

矩形ステップ上の非線形波浪干渉と碎波限界

合 田 良 実*・岡 崎 健 一**

1. はじめに

天然のリーフや、水深の大きな所に造成される人工干潟はその前面が急勾配であり、波の変形も急激である。こうした地形の極限の形は、前面が鉛直壁で上面が水平な矩形ステップであるといえる。

矩形ステップ上では、合田ら (1994) その他が報告しているように、入射波の 2 倍, 3 倍周波数成分が発達し、それらの振幅が場所的に変動することが知られている。しかし、その物理的メカニズムは不明なままである。本研究では、二次波峰の移動現象を解明した合田・賀川 (1997) の方法を応用し、速度ポテンシャルの摂動展開によって高調波成分の挙動を分析することを第 1 の目的とする。さらに、ステップ上での碎波限界を定量的に明示することを第 2 の目的とする。

2. 摂動法による非線形干渉波の解析

(1) 矩形ステップ周辺の波浪システム

いま矩形ステップの前面の一樣水深部を領域 I, ステップの上を領域 II と定義し、水深をそれぞれ h と h_* で表す。領域 I では入射波と反射波, 領域 II では透過波が存在し、それぞれ 1 次オーダーの基本周波数成分波, 2 次オーダーの 2 倍周波数成分波, 3 次オーダーの 1 倍・3 倍周波数成分波がある。このうち、境界周辺の定常減衰波を除く主要なものを図-1 に示す。

(2) 境界接続法による基本周波数成分波の解

井島 (1971) に従い、領域 I, II における 1 次オーダー

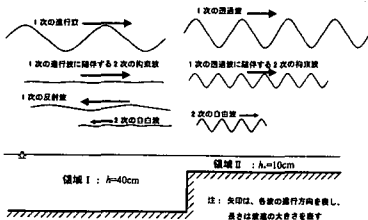


図-1 矩形ステップ周辺の波浪成分

の速度ポテンシャル ϕ_I, ϕ_{II} を次のように表す。
領域 I ($x < 0$):

$$\phi_I(x, z, t) = ia(e^{-ikx} + C_R e^{ikx}) \frac{g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i\omega t} + ia \sum_{m=1}^{\infty} S_m e^{\nu_m x} \frac{g}{\omega} \frac{\cos \nu_m(z+h)}{\cos \nu_m h} e^{i\omega t} \dots (1)$$

領域 II ($x > 0$):

$$\phi_{II}(x, z, t) = iaC_T e^{-ik_* x} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh k_*(z+h_*)}{\cosh k_* h_*} e^{i\omega t} + ia \sum_{n=1}^{\infty} Q_n e^{-\nu_n x} \frac{g}{\omega} \frac{\cos \nu_n(z+h_*)}{\cos \nu_n h_*} e^{i\omega t} \dots (2)$$

ここに x はステップ前端から岸向きの水平座標, z は水面から上方正の鉛直座標, ω は角周波数 ($=2\pi f$), C_R と C_T は複素反射率と透過率, S_m と Q_n は定常減衰波の係数, k, k_*, ν_m, ν_n は式 (3), (4) の分散関係式で定まる波数である。

$$\omega^2 = gk \tanh kh = -g\nu_m \tan \nu_m h : m=1, 2, \dots, (3)$$

$$\omega^2 = gk_* \tanh k_* h_* = -g\nu_n \tan \nu_n h_* : n=1, 2, \dots, (4)$$

ここに g は重力加速度である。

反射率 C_R , 透過率 C_T , および定常減衰波の係数 S_m と Q_n は、境界 $x=0$ における速度ポテンシャルと水平速度の連続性の条件から導かれる連立方程式を解くことによって求められる (井島 (1971) 参照)。

(3) 1 次波に随伴する拘束波

入射波, 反射波, 透過波はそれぞれ高次の拘束波を随伴する。水面の非線形境界条件の下に摂動展開の各次数ごとに解くことにより、入射波であれば波形の実数表示で次のように求められる (Goda・Abe (1968) 参照)。

