1/2}^{(n)} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta z_{j\pm 1/2}} \Delta p_j^{(n)} \quad \dots\dots\dots (7b)$$

ここで、 $2\Delta x_{i\pm 1/2} = \Delta x_i + \Delta x_{i\pm 1}$ 、 $2\Delta z_{j\pm 1/2} = \Delta z_j + \Delta z_{j\pm 1}$ である。 $\Delta p_i^{(n)}$ は、流体セルに対して、式 (7) を式 (6) に代入した次式により求める。

$$D_{i,j}^{(n)} + \frac{2\Delta t}{\rho AC_{i,j}} \left\{ \frac{AR_{i+1/2,j}}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} + \frac{AR_{i-1/2,j}}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \right\}$$

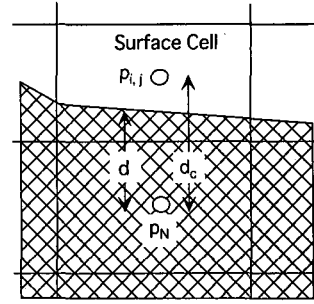


図-2 表面セルの圧力の設定

$$+ \frac{AT_{i,j+1/2}}{\Delta z_j(\Delta z_j + \Delta z_{j+1})} + \frac{AT_{i,j-1/2}}{\Delta z_j(\Delta z_j + \Delta z_{j-1})} \} \Delta p_i^{(n)} \cong 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

なお、圧力は次式のように補正される。

$$p_{i,j}^{(n+1)} = p_{i,j}^{(n)} + \Delta p_{i,j}^{(n)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

表面セルに対しては、図-2 に示すように、セル中心の圧力を線形補間により

$$p_{i,j} = (1 - \zeta)p_N + \zeta p_s \quad \dots\dots\dots (10)$$

とする (式 (3) に基づく)。ここで、 $p_s = 0$ (自由表面における圧力値) とし、流体セルの補正計算から求められる圧力値を p_N 、1 ステップ前の圧力値を $p_{i,j}$ とすると、増分値は

$$\Delta p_{i,j}^{(n)} = (1 - \zeta)p_N - p_{i,j} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。ただし、 $\zeta = d_c/d$ である。

表面セルに隣接する気体セル界面上の流速は、式 (4) の接線応力条件を用いて決定する。

(d) VOF 関数の移流計算

VOF 関数の F の移流方程式は、数値拡散を防ぐために、ドナー・アクセプタ法を用いる。この方法は存在する流体以上の流体を移流させることなく、存在する気体以上の気体を移流させない。セル (i, j) の風上側のセルをドナー・セル (D)、風下側のセルをアクセプタ・セル (A) とすると、 x 方向の F の移流量は

$$F_{D,j}^{n+1} = F_{D,j}^n - \frac{\Delta F_x AR_{i+1/2,j}}{\Delta x_D AC_{D,j}} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$F_{A,j}^{n+1} = F_{A,j}^n + \frac{\Delta F_x AR_{i+1/2,j}}{\Delta x_A AC_{A,j}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

と表され、 z 方向のそれは以下のように表される。

$$F_{i,D}^{n+1} = F_{i,D}^n - \frac{\Delta F_z AT_{i,j+1/2}}{\Delta z_D AC_{i,D}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$F_{i,A}^{n+1} = F_{i,A}^n + \frac{\Delta F_z AT_{i,j+1/2}}{\Delta z_A AC_{i,A}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 ΔF_x はセル界面を通過する F の流束であり、

$$\Delta F = \min(F_{A0}|V_x| + CF, F_D \Delta x_D) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$CF = \max\{(|\langle F \rangle - F_{AD}| |V_x| - (\langle F \rangle - F_D) \Delta x_D, 0.0\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$\langle F \rangle = \max(F_D, F_{DM}, K) \dots\dots\dots (18)$

$V_x = u_{i+1/2,j}^{n+1} \Delta t \dots\dots\dots (19)$

と表される。Kは通常0.1を用いる。添字(AB)は自由表面の方向を考慮して(A)か(D)のどちらかが用いられる。ΔF_zについても同様である。

(e) VOF関数の保存性の補正計算

(c)の補正によっても連続式は完全に満足されることはなく誤差を有するため、Fは完全には保存されない。厳密解と計算結果との関係

$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\text{EXACT}} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\text{CALC}} + (\nabla \cdot \vec{v})F \dots\dots\dots (20)$

