

界面の大変形を伴う気液二相流体場の数値解析

——衝突砕波および上昇気泡解析への適用——

由比政年*・石田 啓**・保智正和***

1. 序 論

近年の数値流体力学の発展に伴い、移動境界を有する流体場に対する数値解析手法として、MAC 法 (Harlow ら, 1965), ALE 法 (Hirt ら, 1972), VOF 法 (Hirt ら, 1981), 密度関数法 (Miyata ら, 1988), レベルセット法 (Sussman ら, 1994) などの有力な差分解析法が提案されてきた。こうした解析技術は、海岸工学の分野にも導入され、主に砕波時の波浪変形の解析に適用されてその成果を挙げつつある (たとえば、酒井ら, 1988; 川崎ら, 1995; 滝川ら, 1995; 渡部ら, 1995 など)。一般に、これらの解析では、空気運動が水面波に及ぼす影響は微小であるとして、水相の運動のみを対象に解析を進めている。

一方、海岸工学の対象とする流体場の中には、気泡混入を伴う砕波、海上風と波浪の干渉、気泡によるエアレーションの際の循環流の発生など、空気と水の相互干渉が本質的で、気液二相流としての扱いが必要とされるものも多い。これらの流体場に見られる主な特徴は、①気泡や水塊の融合・分裂という界面の大変形を伴う、②水面近傍で 800 程度の高密度比を有する、③境界面における表面張力の作用が重要となることの 3 点である。こうした特徴を持つ気液二相流の純理論的な解析は極めて困難であり、今後、関連した流体運動のメカニズムを解明していく上で、信頼性の高い数値解析技術を確立し、実験的研究との有機的な連携を実現していくことが、極めて重要となる。

こうした観点から、本研究では、空気中の水面波や水中の気泡の運動を対象とし、高密度比、界面の大変形および表面張力の作用を特徴とする気液二相流の 2 次元数値解析モデルを構築し、解析手法の有効性や海岸工学上の諸問題に対するその適用性を検討する。

2. 解析の手法

2.1 基礎方程式

互いに混和しない非圧縮性の気液二相流体を考える。

その支配方程式は、連続式と Navier-Stokes 方程式およびパーティクルパスに沿った密度と粘性係数の保存式であり、無次元化された形で、以下のように表現できる (Sussman ら, 1994)。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{Fr} \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \left(-\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \frac{1}{B} \kappa \delta(d) \mathbf{n} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mu = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 t は時間、 ∇ はナブラ演算子である。また、 $\mathbf{u}$ は速度、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 $\mathbf{g}$ は重力、 $\mathbf{D}$ は粘性応力テンソル、 κ は気液界面の曲率、 δ は Dirac のデルタ関数、 $\mathbf{n}$ は気液界面の法線ベクトルを表す。 Fr , Re , B は、それぞれ、Froude 数、Reynolds 数、Bond 数を表し、気液流体の密度比および粘性比と合わせて、解析上の 5 つの重要なパラメータとなる。

2.2 レベルセット法の概要

基礎式 (1)~(4) に支配される気液二相流体場は、高密度比を有し、界面の大変形を伴うことに加え、界面における表面張力の作用が重要となる。これらの数値解析上の難題を克服し、解析モデルの信頼性を高めるためには、その基本となる数値スキームを適切に選定することが極めて重要である。二相流体の解析のための数値スキームとして、これまでにいくつかのものが提案されているが、ここでは、先の 3 つの特徴に対して高精度でかつ柔軟な対応が可能であり、しかも、将来の 3 次元解析への拡張も直接的であるという点から、Sussman ら (1994) の提唱するレベルセット法に基づいて気液二相流体場の数値解析モデルを構築した。以下に、その概要を説明する。

一般に、気液界面においては、流体の密度および粘性係数は急激に変化する。この点が、従来の差分スキームを用いて式 (3), (4) を数値解析することを困難とし、

* 正会員 博 (工) 金沢大学講師 工学部土木建設工学科
** 正会員 工 博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科
*** 工 修 (株) キクチコンサルタント

界面近傍で数値的な振動を生じるか、あるいは、逆に、計算を安定化させるための過度の数値粘性を発生させることが多い。そこで、式(3)、(4)を直接解く代わりに、レベルセット法を用いて界面を捕獲(capture)し、間接的に密度および粘性係数の時空間変化を追跡することを考える。