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) + ka^2 b_{22} \cos 2(kx - \omega t) + \frac{1}{2} k^2 a^3 [b_{11} \cos(kx - \omega t) + b_{33} \cos 3(kx - \omega t)] \dots (5)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} b_{22} &= (1/4)(3c^3 - c) : c = \coth kh \\ b_{11} &= (1/8)(3c^4 + 8c^2 - 9) \\ b_{33} &= (3/32)(9c^6 - 3c^4 + 3c^2 - 1) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

* フェロー 工博 横浜国立大学教授 大学院工学研究科
** 広島県三原土木建築事務所

反射波の場合には振幅 a が $C_R a$ で置き換わり、位相項 $(kx - \omega t)$ が $(kx + \omega t)$ となる。透過波では振幅が $C_T a$ で置き換わり、波数が k_* 、係数が $c = \coth k_* h_*$ で計算されることになる。なお、3 次オーダーでは領域 I に入・反射波の非線形干渉波が存在する。

本研究で取り扱った実験の範囲では、 $a/h < 0.06$ 、 $C_R < 0.4$ であったため、入射波の 3 倍周波数成分、反射波の 2・3 倍周波数成分、入・反射波の 3 次オーダーの干渉波は無視できる大きさであった。

(4) 2 倍周波数の自由波

1 次解については $x=0$ での境界連続条件が満たされているが、2 次オーダーでは入・反射波の拘束波に比べて透過波の拘束波の振幅が大きいために連続条件が満たされない。この差を補償するものとして正負両方向へ自由波が発生する。まず、連続条件は次のとおりである。

$$\phi^{(2)} = \phi^{(2)}_I : -h_* < z \leq 0 \quad \cdots \cdots (7)$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \phi^{(2)}_I}{\partial x} & : -h_* \leq z \leq 0 \\ 0 & : -h \leq z \leq -h_* \end{cases} \quad \cdots \cdots (8)$$

ここに上付き添字は摂動展開の次数である。2 次オーダーの速度ポテンシャルは次のように表される。

$$\phi^{(2)} = \phi^{(2)}_I + \phi^{(2)}_R + \phi^{(2)}_T + \phi^{(2)}_F \quad \cdots \cdots (9)$$

$$\phi^{(2)} = \phi^{(2)}_I + \phi^{(2)}_R + \phi^{(2)}_F \quad \cdots \cdots (10)$$

ここに下付き添字の P は入射波、 R は反射波、 T は透過波、 F と F^* は領域 I、II の自由波、 S と Q は領域 I、II の減衰定常波を表す。なお、Massel (1983) による矩形ステップの非線形波浪変形の理論では減衰定常波の 2 次オーダー項も考慮しているが、計算式が非常に煩雑になるため、本研究では無視することにした。

2 次オーダーの自由波の速度ポテンシャルとしては、次の形のものを仮定する。

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}_F(x, z, t) = & a^2 \omega B_F \frac{\cosh k_{2F}(h+z)}{\sinh k_{2F}h} \\ & \times \left\{ \exp[i(k_{2F}x + 2\omega t)] - \exp[-i(k_{2F}x + 2\omega t)] \right\} \end{aligned} \quad \cdots \cdots (11)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}_{F^*}(x, z, t) = & a^2 \omega B_{F^*} \frac{\cosh k_{2F^*}(h_*+z)}{\sinh k_{2F^*}h_*} \\ & \times \left\{ \exp[-i(k_{2F^*}x - 2\omega t)] - \exp[i(k_{2F^*}x - 2\omega t)] \right\} \end{aligned} \quad \cdots \cdots (12)$$

ここに k_{2F} と k_{2F^*} は次の分散関係式による波数である。

$$4\omega^2 = gk_{2F} \tanh k_{2F}h = gk_{2F^*} \tanh k_{2F^*}h_* \quad \cdots \cdots (13)$$

式 (11)、(12) 中の係数 B_F 、 B_{F^*} は、両式を 2 次オーダーの拘束波の速度ポテンシャルとともに連続条件式に代入し、水底から水面までの積分値について連続式を満足させるように、直交関数系の性質を利用して数式を整

