

非線形緩勾配方程式を用いた碎波モデルの構築

有 川 太 郎*・磯 部 雅 彦**

1. はじめに

波動方程式による碎波現象の解析では, 碎波点より減衰項を加え, 強制的に波を減衰させる. 減衰項の形は, 変数の 2 階微分を用いる拡散型, および変数そのものによる抵抗型, また過剰運動量そのものを組み込んだ Schäffer et al. (1993) に代表されるようなモデルがある. 拡散型, および抵抗型の場合, 係数が必要になるが, その代表的な例として, Dibajnia・渡邊 (1987) の f_D がある. しかし, f_D は, 時間平均された線形理論に基づいており, 時々刻々の碎波過程を表現していない.

Schäffer et al. (1993) による方法は, 碎波判定法に物理的な根拠はないが(灘岡ら, 1996), 断面 2 次元問題においては碎波現象を良く表現している. しかし, 断面の形に依存するために, 平面問題への拡張が困難であると考えられる. それに対し, Nwogu (1996), 灘岡・大野 (1997) は, 渦動粘性係数を乱流方程式から求めることにより, 碎波の再生条件などを用いることなく, 碎波変形が計算できることを示している. しかし, 碎波によって供給されるエネルギーの評価には不明な点が残る. また, バー型地形など波の再生が起こる場での実験値との比較はされていない.

本研究では, 磯部 (1994) の提案した非線形緩勾配方程式を用い, それに拡散型の減衰項を導入し, その係数をエネルギー逸散率と関係づけることにより求める. その上で, バー型地形を用いて, 実験値との比較によりモデルの妥当性を検証する.

2. モデル方程式の導出

(1) 基礎方程式

速度ポテンシャル ϕ を既知の鉛直分布関数 $Z_a(z; h)$ により級数で近似し,

$$\phi(x, z, t) = Z_a f_a \quad (a=1, \dots, N) \dots\dots\dots (1)$$

とする. ここで, z は水表面を 0 とし, 上向きを正とする鉛直座標, $f_a(x, t)$ は未知変数, x は水平座標, t は時間, $h(x)$ は静水深, N は級数の項数であり, ギリシャ文

字の添え字に関しては, 総和規約を適用する. さらに変分原理を用いて導かれた非線形緩勾配方程式 (磯部, 1994) に拡散型の減衰項を付加した式として,

$$Z_\beta^\eta \frac{\partial f_\beta}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(Z_\gamma^\eta \frac{\partial f_\gamma}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial z} f_\beta \right)^2 + \frac{\partial Z_\gamma^\eta}{\partial h} Z_\beta^\eta f_\gamma \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + M_D = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$Z_a^\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{a\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \right) - B_{a\beta} f_\beta + (C_{\beta a} - C_{a\beta}) \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial h} Z_a^\eta f_\beta \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$M_D = -\nu_f \frac{\partial^2 Z_a^\eta f_a}{\partial x^2} \dots\dots\dots (4)$$

を考える. ここで,

$$Z_a = \left(1 + \frac{z}{h} \right)^{2(a-1)} \dots\dots\dots (5)$$

$$A_{a\beta} = \int_{-h}^{\eta} Z_a Z_\beta dz \dots\dots\dots (6)$$

$$B_{a\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_a}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta}{\partial z} dz \dots\dots\dots (7)$$

$$C_{a\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_a}{\partial h} Z_\beta dz \dots\dots\dots (8)$$

となる. ただし, ν_f の定義については後述する. また, $Z_a^\eta \equiv Z_a|_{z=\eta}$ とする.

(2) 拡散係数 ν_f のモデル化

式 (2) が力学的境界条件と等価であることを念頭において, 流線方向を s とし, その s 方向に微分する. すると式 (2) は, 流線方向の速度を v_s として,

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} v_s^2 \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial M_D}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

となる. ただし, 底面勾配の影響を表す式 (2) の 5 項は無視した. 式 (9) は, 微小長さ ds 当たりに損失 dM_D がある場合の式に相当する.