以下では、レベルセット関数 ϕ として界面からの符号付き距離関数を用いる。また、気体内部で $\phi < 0$ 、液体内部で $\phi > 0$ 、界面で $\phi = 0$ となるように ϕ の初期設定を行い、次式に従って ϕ の時間発展を計算する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 ϕ は滑らかな連続関数であるため、上式は数値的に容易に解くことができる。この時、界面形状は、各時刻での ϕ のゼロレベルセット($\phi = 0$ のライン)として自動的に決定される。また、各点、各時刻における流体の密度および粘性係数の値も、次式により算出できる。

$$\rho = \begin{cases} \rho_w & \text{if } \phi > 0 \\ \rho_a & \text{if } \phi < 0 \\ (\rho_w + \rho_a)/2 & \text{if } \phi = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\mu = \begin{cases} \mu_w & \text{if } \phi > 0 \\ \mu_a & \text{if } \phi < 0 \\ (\mu_w + \mu_a)/2 & \text{if } \phi = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、添字 w 、 a がそれぞれ液体相、気体相を表す。次に、式(2)の数値解析について考える。二流体間の密度比が高い場合、式(6)に従って不連続な密度分布を設定すると、式(2)の数値解が界面近傍で不安定となる場合が存在する。この問題を回避し、計算を安定に進めるために、次式に従って、界面近傍の密度分布の平滑化を行う。

$$\rho(\phi) = \begin{cases} \rho_w & \text{if } \phi > \alpha \\ \rho_a & \text{if } \phi < -\alpha \\ \bar{\rho} + \Delta\rho \sin(\pi\phi/(2\alpha)) & \text{otherwise} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\bar{\rho} = (\rho_w + \rho_a)/2$ 、 $\Delta\rho = (\rho_w - \rho_a)/2$ である。

この平滑化により、界面は有限な幅 α を持つことになる。この大きさは、全時間ステップにおいて一定であり、格子幅の1.5倍としている。なお、表面張力に関しても同様の平滑化操作が必要となる。

さて、式(5)は、界面を正確に移動させるものの、 ϕ の距離関数としての性質($|\nabla \phi| = 1$)の維持は保証されない。一方、界面での表面張力算出の際には、 ϕ の距離関数としての性質が重要となる。このため、各時間ステップにおいて、界面の移動を計算した後に、 ϕ を再設定して、距離関数としての性質を回復させる必要がある。ここでは、次のようにして ϕ の再設定を行う。

まず、式(5)により更新された ϕ を $\phi_0(x)$ で表す。次に、以下に示す初期値問題の定常解を求める。

$$\phi_t = S(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|) \quad \text{with } \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 S は符号関数であり、下付きの添字 t は偏微分を表す。こうして再設定された ϕ は、距離関数としての性質を回復しているため、表面張力項の正確な評価が可能となる。

2.3 差分化の手法

基礎方程式の差分化にあたっては、直交等間隔のスタガード格子系を用い、2次精度のAdams-Bashforth法によって、陽的に時間発展の計算を行った。また、空間微分のうち、対流項に関しては、2次精度のENOスキーム(Shuら、1989)を、その他の項に関しては、2次精度の中心差分を用いた。

3. 解析結果および考察

3.1 水柱崩壊問題の解析

まず、今回用いた解析手法が、高密度比の気液二相流体場の解析に有効であることを検証するために、空気中での水柱崩壊問題(ダムブレイク問題)の解析を行った。その設定の概略は以下の通りである。

初期には、図-1(a)中の矩形の黒色部に水が、それ以外の部分には空気が、いずれも静止状態で存在し、無次元時間 $t=0$ で瞬間的に拘束が解かれて運動を開始する。ここで、上下左右の境界は、すべて自由滑りの壁面とする。また、水柱の初期幅を a 、水柱崩壊後の先端位置を η で表す。なお、右壁面は、水柱左端から $8a$ の地点に設定し、水柱が壁面に衝突するまでを解析の対象とする。

解析は、水柱初期形状の縦横比を1、2、4の3通りに変化させて行った。ここでは、その中から、縦横比が2の場合の解析結果を示す。なお、ここでのレイノルズ数は約36000、ボンダ数は無限大(表面張力なし)、フルード数は1である。ここで、気体および液体として、常温大気圧下の空気と水を想定したため、気液二相流体の密度比は約815、粘性比は約55となる。また、解析に使用した格子点数は、 128×48 点である。