理することによって、以下のように求められる。

$$B_F = \frac{D_1(A_2 - C_2) - D_2(A_1 - C_1)}{B_1D_2 - B_2D_1} \quad \cdots \cdots (14)$$

$$B_{F^*} = \frac{B_1(A_2 - C_2) - B_2(A_1 - C_1)}{B_1D_2 - B_2D_1} \quad \cdots \cdots (15)$$

上式中の各係数は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{3}{8} i(1 + |C_R|^2) \frac{\coth^4 kh - 1}{\cosh 2kh} \\ & \times [(2k \tanh 2kh - k_{2F^*} \tanh k_{2F^*} h_*) \cosh 2kh \\ & \times \cosh k_{2F^*} h_* - 2k \sinh 2k(h - h_*)] / [4k^2 - k_{2F^*}^2] \end{aligned} \quad \cdots \cdots (16)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \frac{3}{4} (1 - |C_R|^2) \frac{\coth^4 kh - 1}{\cosh 2kh} \\ & \times [k(2k \tanh 2kh - k_{2F} \tanh k_{2F} h) \cosh 2kh \\ & \times \cosh k_{2F} h / [4k^2 - k_{2F}^2] \quad \cdots \cdots (17) \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{k_{2F}}{k_{2F^*}^2 - k_{2F}^2} \sinh k_{2F}(h - h_*) \quad \cdots \cdots (18)$$

$$B_2 = \frac{1}{4} i(\sinh 2k_{2F}h + 2k_{2F}h) \quad \cdots \cdots (19)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{3}{8} i|C_T|^2 \frac{\coth^4 k_* h_* - 1}{\cosh 2k_* h_*} \\ & \times [(2k_* \tanh 2k_* h_* - 2k_{2F^*} \tanh k_{2F^*} h_*) \\ & \times \cosh 2k_* h_* \cosh k_{2F^*} h_*] / [4k_*^2 - k_{2F^*}^2] \quad \cdots \cdots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & \frac{3}{4} i|C_T|^2 \frac{\coth^4 k_* h_* - 1}{\cosh 2k_* h_*} \\ & \times k_* [(2k_* \tanh 2k_* h_* - k_{2F} \tanh k_{2F} h) \\ & \times \cosh 2k_* h_* \cosh k_{2F} h - k_{2F} \sinh k_{2F} \\ & \times (h - h_*)] / [4k_*^2 - k_{2F}^2] \quad \cdots \cdots (21) \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{1}{4k_{2F^*}} (\sinh 2k_{2F^*} h_* + 2k_{2F^*} h_*) \quad \cdots \cdots (22)$$

$$D_2 = -i \frac{k_{2F^*} k_{2F}}{k_{2F^*}^2 - k_{2F}^2} \sinh k_{2F}(h - h_*) \quad \cdots \cdots (23)$$

この速度ポテンシャルから、領域 I、II の 2 次オーダーの自由波の水面波形 $\eta^{(2)}_F$ 、 $\eta^{(2)}_{F^*}$ は次のように求められる。

$$\eta^{(2)}_F(x, t) = -ik_{2F} a^2 B_F \cos(k_{2F}x + 2\omega t) \quad \cdots \cdots (24)$$

$$\eta^{(2)}_{F^*}(x, t) = -ik_{2F^*} a^2 B_{F^*} \cos(k_{2F^*}x - 2\omega t) \quad \cdots \cdots (25)$$

なお、係数 B_F 、 B_{F^*} は虚数であり、式 (24)、(25) は実数値である。

(5) 2 倍周波数成分の振幅変調

領域 I、II ともに 2 倍周波数成分には拘束波と自由波のものがあ、それらは位相速度が異なるため、波形のフーリエ解析で得られる振幅は一定間隔で増減を繰り返す。領域 I では、反射波に伴伴する拘束波の振幅が小さいのでこれを無視すると、2 倍周波数成分振幅が次のように計算される。

$$(a_1)_{2\omega}^2 = a_{2P}^2 + 2a_{2P}a_{2F} \cos(2k + k_{2F})x + a_{2F}^2 \quad \cdots \cdots (26)$$

