

スロープおよびステップ型リーフ上での波の非線形挙動

簡井 茂 明*・大 木 洋 典**

1. 緒 言

沿岸域では、近年、リーフの持つ消波機能を有効利用した波浪制御の試みが成されている。しかし、リーフ海岸における長周期波あるいは海岸浸食とリーフの機能との関係など、解明すべき現象が散見される。これらは、本質的には、浅海域での波の非線形挙動と深く関わっている。このような非線形分散波を解析するためのモデル方程式として、Boussinesq 型方程式をはじめ数多くの式が提案されている（例えば、Liu ら、1985；Madsen ら、1991；磯部、1994；灘岡ら、1994；喜岡・柏原、1995）。この中の多くは、短周期から長周期までの広範な分散波を解析対象とするために導かれたものである。

同様の主旨から、簡井ら（1996）は、水深平均された運動方程式の圧力項を微小振幅波理論により再評価し、水面変動量に関する微積分方程式を導いている。さらに、式中の積分項を線形近似することにより、フーリエ成分波に対する波動方程式を提案し、水理実験結果によりその妥当性を検証している。しかし、波の非線形性がかなり弱い資料に基づくため、十分な検証はなされていない。

そこで、本研究ではまず、サンゴ礁海岸に見られる断面 2 次元のスロープおよびステップ型リーフ模型を用い、非線形性がやや強い波を対象として水理実験を行った。次に、上述の波動方程式を改良し、非線形分散波に対する新たなモデル方程式を提案する。これらの実験および数値予測結果に基づき、リーフ上での波の非線形挙動の基本的な特性とその重要性について述べる。

2. 水理模型実験

実験は、図-1 に示すようなスロープおよびステップ型リーフ模型を鋼製水槽（2700×70 cm）の端部に設置して実施した。リーフ長は 8 m、スロープ型リーフ先端部の斜面勾配は 1/20 である。リーフ内外の水深は一定とし、両水深比が $\alpha = h_2/h_1 = 0.2, 0.3$ の場合について実験を行った。実験に用いた波は、周期が 0.8-2.0 sec の規則波である。

リーフ上での波の非線形挙動特性の 1 つとして、波形の変化、波高分布、およびフーリエ成分波の波高分布を調べるための水面変動量の計測は、測定間隔を 5, 10, 30 cm とし、リーフ上および斜面上で行った。

3. モデル方程式

フーリエ成分波に対する波動方程式（簡井ら、1996；Tsutsui et al., 1998）は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (c^2 \nabla \zeta_n) + n^2 \zeta_n \\ &= \frac{\varepsilon}{2h} \sum_l (n^2 - l^2) \zeta_l \zeta_{n-l} \\ & - \frac{\varepsilon}{2h} \sum_{l \neq n} \frac{n+l}{n-l} c^2 \nabla \zeta_l \cdot \nabla \zeta_{n-l} \\ & - \frac{\varepsilon}{h} \sum_{l \neq 0, n} \frac{c^4}{l(n-l)} \\ & \times (\partial_{xx} \zeta_l \partial_{yy} \zeta_{n-l} - \partial_{xy} \zeta_l \partial_{xy} \zeta_{n-l}) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

ただし、 $n, l = \pm 1, \pm 2, \dots$, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$, $\partial_{yy} = \partial^2/\partial y^2$, $\partial_{xy} = \partial^2/\partial x \partial y$

$$\omega^2 = \mu k \tanh \mu k h \dots \dots \dots (2)$$

$$c^2 = \tanh \mu k h / \mu k \dots \dots \dots (3)$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\mu k h}{\sinh 2\mu k h} \right) c \dots \dots \dots (4)$$

(x, y): 水平座標, h : 水深, ω : 周波数, ζ_n : n 次成分波の水面変動量, (k, c, c_0): 対応する線形波の波数, 波速および群速度である。また、 ζ_{-l} は ζ_l の共役複素数であ

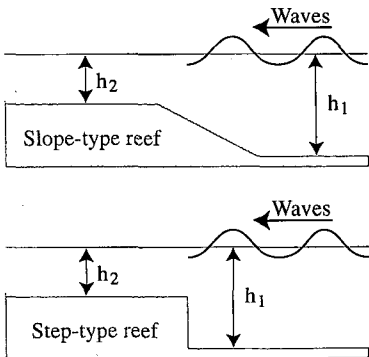


図-1 スロープおよびステップ型リーフ

* 正会員 工博 琉球大学教授 工学部環境建設工学科
** 正会員 工修

る。

なお、本章における物理量は、入射波の周期 T^* 、基準点での水深 h_0^* 、重力加速度 g により定義される代表量：時間 $(\omega^*)^{-1} = (2\pi/T^*)^{-1}$ 、水平方向長さ $(k_0^*)^{-1} = c_0^*/\omega^*$ 、鉛直方向長さ h_0^* 、速度 $c_0^* = (gh_0^*)^{1/2}$ 、および入射波の振幅 a_0^* により無次元化されたもので、パラメータ $\varepsilon = a_0^*/h_0^*$ 、 $\mu = k_0^* h_0^*$ である。上添字 $(*)$ は次元量を表す。

