

C-CUP 法による気液界面の直接数値計算

陸 田 秀 実*・河合ひろみ**・安 田 孝 志***

1. 緒 言

海面境界過程は、圧縮性流体である気相と非圧縮性流体である液相の流体特性が大きく異なる境界面の複雑運動であり、これに碎波現象が加って 3 次元性の強い気液共存系となる。この気液共存系の流動形態に対して、各相を個別に取り扱うことはもはや不可能であり、気相と液相を同一の支配方程式によって統一的に取り扱うことが必要となる。

これまで、こうした移動境界問題については、非圧縮の仮定の下に液相のみの運動を取り扱い、連続式を満たすように圧力補正が行われ、適当な界面境界条件の下で ALE 法や VOF 法などによって数値計算されてきた。しかしながら、これらの手法には物理的に不都合な部分も認識されている。また、各相の分裂・飛散・合体などの急激な大変形問題に対しては適用限界があり、それぞれ種々の改良が施されてはいるもののその発展性に乏しいこともわかってきた。

一方、近年、圧縮性/非圧縮性流体を同時に取り扱う計算手法の開発が積極的に行われ、Yabe & Wang (1991a) によって C-CUP (Cubic interpolated pseudo particle Combined Unified Procedure) 法が提案され、その適用範囲の広さ、精度の良さの面から様々な応用が期待されている。この手法を海の波の問題に適用すれば、従来の数値計算手法において困難となっている様々な問題（物理量の移流の高精度化、界面の高精度な捕獲、界面の境界条件の煩雑さ、分裂・飛散・合体の再現、3 次元化）も解消出来る可能性がある。

本研究では、海面境界過程に対する C-CUP 法の計算コードを開発し、海の波の諸問題に対する適用性と今後の発展性について検討する。

2. 数値計算手法

2.1 支配方程式

支配方程式は、3 次元圧縮性粘性流体に対する

Navier-Stokes 方程式、密度と密度関数の質量保存式、時間発展型の圧力方程式および理想気体の状態方程式である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_{sx} \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_{sy} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_{sz} + G_z \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi w)}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} \\ + \rho C_s^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$P = \rho R T \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 ϕ は密度関数 ($0 \leq \phi \leq 1$)、 G_z は重力加速度、 μ は粘性係数、 ρ は流体密度、 F_s は表面張力、 C_s は音速、 R は気体定数、 T は温度を示す。また、本研究で使った共通の主な物性値を表-1 に示す。なお、ここでは流体はバロトロピー流体と考える。

以上の支配方程式に対して、次章で述べるように、移流項と非移流項についてはそれぞれ分離して解く 2 段階法を採用する。

* 正 会 員 工 修 岐阜大学助手 工学部土木工学科
** 学生会員 岐阜大学大学院 工学研究科
*** 正 会 員 工 博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

表-1 代表的な各物性値

time step	0.001 [s]
Acceleration Coef. of Gravity	9.80665 [kg/m ³]
Atomospheric Pressure	1013 [hPa]
Temperature	300 [K]
Liquid Density	$\rho_L=10^3$ [kg/m ³]
Gas Density	$\rho_G=1.25$ [kg/m ³]
Liquid Viscosity	$\mu_L=1.0 \times 10^{-3}$ [Pa·s]
Gas Viscosity	$\mu_G=1.8 \times 10^{-6}$ [Pa·s]
Surface Tension Coefficient	7.2×10^{-2} [N/m]