ここに、

$$a_{2P} = k a^2 b_{22}, \quad a_{2F} = -i k_{2F} a^2 B_F \dots\dots\dots (27)$$

領域 II における 2 倍周波数成分振幅は次のようになる。

$$(a_{11})_{\omega}^2 = a_{2T}^2 + 2 a_{2T} a_{2F} \cos(2k_* - k_{2F})x + a_{2F}^2 \dots\dots\dots (28)$$

ここに、

$$a_{2T} = k_* C_T^2 a^2 b_{22}, \quad a_{2F} = -i k_{2F} a^2 B_F \dots\dots\dots (29)$$

したがって、領域 I では距離 $\pi/(2k + k_{2F})$ ごとに振幅が最大値 $|a_{2P} + a_{2F}|$ から最小値 $|a_{2P} - a_{2F}|$ に変化する。領域 II ではこれが距離 $\pi/(k_{2F} - 2k_*)$ 、最大・最小値 $|a_{2T} \pm a_{2F}|$ となる。

(6) 非線形干渉による 3 倍周波数成分波の発生

1 次オーダーの基本周波数成分波と 2 次オーダーの自由波は非線形干渉を起こし、3 次オーダーの 1 倍・3 倍周波数成分波を発生させる。そのメカニズムは合田・賀川 (1997) が解析した二次波峯の現象と同一である。領域 I における自由波 $\eta_F^{(2)}$ はその振幅が小さいので 3 次干渉波は無視できる大きさである。しかし、ステップ上では水深が小さいために 2 次オーダーの自由波の振幅が大きく、非線形干渉がかなりの大きさとなる。

矩形ステップ上の 3 次干渉波は、二つの波の周波数の差および和である 1 倍・3 倍周波数成分からなり、その波形は次のように求められる。

$$\eta_{TF}^{(3)} = a_{TF1} \cos[(k_{2F} - k_*)x - \omega t] + a_{TF3} \cos[(k_{2F} + k_*)x - 3\omega t] \dots\dots\dots (30)$$

ここに、振幅は次式による。なお、位相遅れについては省略している。

$$a_{TF1} = C_T k_{2F}^2 a^3 B_{TF1}, \quad a_{TF3} = C_T k_{2F}^2 a^3 B_{TF3} \dots\dots\dots (31)$$

$$B_{TF1} = B_F \left(1 - \frac{k_*}{k_{2F}} \right) \times \frac{(2C_{2F} + C_*) \coth(k_{2F} - k_*)h_* + 2C_{2F}C_* - 3}{9 \coth(k_{2F} - k_*)h_* - (4C_{2F} - C_*)} \dots\dots\dots (32)$$

$$B_{TF3} = B_F \left(1 + \frac{k_*}{k_{2F}} \right) \times \frac{3(2C_{2F} + C_*) \coth(k_{2F} + k_*)h_* + 2C_{2F}C_* - 7}{9 \coth(k_{2F} + k_*)h_* - (4C_{2F} - C_*)} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$c_{2F} = \coth k_{2F} h_*, \quad c_* = \coth k_* h_* \dots\dots\dots (34)$$

式 (30) の非線形干渉波は透過波の 3 次オーダー拘束波と重畳して振幅変調を起こす。基本周波数と 3 倍周波数成分の振幅の場所的変動は以下のように与えられる。

$$(a_{11})_{\omega}^2 = a_{T11}^2 + 2 a_{T11} a_{TF1} \cos(2k_* - k_{2F})x + a_{TF1}^2 \dots\dots\dots (35)$$

$$(a_{11})_{3\omega}^2 = a_{T33}^2 + 2 a_{T33} a_{TF3} \cos(2k_* - k_{2F})x + a_{TF3}^2 \dots\dots\dots (36)$$

ここに、

$$a_{T11} = (1/2) k_*^2 C_T^2 a^3 b_{11}, \quad a_{T33} = (1/2) k_*^2 C_T^2 a^3 b_{33} \dots\dots\dots (37)$$