ところで, 2 次元定常の場合の碎波によるエネルギーの変化率は,

$$\frac{dEC_g}{dx} = - \left[\frac{dE}{dt} \Big|_{z=-h} + \frac{dE}{dt} \Big|_{z=\eta} \right] \dots\dots\dots (10)$$

* 学生会員 修(工) 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻
** フェロー 工 博 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻

となる [Le Méhauté (1963)]. ここで, E は波動エネルギー, C_g は群速度である. これと, 式 (9) を比べることにより, 減衰係数 ν_f とエネルギー逸散率の関係付けを行う. まず, 式 (9) の非定常項を無視し,

$$E = \frac{1}{2} \nu_s^2 + g\eta \dots\dots\dots (11)$$

とすると,

$$\frac{dE}{ds} + \frac{dM_D}{ds} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

となる. 砕波点付近では浅海域であるために, $C_g \approx C$ として, 波速 C を乗ずると,

$$C \frac{dE}{ds} + C \frac{dM_d}{ds} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

となる. さらに, 波速の変化はエネルギーの変化に比べて小さいと考えると,

$$\frac{dEC}{ds} + \frac{dCM_d}{ds} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

が得られ, 第2項目がエネルギーの逸散率と考えることができる. エネルギー逸散率を ϵ_e とすると,

$$\frac{dCM_d}{ds} = \epsilon_e \dots\dots\dots (15)$$

となる. これより, M_d に式 (4) を代入し, オーダーの評価から ν_f と ϵ_e とを関係づける. M_d についている負の符号は, ϕ の2階微分を含むためであるので, 係数のオーダーには無関係であるので無視すると,

$$O\left(\frac{d}{ds} \left(C \nu_f \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial x^2} \right)\right) \sim O(\epsilon_e) \dots\dots\dots (16)$$

となる. ここで, s 方向の代表長さに振幅 a , x 方向の代表長さに波長 L , 代表速度を C とすると,

$$O\left(\frac{d}{ds} \left(C \nu_f \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial x^2} \right)\right) \sim O\left(\nu_f \frac{C}{a} \frac{C}{L}\right) \sim O\left(\nu_f \frac{C}{a} \frac{1}{T}\right) \dots\dots\dots (17)$$

となる. ここで, T は周期である. 砕波帯内では, $C \sim \sqrt{gh}$, $a \sim h$ であることを考えて, 結局, $\gamma_{\nu f}$ を係数として,

$$\nu_f = \gamma_{\nu f} \sqrt{\frac{h}{g}} T \epsilon_e \dots\dots\dots (18)$$

という関係を得ることができる.

(3) 逸散エネルギーの収支

機械的エネルギーに熱エネルギーを加えた全エネルギーは保存される. 砕波後, 渦によってできる回転成分の流速の持つエネルギーを回転エネルギーと呼ぶことにすると, 全エネルギーは波, 回転, 乱れ, 熱エネルギーに分類することができる. そこで, 波エネルギーの逸散率は回転エネルギー, 乱れエネルギー, 熱エネルギーの増加率の和で表され,

$$\epsilon_e = \frac{DE_w}{Dt} + \frac{DE_k}{Dt} + \epsilon \quad (\text{at } z = \eta) \dots\dots\dots (19)$$

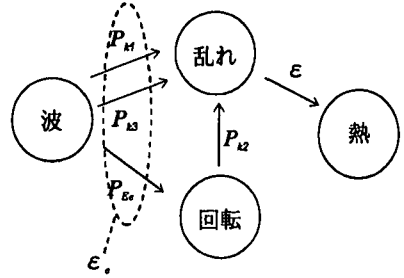


図-1 エネルギー収支の概念図

となる (図-1). ここで, E_w は回転エネルギー, E_k は乱れエネルギー, ϵ は熱からのエネルギー逸散率である.

乱れエネルギーは, 今回は1方程式モデルを用い,

$$\begin{aligned} \frac{DE_k}{Dt} &= \frac{\partial E_k}{\partial t} + \mathbf{u}^T \cdot \text{grad } E_k \quad (\text{at } z = \eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial E_k}{\partial x} \right) + P_{k1} + P_{k2} + P_{k3} - \epsilon \dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\epsilon = C^* \frac{E_k^{\frac{3}{2}}}{l_k} \dots\dots\dots (21)$$

$$\nu_t = E_k^{\frac{1}{2}} l_k \dots\dots\dots (22)$$

とした. ここで, l_k は乱れの代表長さ, C^* および σ_k はパラメタ, P_{k1} , P_{k2} および P_{k3} はそれぞれ, ポテンシャル流, 回転流れ, および外的要因による乱れの生成項である. これらについては後述する.