2.2 非移流項について

まず、移流項以外の項について以下のように展開し、仮の各物理量 (P^* , ρ^* , ϕ^* , u^* , v^* , w^*) を求める。

$$\frac{\phi^* - \phi^n}{\Delta t} = -\phi^n \left(\frac{\partial u^{**}}{\partial x} + \frac{\partial v^{**}}{\partial y} + \frac{\partial w^{**}}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t} = -\rho^n \left(\frac{\partial u^{**}}{\partial x} + \frac{\partial v^{**}}{\partial y} + \frac{\partial w^{**}}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{P^* - P^n}{\Delta t} = -\rho^n C_s^2 \left(\frac{\partial u^{**}}{\partial x} + \frac{\partial v^{**}}{\partial y} + \frac{\partial w^{**}}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{u^{**} - u^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P^*}{\partial x} + F_{sx} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{u^* - u^{**}}{\Delta t} = & \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial w^n}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} \right) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\frac{v^{**} - v^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P^*}{\partial y} + F_{sy} \right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{v^* - v^{**}}{\Delta t} = & \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial w^n}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2} \right) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\frac{w^{**} - w^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P^*}{\partial z} + F_{sz} \right) + G_z \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{w^* - w^{**}}{\Delta t} = & \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial w^n}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial z^2} \right) \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

さらに、式 (11), (13), (15) をそれぞれ空間微分した後、式 (10) へ代入すると圧力に関するポアソン方程式が次のように導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 P^*}{\rho^n} \approx & \nabla \left(\frac{\nabla P^*}{\rho^n} \right) = \frac{P^* - P^n}{\rho^n C_s^2 \Delta t^2} \\ & + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial w^n}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

また、式 (9), (10) より、 ∇u^{**} を消去すると下式が導かれる。

$$\rho^* - \rho^n = \frac{1}{C_s^2} (P^* - P^n) \quad \dots\dots\dots (18)$$

同様に、式 (8), (10) より、

$$\phi^* - \phi^n = \frac{1}{C_s^2} (P^* - P^n) \quad \dots\dots\dots (19)$$

なお、計算格子は staggerd 格子とし、時間積分には Euler の陽階法、拡散項には 2 次の中心差分を用いた。

以上より、式 (17) から収束計算 (誤差二乗ノルムは 10^{-5}) で P^* を求めた後、式 (11), (12) より u^* , 式 (13), (14) より v^* , 式 (15), (16) より w^* , 式 (18) より ρ^* , 式 (19) より ϕ^* をそれぞれ求める。

2.3 移流項について

前節で求めた仮の物理量 (P^* , ϕ^* , ρ^* , u^* , v^* , w^*) を用いて、次時刻のステップの真の物理量を求める。ここでは、高精度な移流計算が可能である Yabe & Aoki (1991b) の CIP (Cubic Interpolated Pseudo-Particle) 法を採用する。CIP 法の最大の特徴は、物理量だけでなくその一階微分値も用いるため、物理量の変化量も保持できる点にある。このため、気液などの流体特性 (高密度比や高粘性比) が大きく異なる流体場を同時に解く場合、発散の原因となる物理量の不連続な急変部分に対しても CIP 法は安定に計算を進めることができる。

前節を含めた以上の計算手順を図-1 に示す。

2.4 音速の取り扱い

本研究で扱う流体はバロトロピー流体を仮定しているので、断熱過程および等温変化が成り立つとして、

$$C_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \quad \dots\dots\dots (20)$$