すなわち 1 倍・3 倍周波数成分の振幅変調の間隔は 2

倍周波数成分と同一であり、また 1 倍周波数成分は振幅 a_{TF1} が負の値をとるために、振幅変調が逆位相である。

3. 水路実験による非線形波浪干渉の検証

(1) 実験条件の概要

実験は長さ 17.0 m、幅 0.6 m の水路で行った。領域 I、II の水深は $h = 40.0$ cm、 $h_* = 10.0$ cm に固定した。矩形ステップは造波板から 7.90 m の地点が先端であり、ステップの長さを 5.60 m とし、その背後の長さ 2.0 m の区間に碎石を並べて消波斜面とした。この碎石斜面の反射率は実験波の条件で 5~20% であった。

造波板から 5.26 m の地点とそれから実験波の約 1/4 波長だけ造波板寄りの地点の各 2 個所に波高計を設置し、入・反射波分離によって入射波の波高を求めた。本報告に記載の波高はすべてこの入射波高である。ステップ上およびその前方の波形の場所的变化については、最大 10 台の波高計を同時に使用して詳細に計測した。

実験波の周期は 0.766~1.984 s の間で 10 個の等比級数になるものを使用し、波高はステップ上で碎波する条件からやや大きいところまでを対象とした。

(2) 矩形ステップの反射率と透過率

矩形ステップの反射率を基本周波数に対する反射波と入射波の振幅比として求めたところ、実験値は理論値よりも若干大きめであったが、 $h/L_0 = 0.065 \sim 0.44$ の範囲ではほぼ一致した。

透過率に関しては、矩形ステップ上の波形が場所的に変動するため、基本周波数成分の振幅の場所的变化を解析し、その平均を透過波振幅とした。これによる透過率の実験値は、理論値の 80~90% であった。この差異は、ステップ先端における渦の発生やステップ上の底面摩擦によるエネルギー損失によると考えられるものの、詳しくは調べていない。

(3) 矩形ステップ前方の 2 倍周波数自由波

領域 I のステップ前方における自由波については、測定波形のフーリエ解析によって 2 倍周波数成分の振幅を求め、その場所的变化を式 (26) と比較した。図-2 はその結果の 1 例で $T = 1.425$ s の場合である。理論値に近い実験結果が得られているので、矩形ステップ先端から沖側へ向かう自由波の発生が検証されたといえる。ただし、 $T = 0.918$ s と 1.144 s の場合には 2 次オーダーの振幅が小さいことや測定精度の問題もあって、実験結果は必ずしも理論による予測値と合致しなかった。

(4) 矩形ステップ上の波浪の空間的変動

図-3 は矩形ステップ上の波高の場所的变化の例を示す。図中の■印が碎波がわずかに認められるケース、□印はそれよりも波高を大きくした場合、△、▲、○印は波高の小さい場合である。図から明らかなように、波高

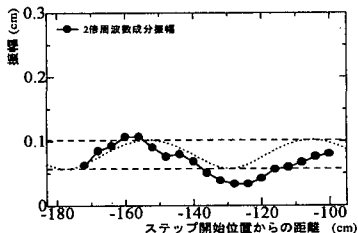


図-2 領域における2倍周波数成分の振幅の空間分布
($T=1.425$ s, $H=3.10$ cm)

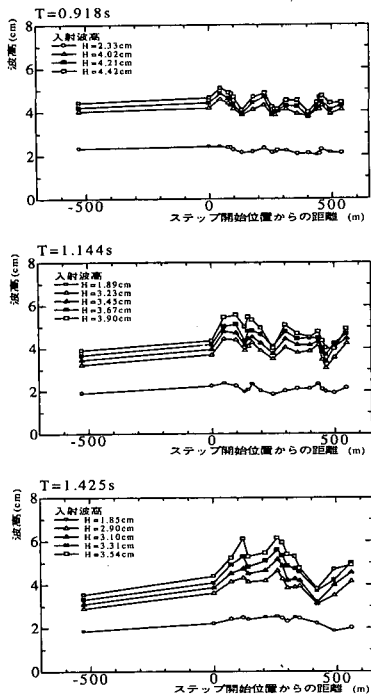


図-3 波高の空間分布の例

は周期的な増減を繰り返す。

こうした各地点の波形記録をフーリエ解析し、1倍、2倍、3倍周波数成分振幅の場所的变化を求めた例が図-4である。記号の Δ , $\bullet$, $\diamond$ は各周波数に対応させており、これ以降の図-5, 6も同じである。