以上の条件下で解析を行った時の水柱形状の時間変化の様子を図-1に示す。初期に矩形状をした水塊は、拘束を解かれた後、崩壊しながら前方(右側)へと運動を開始する。この前方への広がりに伴い、水柱の右肩の部分下がりが、残存高さも減少を続ける。ここで、水面は、初期には右肩部の角を残したまま変形していくが、後に、次第に滑らかな形状を示すように変化する。最終的にはほぼ直線状の形状を呈するようになる。この様子は、Martinら(1952)の可視化実験結果と良く一致している。

次に、水柱先端位置 η の時間変化を、Martinら(1952)の実験結果と比較してみた。その結果を図-2に示す。両者の一致は非常に良好である。なお、ここで、数値解析

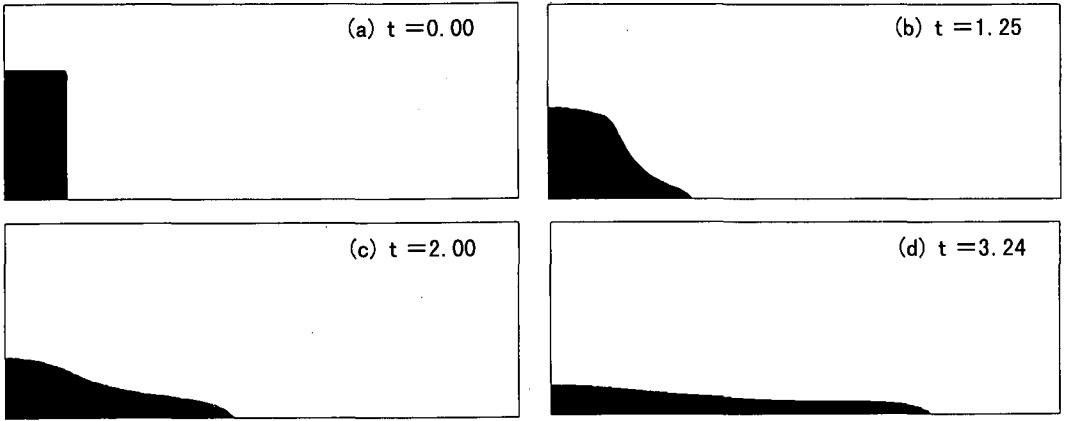


図-1 水柱形状の時間変化 (壁面衝突を伴わない場合)

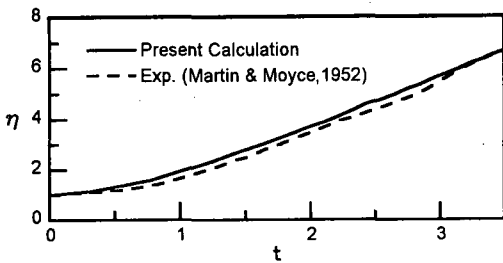


図-2 水柱先端位置の時間変化

結果は実験結果より僅かに大き目の先端速度を示している。これは、底面を自由滑り壁としたためであり、他の手法を用いた解析結果でも一般に同様の傾向が見られる(たとえば, Hirt ら, 1981; 越塚, 1997 参照)。さらに、水柱左端位置での水柱残存高さの時間変化を解析し、Martin ら (1952) の実験結果と比較したところ、ここでも、両者の間には良好な一致が見られた。なお、ここで用いた無次元時間 t の定義は、 $t = \bar{t} / \sqrt{a/g}$ ($\bar{t}$ は有次元量、 g は重力加速度を表す) であり、Martin ら (1952) の無次元時間の定義とは異なる形で表現されている。

3.2 壁面への衝突・遡上・砕波過程の解析

次に、界面の融合・分裂を伴うような大変形問題への解析手法の適用性を検討してみた。以下では、水柱崩壊問題において、右壁面を水柱左端から $4a$ の位置に設定し、崩壊した水柱が、右壁面へ激しく衝突・遡上した後には砕波する過程を解析した結果を示す。なお、本節の解析に用いた条件は、右壁面の位置を除いて前節と同様である。また、使用した格子点数は、 64×48 点である。