より各セルごとに局所的音速を求めることができる。つまり、気液両相ともに実際の音速を与えるため、圧縮性/

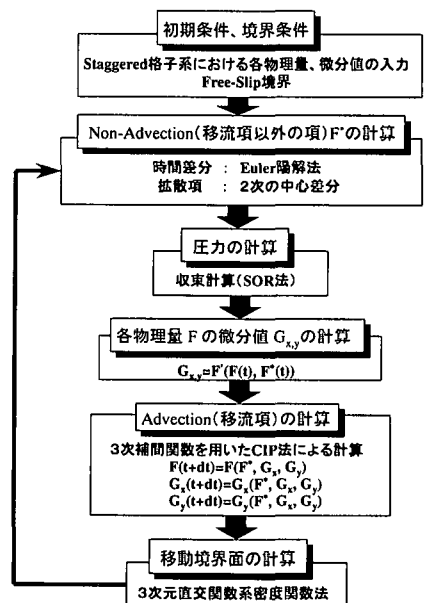


図-1 C-CUP 法の計算アルゴリズム

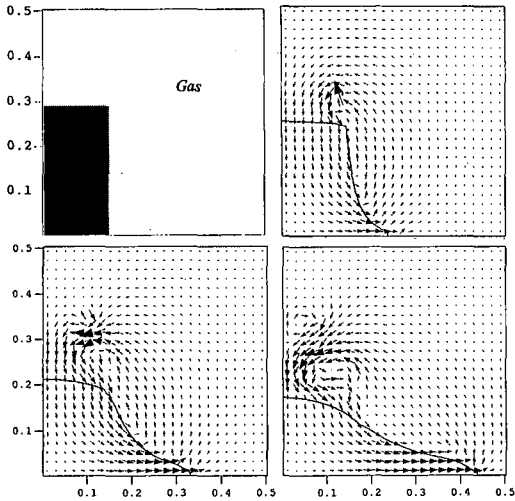


図-2 2次元ダムブレイク問題

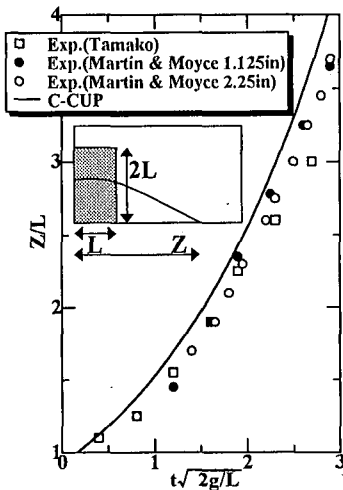


図-3 ダム先端位置の変化の比較

非圧縮性流体のそれぞれの特性が各セルごとに反映されることになる。

気相領域は理想気体の状態方程式が成り立ち、液相領域については、実験式（日本原子力学会編，1993）を用い、式（20）へ代入した。

2.5 表面張力モデル

気液が複雑に共存する流体場では、気液界面に作用する表面張力を無視することはできない。2つの異なる連続媒質の境界面を扱う問題は極めて狭い遷移領域を挟む不連続問題であり、取り扱いが非常に困難となる。本研究では、Brackbillら（1992）によるCSFモデルを採用した。このモデルは、境界面に作用する圧力差を遷移領域（気液界面）全域へ作用する体積力として表面張力に置き換える考え方に基づいている。