を用い、また(d)の計算から求められる

$\tilde{F} = F^n - \Delta t \nabla \cdot (\vec{v} F^n) \dots\dots\dots (21)$

を用いて

$F^{n+1} = \tilde{F} + \Delta t (\nabla \cdot \vec{v}) F^n \dots\dots\dots (22)$

のように補正する。また、Fがわずかに1より大きくなったり、0より小さくなった場合には、それぞれ1および0と設定し直す。

(f) 自由表面の決定

F値から表面セルを決定し、またどちらの方向に多くの流体をもつセルが存在するかを判定する。引き続き計算のために各セルにフラッグNFを表-1のようにつける。

表-1 セルの分類

NF	セル・タイプ	表面の方向	隣接セル・タイプ
0	流体	—	すべて流体
1	表面	ほぼ垂直	左に流体
2	表面	ほぼ垂直	右に流体
3	表面	ほぼ水平	下に流体
4	表面	ほぼ水平	上に流体
5	表面	—	すべて気体
6, 7, ...	気体	—	流体セルなし

(g) 計算の流れ

(b)~(f)を所定の時間まで繰り返す。計算の安定条件として

$\Delta t < \Delta x^2 \Delta z^2 / \{2\nu(\Delta x^2 + \Delta z^2)\} \dots\dots\dots (25)$

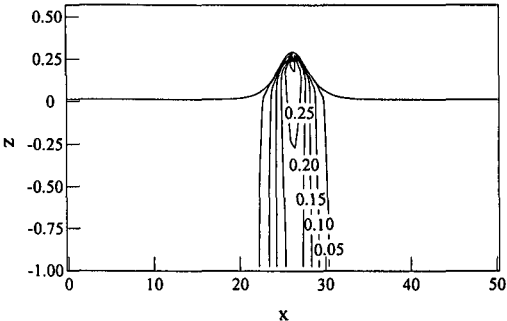
$\Delta t < \min\{C_r \Delta x / |u|, C_r \Delta z / |w|\} \dots\dots\dots (26)$

を満たす小さい方のΔtを用いる。C_rはクーラン数である。

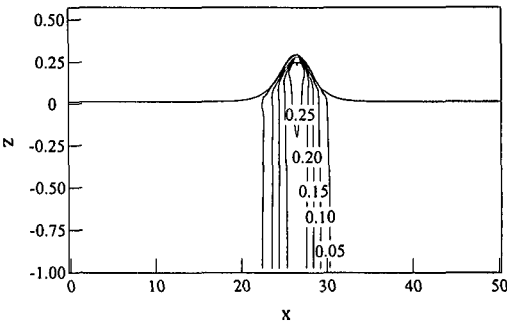
3. 孤立波の遡上と海岸堤防への波力の解析

3.1 計算領域と計算条件

計算は、代表長さとして水深h、代表速度として孤立波の波速 $c = \sqrt{gh}$ 、代表時間を h/c 、圧力を ρc^2 を用いて無次元化して行った。計算領域はx方向に50、z方向に1.5とした。入力条件として用いる孤立波はLaiton



(a) 解析解



(b) 数値解

図-3 水平水粒子速度に関する解析解と数値解の比較

(1960)の2次近似解で与え、 $\epsilon = \eta_{\text{max}}/h = 0.28$ とした。

3.2 孤立波の伝播計算

最初に、解析モデルのチェックとして、孤立波の伝播計算を行い理論結果と比較した。図-3(a)および(b)は、 $t=10$ における水平水粒子速度に関する解析解と数値解を比較したものであるが、両者はよく一致することが確かめられた。

3.3 潜堤を越える孤立波の変形と流速場

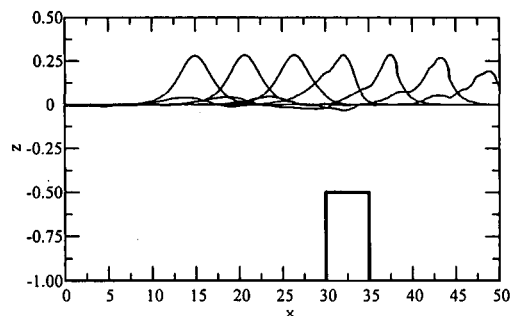
次に、潜堤を通過する孤立波の変形と流速場を解析した。孤立波の変形の様子を図-4(a)に、時刻 $t=20$ および30における潜堤背後の流速場を拡大して図-4(b)および(c)に示す。孤立波は潜堤を越えるときに前傾化し、通過後波高が小さくなる。潜堤背後では、孤立波の通過に伴って渦の形成が顕著になる。これらの結果はLee et al. (1994)の実験結果と定性的に一致する。

3.4 孤立波の遡上と海岸堤防への波力

一様斜面上への孤立波の遡上、陸上部に設置された海岸堤防への打上げと波力を解析する。

(a) 孤立波の遡上

図-5は一様勾配(1:20)海浜へ遡上する孤立波の変形計算結果を示したものであり、同時にSynolakis (1987)の実験結果を○印で示してある。計算では、最大遡上高は $t=45$ で $R=0.45$ となる。図-5の結果は、Zelt