(5) フーリエ成分振幅の理論と実験との比較

図-4のような実験値に対し、1倍周波数振幅については式(35)、2倍・3倍周波数振幅については式(28)、(36)で予測される理論値と比較した例が図-5である。図から明らかなように、実験値は理論値とかなりよく合っており、今回の解析の妥当性を例証している。

なお、理論値の計算の際の透過波振幅 C_{Ta} としては、境界接続法による理論値ではなく、1倍周波数振幅の場所的変動の平均値を用いている。

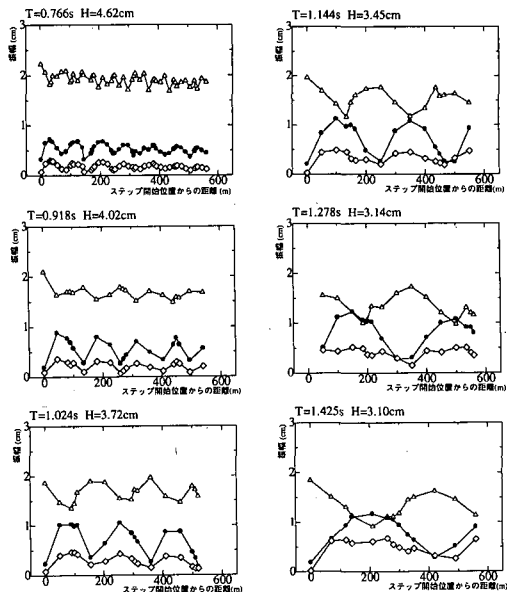


図-4 フーリエ成分振幅の空間分布の例
(Δ , $\bullet$, $\diamond$ 印はそれぞれ1倍, 2倍, 3倍周波数振幅)

4. 矩形ステップ上の碎波限界

入射波高を徐々に大きくしていくと、2倍周波数振幅が最初に最大となる地点、すなわち波高が極大となるあたりで碎波が発生する。図-6の中の下向きの矢印がそうした地点である。実験では碎波が予測される地点の周辺の波形を注視し、波の山がわずかに崩れ始めた状態を碎波と定義した。なお、周期が長くなると図-6の $T=1.425$ s, 1.591 s の例のように、3倍周波数振幅が最大となる2個所で碎波が目視される場合が多くなる。

このような目視結果に基づき、碎波限界の波高水深比を求めた結果が図-7である。図中の黒丸は碎波と判定されたケース、白丸は非碎波のケースである。限界波高水深比は周期によって上下して交じり合い、境界線を描くのがやや恣意的にならざるを得ない。しかし、合田(1975)の碎波指標で水底勾配を0とした場合の次式をあてはめて定数を求めたところ、 $A=0.130$ の結果が得られた。

$$H_b/L_0 = A[1 - \exp(-1.5\pi h_s/L_0)] \quad \cdots \cdots (38)$$

先に合田・森川・岡崎(1997)が水平ステップへの取り付け斜面の勾配を変えて碎波限界を調べた結果と合わせると、水平ステップの碎波限界は定数 A の値として表-1のように表示することができる。前面勾配1:2の台形地形については先に $A=0.14$ の値を報告したが、これは碎波限界として波峰の崩れが明瞭な場合を採択したためと考えられる。今回の定義によれば $A \approx 0.133$ 程度になると推測される。

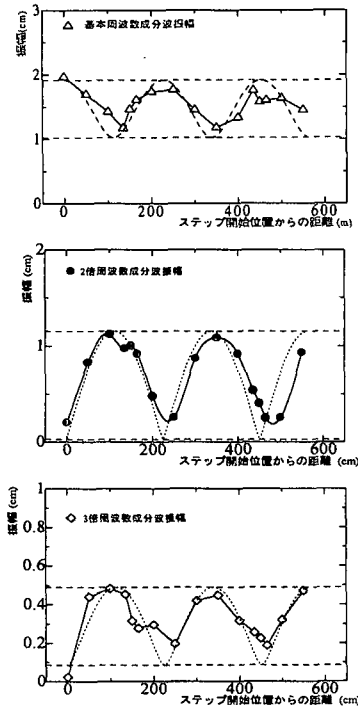


図-5 フーリエ成分振幅の理論と実験との比較
($T=1.144$ s, $H=3.45$ cm)