次に回転エネルギーは, 乱れエネルギーの式を参考に

$$\frac{DE_w}{Dt} = P_{Ee} - P_{k2} \quad (\text{at } z = \eta) \dots\dots\dots (23)$$

とした. ここで, P_{Ee} はポテンシャル流から回転流への変換率である.

(4) 生成項について

生成項は基本的には, 乱れの方程式により導かれている,

$$P_k = \frac{1}{2} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (\text{for } i, j = 1, 2) \dots\dots (24)$$

を基本に用いる. ここで, $x_1 = x$, $x_2 = z$ である. これを参考に, ポテンシャル流による生成項 P_{k1} は, γ_{k1} を係数として,

$$P_{k1} = \gamma_{k1} \nu_t \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^2 \right] \quad (\text{at } z = \eta) \dots\dots (25)$$

となる. また, 回転流による生成項 P_{k2} は, 回転エネルギー E_w および回転の代表長さ l_w を用いて,

$$P_{k2} = \gamma_{k2} \nu_t \frac{E_w}{l_w} \quad (\text{at } z = \eta) \dots\dots\dots (26)$$

とした. ここで, γ_{k2} は係数である.

次に P_{k3} , および P_{Ee} について述べる。碎波点より水粒子は波形から飛び出て、また波形の中に戻るという現象を繰り返すと考える。そこで、水粒子が持っているポテンシャルエネルギーおよび水平方向の運動エネルギーが、乱れや回転エネルギーに変化すると考え、次の様に定式化した。

$$P_{k3} = \gamma_{ke} \frac{n}{T} g (|\eta_b - \eta|) \dots\dots\dots (27)$$

$$P_{Ee} = \frac{1}{2} \frac{n}{T} (C_b - u^2)^2 + (1 - \gamma_{ke}) \frac{n}{T} (|\eta_{crest} - \eta|) \quad (\text{at } z = \eta; x_b < x < x_{b+lb}) \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 η_b , C_b , および x_b は碎波点での水面変動、波速、および水平方向座標である。また、 γ_{ke} は係数であり、水粒子の持つポテンシャルエネルギーが各エネルギーに変換される割合を表す。 x_{b+lb} は供給距離であり水粒子が微小時間に進む距離とした。よって、

$$x_{b+lb} - x_b = u \Delta t \dots\dots\dots (29)$$

となる。また、格子で考える場合整数となるので、切り上げにした。 n/T は碎波による渦の生成率であり、 n は 1 周期にいくつ渦ができるかということを表す。そして、渦が波速 C で大きさが H_b 程度であると考え、 γ_t を係数として、

$$\frac{n}{T} \sim \frac{C_b}{H_b} = \gamma_t \sqrt{\frac{g}{h}} \dots\dots\dots (30)$$

とした。 γ_t は係数である。さらに、これら P_{k3} および P_{Ee} は碎波判定を満たす場合に供給することとする。

(5) 碎波判定条件

碎波判定条件は流速・波速比で行う。有川・磯部(1997)によれば、流速・波速比が 1.0 を越える時に碎波すると考えると、実験との整合性が良いことが分かっているが、波速の求め方が、波峰の移動速度で求めており、いろいろな波の場を計算する場合に、扱いづらい。そこで、波速として、 $\sqrt{gh}$ を用いた。 g は重力加速度、 h は静水深である。しかし、この場合、1.0 であるかどうかは定かでないものの、有川・磯部(1997)によれば、判定条件を 0.8~1.0 にとれば大きな差がないことが示されているので、

$$\gamma_b = \frac{u_s}{\sqrt{gh}} \geq 0.9 \dots\dots\dots (31)$$

を判定条件にした。ここで、 u_s は水表面での流速とする。

(6) 各種パラメタ

パラメタは、 C^* , l_k , l_w , σ_k , γ_{uf} , γ_{k1} , γ_{k2} , γ_{ke} , γ_t である。 C^* および σ_k は乱流方程式で一般的に用いられている値、

$$C^* = 0.09 \dots\dots\dots (32)$$

$$\sigma_k = 1.0 \dots\dots\dots (33)$$

を用いた。

乱れの代表長さである l_k は、Cox et al. (1994) によれば、碎波帯外、transition region, inner region に波が移動するにつれて、0.01 h~0.45 h まで変化することを実験により明らかにしている。そこで、乱れエネルギーが transition region から inner region にかけて大きくなることを念頭におき、次元解析を用いて、

$$l_k = \gamma_{li} \left(1 + \frac{TE_k}{Ch} \right)^{n_2} \dots\dots\dots (34)$$