図-3 には、水面形状の時間変化を示す。ここで、崩壊した水塊が右壁面と衝突するまでの過程は前節と同様である。しかしながら、水柱先端が右壁面に到達した後の変形過程は先の例とは大きく異なり、界面の激しい変形を伴う。まず、 $t=2.3$ 付近で水柱先端が壁面に衝突すると、水柱先端部は、右壁面に沿って、かなり速い速度で遡上を続ける。遡上高さは、 $t=4.0$ 前後で最大となり、上部壁面、すなわち、初期の高さよりもはるかに高い位置にまで到達する。この後、遡上した水塊の上端部は、重力の作用により次第に減速し、 $t=4.5$ 前後から落下を開始する。落下する水塊は、下方からさらに遡上を続け

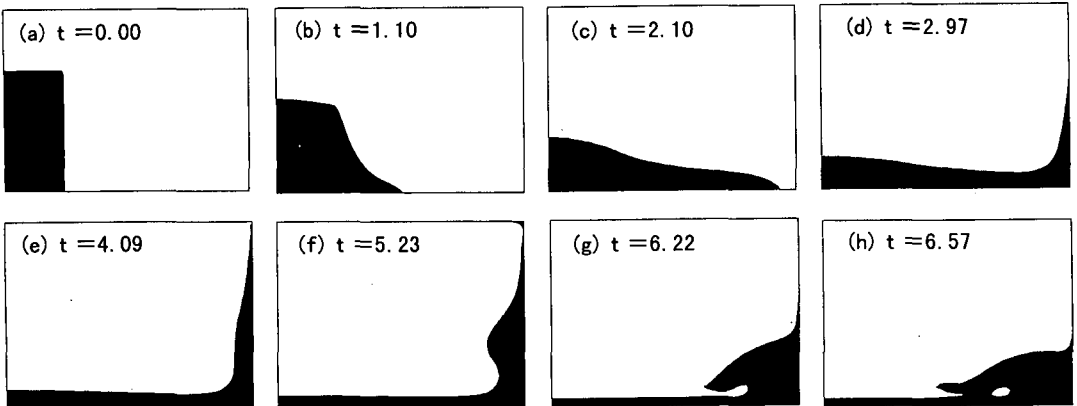
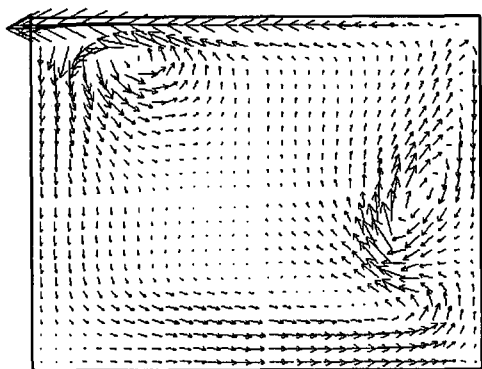


図-3 水柱形状の時間変化 (壁面衝突を伴う場合)

図-4 速度ベクトルの分布 ($t=6.22$)

ようとする後続の水塊と衝突し、水流は横方向へと曲げられる。横方向へ向けられた水流は、さらに、重力の作用により下方へと向かい、水面には大きな巻き波が生じる。

この巻き波は、水面に衝突して跳ね上がり、左方に伸びた後に、水面と二度目の衝突をしていく。図-3では、このような、界面の融合・分裂を含んだ水面波の大変形の様子が明確に捉えられている。なお、この様子は越塚(1997)の実験結果とも良く一致することが確認された。今回の解析をさらに発展させ、砕波の防波堤への衝突状況を解析することも可能である。

次に、図-4に、 $t=6.22$ における速度ベクトルの分布を示す。水面波の巻き込み時における複雑な速度分布が明確に捉えられていることに加え、水相の運動に誘起された気体相の運動や渦構造の詳細が確認できる。このことは、逆に、気体相の運動(風)が水面波の運動に及ぼす影響についても解析が可能なことを示唆している。

3.3 気泡上昇問題の解析

次に、静止流体中を上昇する単一気泡周辺の流体場の解析を行い、高密度比、界面の大変形および表面張力の作用という3つの特徴をすべて有する流体場への解析手法の適用性を検討した。