表-1 水平ステップ上の破波指標の定数値A

前面勾配	鉛直	1:5	1:10	1:20	1:40	1:80	1:∞
定数A	0.130	0.135	0.136	0.145	0.155	0.159	0.17

5. む す び

矩形ステップ上の波の波形分裂現象について、摂動法による解析を行った。波形分裂の主因は、ステップ先端の境界で発生する自由波であり、この自由波は1次オーダーの透過波と干渉し合って3次オーダーの1倍・3倍周波数成分を発生させる。

本研究では、境界周辺の定常減衰波の2次オーダー項を無視した近似計算を行ったが、理論は実験値によってその妥当性が検証された。

また、こうした高調波の増大によって碎波限界波高は一樣水深の場合よりも低下する。矩形ステップに対して碎波限界波高を実験で求めた結果は、合田・森信・岡崎(1997)が水平ステップ取付斜面の影響を調査した結果の延長上にあり、碎波指標に関する一連のデータとして取りまとめられた。

参 考 文 献

井島武士 (1971): 最近の波浪理論における境界値問題の解法と

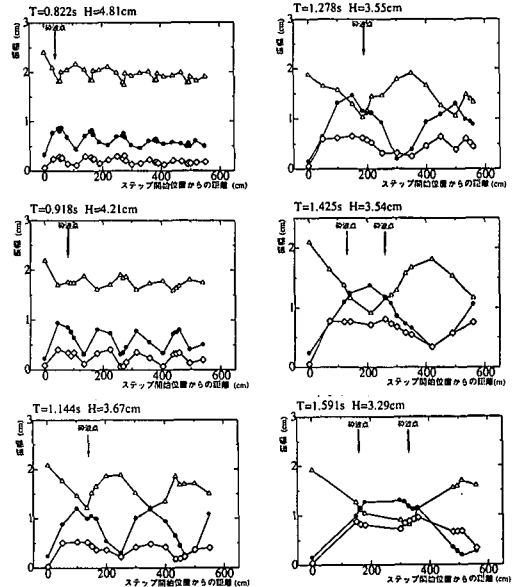


図-6 破波位置とフーリエ成分振幅との関係
(Δ , $\bullet$, $\diamond$ はそれぞれ1倍, 2倍, 3倍周波数振幅)

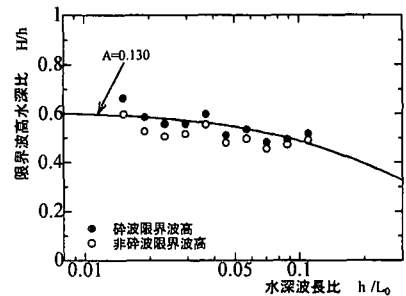


図-7 矩形ステップ上の破波限界波高比

その応用, 水工学夏期研修会講義集, pp. B-1-1~28.

- 合田良実 (1975): 浅海域における波浪の碎波変形, 港研報告, 14(3), pp. 59-106.
- 合田良実・賀川真有 (1997): 造波水路内の波高分裂のメカニズムについて, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 6-10.
- 合田良実・森川耕太・岡崎健一 (1997): 水平ステップ上の碎波限界に関する実験的研究, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 66-70.
- 合田良実・Wudhipong Kittitanasuan・江指好美 (1994): 矩形ステップによる波の変形特性について, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 646-650.
- Goda, Y. and Y. Abe (1968): Apparent coefficient of partial reflection of finite amplitude waves, *PHRI Rept.* 7(3), pp. 3-58.
- Massel, S. R. (1983): Harmonic generation by waves propagating over a submerged step, *Coastal Engrg.* 7, pp. 357-380.