とした。ここで、 C は波速で $\sqrt{gh}$, E_k は乱れエネルギーである。

回転場における代表長さ l_w については参考にするものがないために、

$$l_w = \gamma_{lw} h \dots\dots\dots (35)$$

とした。ここで、 γ_{lw} は係数である。

最終的に定めるべき係数として、

$$\gamma_{uf}, \gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \gamma_{ke}, \gamma_t, \gamma_{li}, \gamma_{l2}, \gamma_{lw}$$

があるが、これらは、碎波形式によってことなることも考えられるので、実験ごとに波高の減衰が整合するように定めた。ただし、後述する 2 ケースについて計算した結果、 γ_{k1} , γ_{k2} , γ_{ke} , γ_{li} , および γ_{lw} のパラメタに関しては、表-1 の様に、等しい値をとった。

表-1 各パラメタ

γ_{k1}	γ_{k2}	γ_{ke}	γ_{li}	γ_{lw}
0.5	2.0	0.5	0.1	0.2

3. 実験との比較

(1) 数値計算方法

比較する実験として、一様勾配斜面および、バー型地形を用いた。数値計算は有川・磯部(1997)と同様に線境界法を用い、実験領域より沖側に半波長、岸側に 2 波長の消波用の領域を設けている。 dx , および dt は両方の実験とも、 $L_i/50$, $T/100$ を用いた。 L_i は入射波の波長である。非線形緩勾配方程式に関しては、Crank-Nicolson 法を用いたが、乱流方程式などは、陽解法を用いた。そのため、 dt を小さくしている。

(2) 一様勾配斜面

a) 諸条件 実験は Nwogu (1996) を用いる。水深 0.56 (m), 斜面勾配 1/25, 波の周期、および波高は、2.0 (s), および 0.09 (m) の規則波である。なお、岸側には波を透過させるために、0.03 (m) の一様水深を設けている。また、各パラメタは、表-2 のようにした。