(a) 孤立波の変形

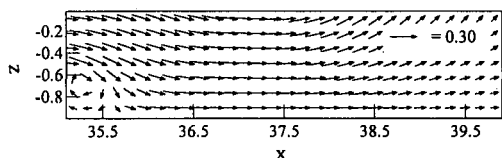
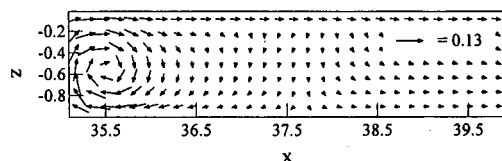
(b) 潜堤背後の流速ベクトル ($t=20$)(c) 潜堤背後の流速ベクトル ($t=30$)

図-4 潜堤を通過する孤立波の変形

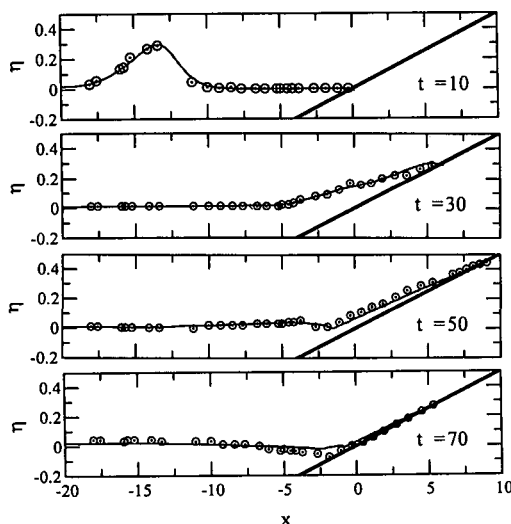


図-5 孤立波の遡上に関する計算結果と実験結果の比較

(1991)のFEMによる計算結果ともほぼ一致する。また、Synolakis (1987) による関係式

$$R/h = 0.918 \varepsilon^{0.606} \dots (25)$$

に本計算条件である $\varepsilon = 0.28$ を代入すると、 $R = 0.43$ となり、VOF 法による値とほぼ一致する。図-5 は、空間

波形に関しても、実験結果と計算結果がよく一致することを示している。

(b) 海岸堤防への打上げと波力

計算領域の詳細を図-6に示す。海岸堤防は $\theta = 90^\circ$ の直立堤、 $\theta = 30^\circ$ の傾斜堤を対象とする。波圧の時間変化に関しては、P点およびQ点の高さについて示す。

図-7は、無次元堤防高が0.3の直立堤近傍の孤立波の挙動を示したものである。 $t=24$ で打上げ高が最大となり、その値は $R=0.43$ と孤立波の波高の約2倍である。図-8は越波が生じない直立堤(高さ0.45)近傍の孤立波の挙動である。

図-9に、図-7および図-8に対応するP点とQ点における波圧の時間変化を示す。打上げ高は $t=24$ で最大となるが、波圧は $t=27$ で最大値をとる。これは Ramsden (1993) の実験結果と同じである。図-9より越波が生じない場合の方が波圧が大きいことがわかる。

図-10は傾斜壁近傍での孤立波の挙動を示したものである。打上げは $t=27$ で最大となり、同時に波圧も最大となる。波圧の時間変化を図-11に示す。直立壁の場合に比べ波圧が小さくなり、また傾斜堤高が小さいほど波