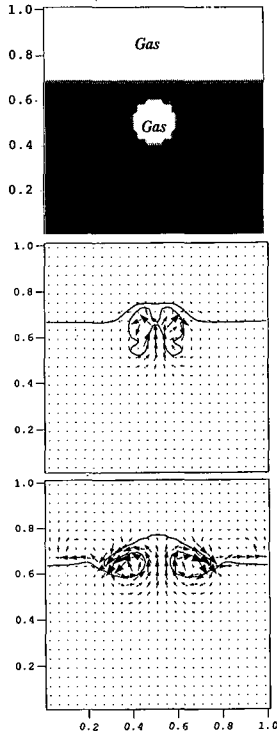


図-4 単一気泡の気相領域への離脱問題

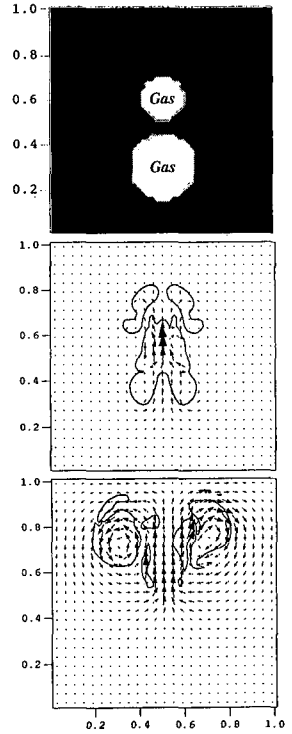


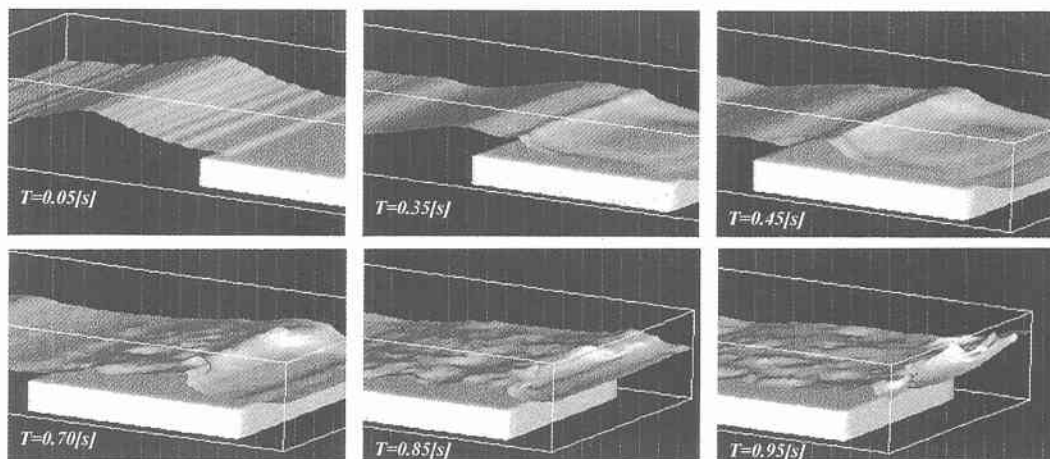
図-5 複数気泡の分裂・合体問題

2.6 テスト計算および精度検証

まず、一般的なテスト計算として、図-2に示すような2次元ダムブレイク現象に適用した。なお、ダム高さ $2L=14.5\text{ cm}$ 、メッシュ数およびサイズ 100×100 、 $dx=dy=0.5\text{ cm}$ とし、壁面境界条件は free slip とした。この図から、液相の波形および流速ベクトルの変化過程が滑らかに再現され、それに伴って発生する急激な気流の変化も計算されていることがわかる。また、図-3はダム下端先端位置 Z の変化について実験結果（玉古，1994）と比較したものであるが、若干のずれは見られるものの、妥当な結果であると考えられる。

砕波現象を数値的に解く場合、液滴の分裂・飛散、さらには取り込まれた気泡の変形、分裂・合体および空気中への離脱を正確に再現することが必須である。図-4は液相内の単一気泡が気相へ離脱する現象に適用したものであり、気泡半径は 10 cm である。また、図-5は液中の複数気泡の上昇過程における分裂・合体現象に適用したものであり、気泡半径は $10, 15\text{ cm}$ である。ここでは、両ケースともメッシュ数およびサイズは 50×50 、 $dx=dy=2\text{ cm}$ とした。

以上より、Euler メッシュによって C-CUP 法と密度関数法を組み合わせれば、大変形かつ分裂・合体・飛散を伴う流体場を計算することが可能であることがわかる。



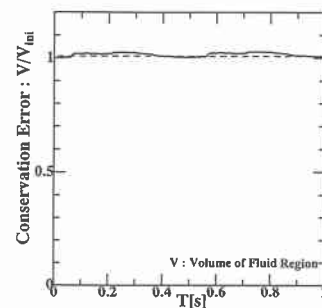
図—6 潜堤上の砕波現象

3. 砕波現象を伴う海の波の諸問題への適用

3.1 潜堤上の砕波問題

図—6 は、潜堤上の砕波問題に適用したものであり、入射波は孤立波とし Fenton の 3 次近似解を用いた。計算領域およびメッシュサイズは、それぞれ波向き方向 $XL=2.0$ m, $dx=0.02$ m, 奥行き方向 $YL=1.0$ m, $dy=0.05$ m, 鉛直方向 $ZL=0.3$ m, $dz=0.01$ m とし、初期水深を 0.15 m とした。また、入射波高は 0.08 m, 潜堤については長さ 0.8 m, 幅 0.8 m, 高さ 0.1 m とした。なお、境界はすべて Free Slip な固定境界としている。