表-2 パラメタ (Nwogu (1996) のケース

γ_{uf}	γ_t	γ_{l2}
0.3	0.1	1.0

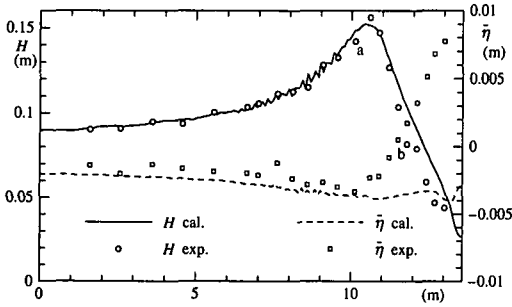


図-2 波高および平均水深の変化

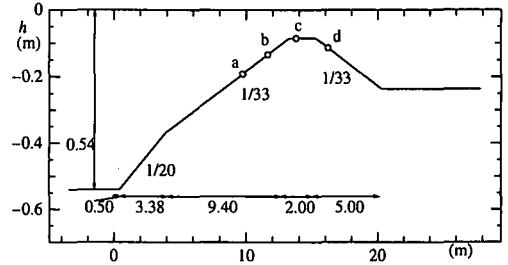


図-4 実験条件

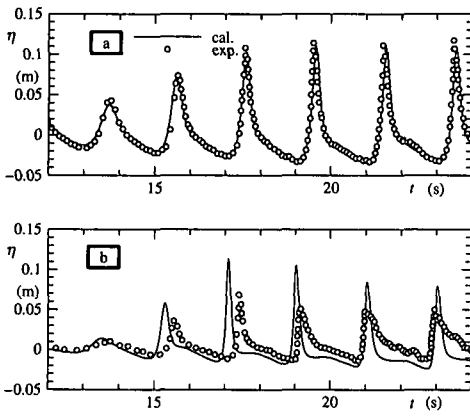


図-3 波形の比較

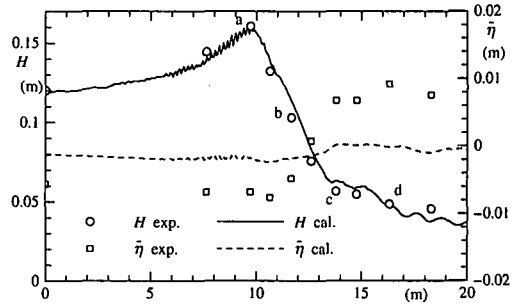


図-5 波高および平均水深の比較

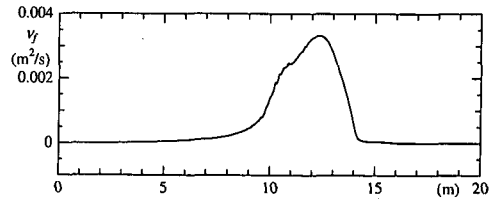


図-6 ν_f の1周期平均

b) 実験値との比較 図-2は波高および平均水深の比較である。これによると、波高の変化については、全体的に良い精度で計算できている。しかし、平均水深に関しては、wave set-up がほとんど起こっていないことが分かる。これに対する原因は定かではないが、境界の問題ではないかと考えている。

図-3は時系列波形の比較である。a点、b点はそれぞれ図-2の点に相当する。水深はa点が0.17 (m)、b点が0.09 (m)である。砕波点付近の波形の変化は、精度良く解析できていることがわかる。しかし、砕波後については、実験の波形に比べて尖り過ぎる傾向が見られる。

(3) パー型地形

a) 諸条件 実験は Schäffer et al. (1993) を用いる (図4)。波の周期、および波高は、1.6 (s)、および0.12 (m) の規則波である。パラメタに関しては表-3 のようにした。

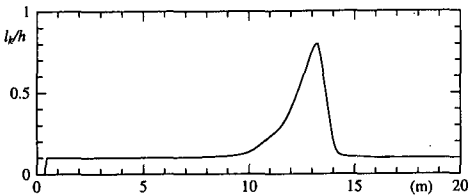
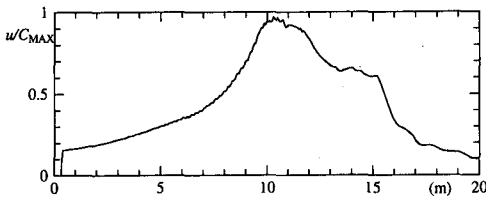
表-3 パラメタ (Schäffer (1996) のケース

γ_{uf}	γ_t	γ_{12}
0.35	0.05	1.5

b) 実験値との比較 図-5は、波高および平均水深

の比較である。これによると、波高の変化については、実験とよく一致している。しかし、平均水深については、一様勾配斜面の結果同様に、ほとんど、set-up も set-down も見られず、実験値の1/5程度の値となっている。

また、図-6は、減衰係数 ν_f の1周期平均をとったものである。従来の、Dibajnia・渡邊 (1987) による f_0 の方法では、波の反射を防ぐために、係数を砕波点より徐々に大きくしていたが、そのようなことを用いることなしに、徐々に ν_f が大きくなっていることがわかる。また、波の再生領域においても、これまでのような経験則を用いることなしに、 ν_f が小さくなっている。図-7は、乱れの代表長さである式 (34) の係数部分の1周期平均である。これは、Cox et al. (1994) が実験で得た値よりも大きな値となっているが、砕波点から変形していくにつれ、係数が大きくなるという特徴は良く表れていることがわかる。図-8は、流速・波速比 u_s/C の各点での1周期の間での最大値である。これを見ると、 ν_f がほぼ0になった14 (m) 付近では、流速・波速比は0.6程度の値となっ