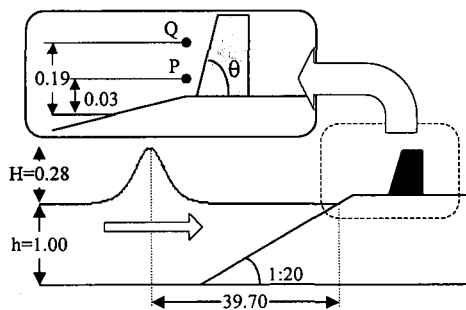


図-6 計算領域の詳細

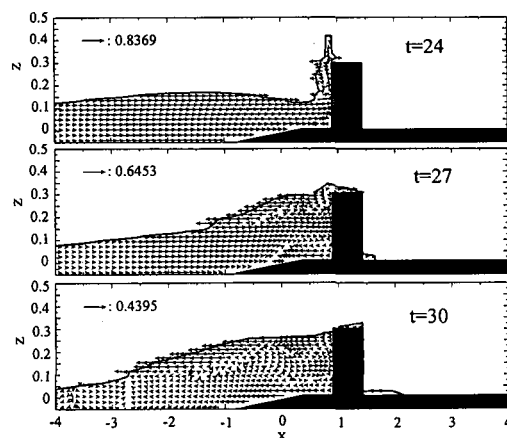


図-7 無次元堤防高0.3の直立堤近傍の孤立波の挙動

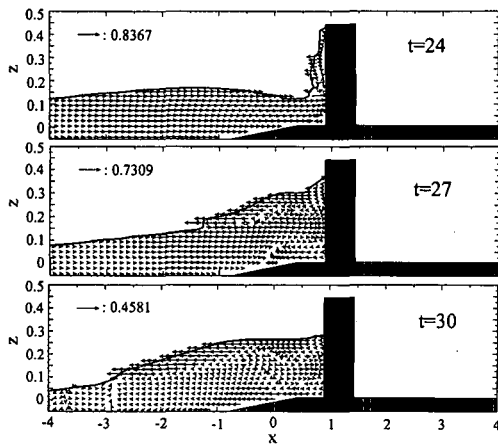


図-8 無次元堤防高 0.45 の直立堤近傍の孤立波の挙動

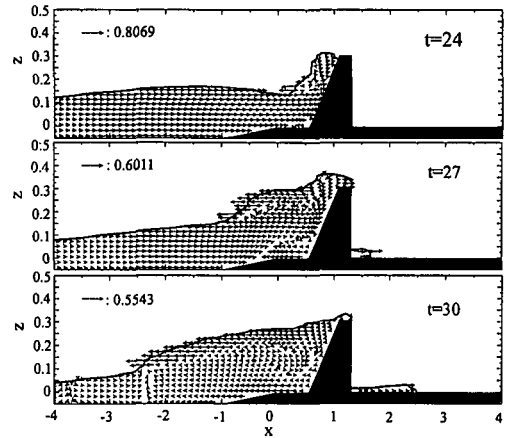


図-10 無次元堤防高 0.3 の傾斜堤近傍の孤立波の挙動

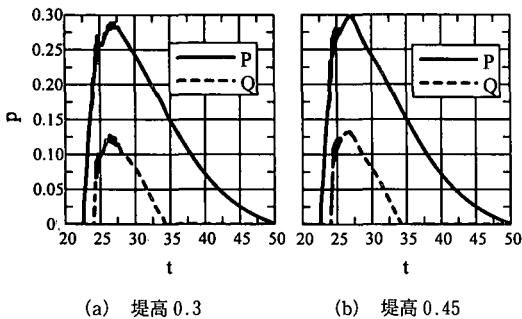


図-9 直立堤 P 点と Q 点における波圧の時間変化

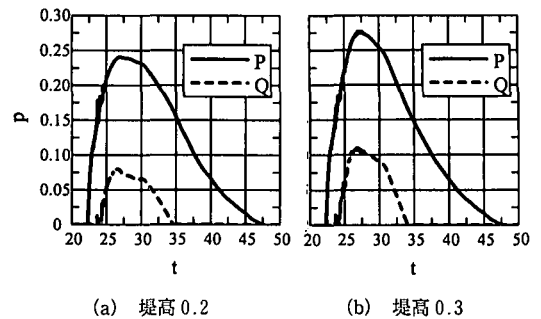


図-11 傾斜堤 P 点と Q 点における波圧の時間変化

圧が小さくなる。

4. あとがき

本研究はナビア・ストークス方程式のダイレクト・シミュレーション (NASA-VOF 法) により、孤立波の変形、陸上遡上、海岸堤防への打ち上げおよび作用波力を算定するシミュレーションモデルをパソコン上にライブラリー化した。今後水理実験を実施した際の解析モデルとして援用できる。通常の波浪に対するモデルおよび3次元モデルの作成は現在進行中である。

本研究を行うに当たり、金沢大学工学部 由比政年講師、および大阪大学工学部 川崎浩司助手には計算法について種々の助言をいただき、ここに謝意を表します。

参 考 文 献

Hirt, C. W., R. C. Mjolsness, L. D. Cloutman and M. D. Torrey

(1985): NASA-VOF2D: A computer program for incompressible flows with free surface, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-10612-MS.

Laiton, E. V. (1960): The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, pp. 430-440.

Lee, J. J., C. Chang and F. Zhuang (1994): Modelling of wave overtopping over breakwater, Proc. 24th ICCE, pp. 1701-1712.

Ramsden, J. D. (1993): Tsunamis: Forces on a vertical wall caused by long waves, bores, and surges on a dry bed, Ph. D. thesis, W. M. Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Rept. No. KH-R-54.

Synolakis, C. E. (1987): The runoff of solitary waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 185, pp. 523-545.

Zelt, J. A. (1991): The runoff of nonbreaking and breaking solitary waves, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 237-238.