解析にあたっては、まず、Sussmanら(1994)と同様に、四方を壁面で囲まれた水中を上昇する気泡の運動を

解析し、計算の安定性や格子依存性を検討した。その結果、表面張力の作用を考慮する場合には、計算結果の格子依存性あるいは時間刻みに対する依存性が大きくなり、計算に使用する空間刻みおよび時間刻みの設定に際して十分な注意が必要であることが明らかになった。一方、計算の安定性に関しては、特に問題となる点はなかった。

次に、水表面近傍において、水表面と干渉しながら上昇する単一気泡の運動を解析した。以下、図-5に、弱い表面張力が作用する場合($B=200$)の気泡形状の時間変化を示す。また、この場合の気泡近傍における速度ベクトルの解析例を図-6に示す。次に、図-7には、強い表面張力が作用する場合($B=0.4$)の気泡形状の時間変化を示す。なお、図-5および図-7の黒色部分が気体に対応する。いずれの場合においても、Reynolds数は100、Froude数は1であり、密度比および粘性係数比は、前節と同様に、それぞれ約815および約55と設定した。

初期条件としては、円形の気泡が静止状態で水中に存在し、 $t=0$ で拘束が解かれて運動を開始するという状態を設定した。また、気泡の変形は、中心軸に対して左右対称であると仮定して、右側境界では対称条件を課した。さらに、その他の境界条件として、上下および左の境界には自由滑り壁を設定した。計算に使用した格子点数は、

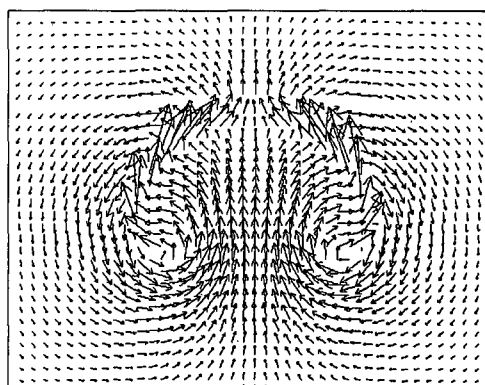
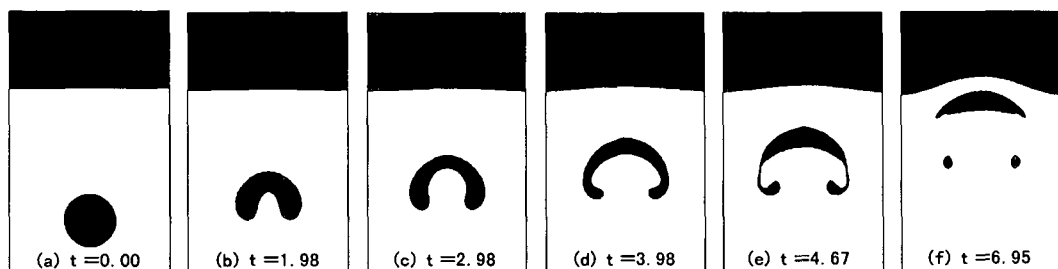
図-6 気泡近傍の速度ベクトル ($t=3.98$)

図-5 気泡形状の時間変化 (表面張力が小さい場合)

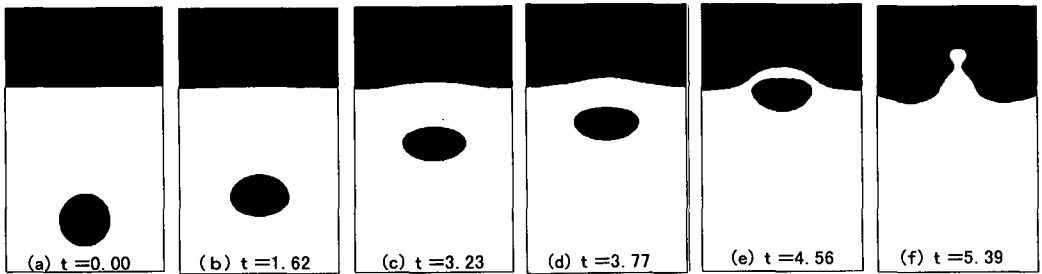


図-7 気泡形状の時間変化 (表面張力が大きい場合)