図-7 l_k/h の1周期平均図-8 u_s/C の1周期での最大値

ている。磯部 (1986) によると、再生条件に $U/C=0.135$ を用いているが、非線形性を考慮した場合はこれより大きな値をとるべきであることがわかる。

最後に、時系列波形を、図-4 での a, b, c, および d 点で比較する。それぞれ、水平座標が 9.78 (m), 11.78 (m), 13.78 (m), 16.28 (m) である。碎波点付近の a 点においては、一様勾配斜面の結果と同様に精度良く計算している。しかし、b 点、c 点では、計算の方が尖っている。また、d 点では、実験値の方では、2 次波峰が発生しているが、計算ではその発達が良く見られない。これに関しては、もう少しモデルの改良が必要であると考えている。

6. 結 語

非線形緩勾配方程式に拡散型の減衰項をくわえることにより、碎波減衰を表現した。その際、減衰係数の評価をエネルギーの逸散率と関係づけることから求められることを示した。また、そのモデルの妥当性を示すために、パー型地形を用いて、実験値と比べたところ、波高の変化においては、良い精度で求められることが確認された。しかし、波形については、碎波帯内では実験より尖る傾向にあり、また、平均水深も実験より小さくなるという問題もある。さらに、パラメタについても、どのように定めるかということが今後の課題になる。

しかし、これまでのような経験則を用いずに碎波減衰係数の評価ができ、本モデルの妥当性が確かめられた。

参 考 文 献

有川太郎・磯部雅彦 (1997): 非線形緩勾配方程式を用いた碎波判定法の適用性, 海岸工学論文集, 第 44 巻 (1), pp. 91-95.

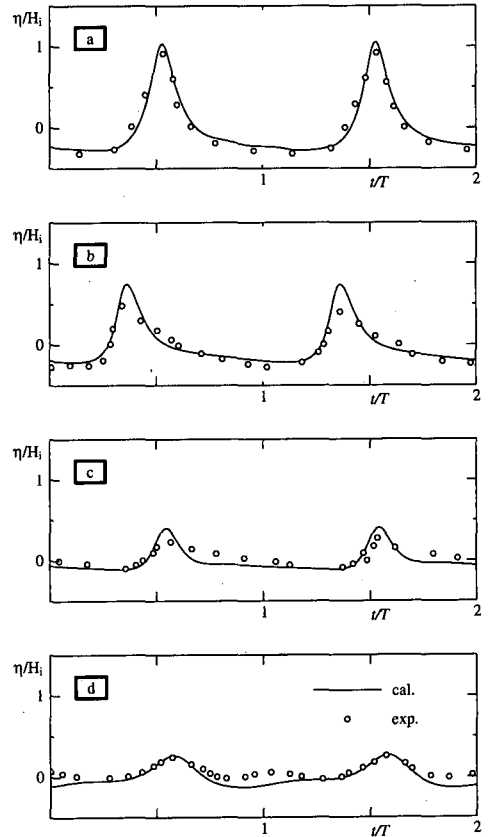


図-9 波形の比較

磯部雅彦 (1986): 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・碎波変形の計算法, 第 33 回海岸工学講演会論文集, pp. 134-138.

磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻 (1), pp. 1-5.

灘岡和夫・大野修史・栗原 礼 (1996): 波動場の力学状態に基づく碎波過程の解析と碎波条件, 海岸工学論文集, 第 43 巻 (1), pp. 81-85.

灘岡和夫・大野修史 (1997): 水深積分型乱流エネルギー輸送方程式を連結させた碎波帯内波動場モデルの提案, 海岸工学論文集, 第 44 巻 (1), pp. 106-110.

Dibajnia, M.・渡邊 晃 (1987): 波浪場と海浜横断地形変化の数値計算モデル, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 291-296.

Cox, D. T., N. Kobayashi, and A. Okayasu (1994): Vertical Variation of Fluid Velocities and Shear Stress in Surf Zone, Proc. 24th ICCE, pp. 98-112.

Méhauté, B. L. (1963): On Non-Saturated Breakers And The Wave Run-Up, Proc. 8th ICCE, pp. 77-92.

Nwogu, O. G. (1996): Numerical Prediction Of Breaking Waves And Currents With Boussinesq Model, Proc. 25th ICCE, pp. 4807-4820.

Schäffer, H. A., P. A. Madsen and R. Deigaard (1993): A Boussinesq model for waves breaking in shallow water, Coastal Engineering, vol. 20, pp. 185-202.