これらの図から、一様に入射した孤立波が潜堤乗り上げ直後 ($T=0.35$ s) に変形し、やがて砕波 ($T=0.45$ s) に至る様子が分かる。さらに、砕波後は 3 次元的な変形 ($T=0.7, 0.85$ s) が急速に進み、最終的には潜堤を透過し側壁に打ち上げられる様子 ($T=0.95$ s) が再現されている。なお、図—7 に示すように、計算中における液相領域の保存性はほぼ保たれている。



図—7 液相領域の保存性

3.2 砕波を伴う越波問題

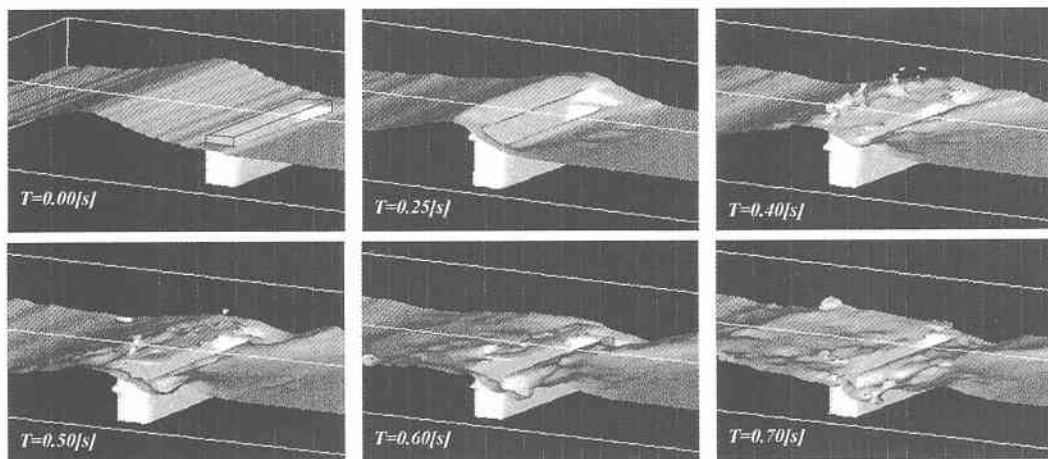
図—8 は、直立堤に乗り上げる孤立波の砕波を伴う越波問題の計算例である。入射波条件、計算領域、メッシュサイズ、初期水深および境界の取り扱いについては前節同様である。直立堤は、高さ 0.18 m, 幅 0.7 m, 長さ 0.1 m とした。なお、直立堤背後を含めた堤体周辺の波形変化を見るため、初期波形以外に対しては、便宜上、静水面上の直立堤部分の描画を行っていない。

これらの図から、一様に入射した孤立波が直立堤に衝突 ($T=0.25$ s) し、それに伴って水塊が分裂・飛散 ($T=0.40$ s) しながら越波する様子がわかる。さらに、越波後 ($T=0.50$ s) は直立堤両側からの回折波が発生し、直立堤背後で 3 次元的な飛沫を伴う波動場 ($T=0.60, 0.70$ s) となっていく様子が再現されている。