64×128点であり、計算領域として、上下および左右方向に気泡直径の10倍の領域を設定している。

表面張力が弱い場合には、気泡はその上昇過程で大きな変形を示す。初期に円形をした気泡は、上昇開始直後から楕円形に変形し始め、すぐに下部中央から窪みを発生して馬蹄形へと変形していく。次に、馬蹄形の両端部に巻き込みが生じ、巻き込みの付け根部分が次第に細くなっていく。続いて、 $t=4.7$ 前後でこの部分が破断し、気泡は、大きな三日月型の部分とその下方の小さな楕円形の部分へと分裂する。この後、気泡は水面との干渉を強め、中央部に水面の盛り上がりを生じながらさらに上昇を続け、最終的に水面を抜けて上部の気体と融合する。図-5では、このような気泡の変形過程が詳細に捉えられている。また、図-6では、気泡の上昇に誘起された上昇流の発生、あるいは、気泡の巻き込み部分に形成される細かい渦構造の詳細などを確認することができる。

一方、表面張力が強い場合には、先の例とは異なり、気泡は、初期の円形から楕円形状に変形した後に、ある程度形状を保ちつつ上昇する。上昇を続けて水面と干渉するようになると、気泡は少し偏平になり、特に、上面が平坦な形をとる。この後、さらに、気泡は上昇を続け、水面中央部に大きな盛り上がりを形成した後に、水面を抜け、上部の気体と融合する。気泡の通過後も、水面は振動的な変化を続ける。図-7では、こうした一連の過程が詳細に解析されている。また、図-5および図-7に示した2つの結果を比較することにより、今回構築した解析モデルが、表面張力の違いによる流体場の変化を詳細に解析可能であることも確認された。

4. 結 論

互いに混和しない非圧縮性の二相流体の運動に対する数値解析モデルを構築し、高密度比を有する気液二相流体場の解析を行った。水柱崩壊問題および単一気泡周辺の流体場の解析では、界面の融合・分裂といった大変形の過程や表面張力の強さによる気泡形状の相違などを詳細に捉えることに成功した。また、解析結果と従来の実験結果との一致も良好で、気液二相流体場の解析に対す

る解析手法の有効性が検証された。

今回は、水柱崩壊と単一気泡の上昇という基礎的な問題を対象としたが、今後、水面波の碎波時の内部機構や碎波後の気泡混入を伴う流体場の解析、海岸構造物への衝突碎波や越波、あるいは、深海鉱物資源の気泡を利用した揚鉱システム(エアリフト方式)実現のための気泡流の内部機構の解明などへ向けて研究を進展させていきたいと考えている。

参 考 文 献

- 川崎浩司・岩田好一郎(1996): 3次元波動場に設置された潜堤によるSpilling型碎波の変形過程に、関する数値解析, 海岸工学論文集, 第43巻, pp. 96-100.
- 越塚誠一(1997): 数値流体力学, 培風館, 223p.
- 酒井哲郎・水谷太作・田中秀明・多田幸夫(1987): 斜面上の巻き波型碎波の碎波後の運動機構の数値計算, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 71-75.
- 滝川 清・山田文彦・松本健作(1995): Boundary-Fit法による任意海底形状の碎波変形解析, 海岸工学論文集, 第42巻, pp. 86-90.
- 渡部靖憲・佐伯 浩(1996): 碎波帯内の流速場のダイレクトシミュレーション, 海岸工学論文集, 第43巻, pp. 71-75.
- Harlow, F. H. and J. E. Welch. (1965): Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Physics of Fluids, Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189.
- Hirt, C. W., A. Amsden, and J. Cook (1972): An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, J. Comp. Phys., Vol. 14, pp. 227-253.
- Hirt, C. W. and B. Nichols, (1981): Volume of fluid method For the dynamics of free boundaries, J. Comp. Phys., Vol. 39, pp. 201-225.
- Martin, J. C. and W. J. Moyce (1952): An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, Vol. 244, pp. 312-324.
- Miyata, H., M. Katsumata, Y. G. Lee, and H. Kajitani (1988): A finite-difference simulation method for strongly interacting two-layer flow, J. Soc. Naval Archit. Japan, Vol. 163, pp. 1-16.
- Shu, C. W. and S. Osher (1989): Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, J. Comp. Phys., Vol. 83, pp. 32-78.
- Sussman, M., P. Smereka, and S. Osher (1994): A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, J. Comp. Phys., Vol. 114, pp. 146-159.