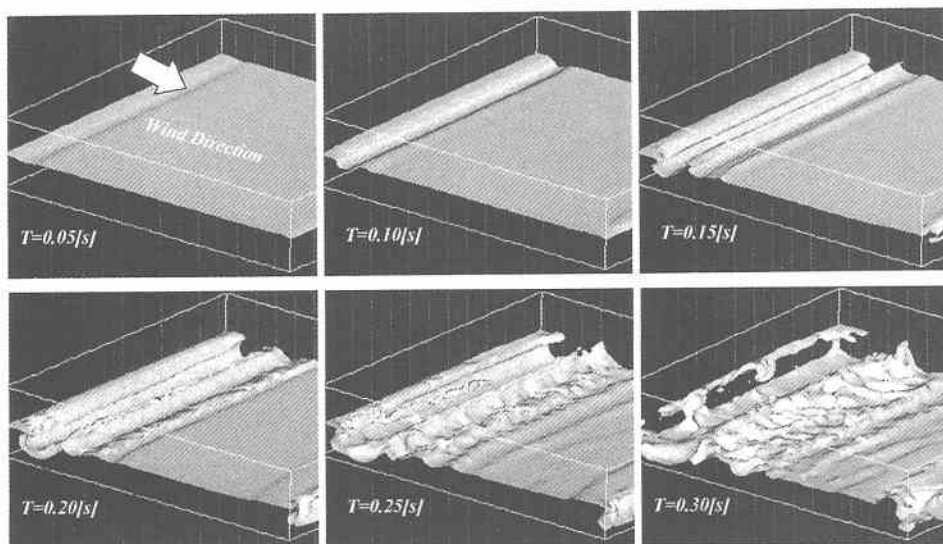
3.3 波の発達問題

図—9 は、微小攪乱のある海面上に 5.0 m/s の風を作用させた時の砕波を伴う波の発達問題に適用したものである。計算領域およびメッシュサイズは、それぞれ風向き方向 $XL=1.0$ m, $dx=0.02$ m, 奥行き方向 $YL=1.0$ m, $dy=0.02$ m, 鉛直方向 $ZL=0.2$ m, $dz=0.01$ m とし、初期水深を 0.1 m とした。なお、境界は風向き方向に周期境界、その他をすべて Free Slip 境界としている。また、気液相を同時解法しているため、当然のことながら界面の煩雑な境界条件は必要としない。

これらの図から、波の発達の初期段階 ($T=0.05, 0.10, 0.15$ s) では、一様な波峰を持つ短波長の波が次々と生成され、その後、波頂部から砕波 ($T=0.20$ s) していく様子がわかる。さらに、砕波した波は液滴を飛散し気泡を液中に取り込みながら再生を繰り返す ($T=0.25$ s), 最終的には界面が大きく乱れた 3 次元性の強い流体場を形成していく様子 ($T=0.30$ s) が再現されている。なお、微小な表面張力波に対してはメッシュサイズが粗いため再現するには至っていないので、今後の十分な検討が必要となる。



図—8 砕波を伴う越波現象



図—9 微小攪乱のある海面上の風波の発生・発達現象

4. 結 語

本研究では、海の波の砕波を伴う気液共存系の界面で行われる分裂・飛散・合体を伴う大変形問題に対して、圧縮性/非圧縮性流体を同時に解く C-CUP 法の数値計算スキームを開発し、その適用性について検討した。

その結果、本計算手法は従来型手法の問題点（特に、正確な界面の捕獲、移流の高精度化、界面での境界条件の煩雑さ、高密度・高粘性比の流体同士の相互作用など）を解消するとともに、従来手法の適用限界を越えた非定常性の強い 3 次元複雑界面に対しても適用可能であると考えられる。但し、格子解像度に限界があるため、格子スケール以下の現象に対しては何らかのモデル化が今後必要となる。また、より実際的な問題に適用し定量的な精度検証を行う必要性がある。

最後に、本研究は文部省科学研究費奨励研究 (10750387) の成果であることを付記し謝意を表する。

参 考 文 献

- 日本原子力学会編 (1993): 気液二相流の数値解析, 朝倉書店, p. 105.
- 玉古博朗 (1994): 界面の分裂飛散を伴う流れ解析のための粒子法の開発, 東大修士論文, 160 p.
- Yabe, T. and P. Y. Wang (1991 a): Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 60, No. 7, pp. 2105-2108.
- Yabe, T. and T. Aoki (1991 b): A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, Computer Physics Communications, 66, pp. 219-232.
- J. U. Brackbill, D. B. Kothe and C. Zemach (1992): A continuum method for modeling surface tension, Journal of Computational Physics, 100, pp. 335-354.