積分項の線形近似により式 (1) を導く際に生じる誤差は、主として式 (1) の左辺に現れるので、両辺に c_0/c を乗じた後に、左辺に補正項

$$f \equiv c^2 \nabla(c_0/c) \cdot \nabla \zeta_n \dots \dots \dots (5)$$

を加えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (cc_0 \nabla \zeta_n) + n^2 \frac{c_0}{c} \zeta_n \\ &= \frac{\varepsilon}{2h} \sum_l (n^2 - l^2) \frac{c_0}{c} \zeta_{l, n-l} \\ & \quad - \frac{\varepsilon}{2h} \sum_{l \neq n} \frac{n+l}{n-l} cc_0 \nabla \zeta_l \cdot \nabla \zeta_{n-l} \\ & \quad - \frac{\varepsilon}{h} \sum_{l \neq 0, n} \frac{c^3 c_0}{l(n-l)} \\ & \quad \times (\partial_{xx} \zeta_l \partial_{yy} \zeta_{n-l} - \partial_{xy} \zeta_l \partial_{xy} \zeta_{n-l}) \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

以下、補正項 (5) と式 (6) の各項との関係について述べる。分散式 (2) より

$$\frac{\nabla(\mu kh)}{\mu kh} = \frac{c}{2c_0} \frac{\nabla h}{h} \dots \dots \dots (7)$$

となるので、次の関係式が得られる。

$$\frac{\nabla(c^2)}{c^2} = \left(2 - \frac{c}{c_0}\right) \frac{\nabla h}{h} \equiv F \frac{\nabla h}{h} \dots \dots \dots (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla(c_0/c)}{c_0/c} &= \frac{2\mu kh}{\sinh 2\mu kh} \left(1 - \frac{2\mu kh}{\tanh 2\mu kh}\right) \\ & \quad \left(\frac{2c_0}{c}\right)^{-2} \frac{\nabla h}{h} \equiv G \frac{\nabla h}{h} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

式 (6) の左辺は $\nabla(cc_0) \cdot \nabla \zeta_n + cc_0 \{\nabla^2 \zeta_n + (n/c)^2 \zeta_n\}$ と表されるので、補正項 (5) と第 2 項の Helmholtz 項との比は式 (9) で表される。また、第 1 項と Helmholtz 項との比は次式で与えられる。

$$\frac{\nabla(cc_0)}{cc_0} = (F+G) \frac{\nabla h}{h} \dots \dots \dots (10)$$

式 (9)、(10) の $\mu kh = k^* h^*$ に対する変化は図-2 のようになる。ただし、 $|\nabla h/h| = 1$ と仮定している。式 (10) の値は、 μkh とともに急激に減少し、 $\mu kh > 1.5$ では $|\nabla h/h|$ の 10% 以下となる。したがって、この領域では Helmholtz 項が卓越する。一方、極浅海域 $\mu kh < 0.025$ では、第 1 項 $\nabla(cc_0) \cdot \nabla \zeta_n$ の役割が重要であることが判る。式 (9) は $\mu kh \approx 1.65$ のとき最大値 $0.36 |\nabla h/h|$ を採る。すなわち、式 (6) では浅海域において、Helmholtz 項に対して最大で水深変化率 $|\nabla h/h|$ の 36% 程度の補正が行われている。

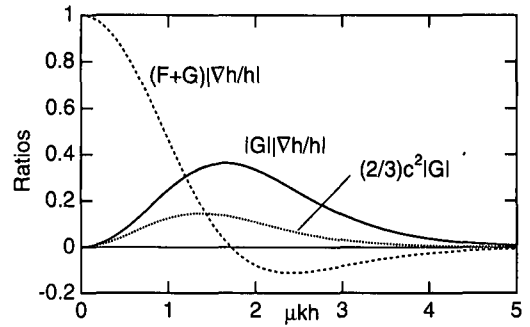


図-2 式 (9)、(10) の $\mu kh = k^* h^*$ に対する変化

補正項と非線形項との比は次式で評価される。

$$R = \frac{2c^2}{n^2 - l^2} G \frac{\nabla h}{\varepsilon} \dots \dots \dots (11)$$

波動方程式 (1) の誘導時には、1 波長当たりの水深変化量は小さい、すなわち、 $O(|\nabla h|) \leq O(\varepsilon, \mu^2)$ と仮定されている。したがって、

$$|R| \leq \frac{2}{3} c^2 |G| \dots \dots \dots (12)$$

が得られる。図-2 には式 (12) の右辺の値が併記されている。右辺は $\mu kh \approx 1.4$ のときの最大値 0.146 を採るが、極浅海域 $\mu kh < 0.025$ においては、補正項は非線形項に比べて無視できることが判る。以上のように、微積分方程式より式 (1) を導く際に生じる誤差は、式 (6) では主として浅海域で補正されている。

ここでは、式 (6) を非線形分散波に対するモデル方程式として新しく提案する。この式は、周知の緩勾配方程式に非線形項が付加された式である。なお、式 (1) およびモデル方程式 (6) において、波速および群速度の線形長波近似を行うと、Liu ら (1985) の式と一致する。

4. 数値計算法

4.1 有限要素解析のための弱形式

解析対象とする式は n 次の複素フーリエ成分 ζ_n に対する波動方程式 (6) である。ここでは断面 2 次元の場合を考え、式 (6) の弱形式を求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ cc_0 \frac{d\nu}{dx} \frac{d\zeta_n^{j+1}}{dx} - \nu n^2 \frac{c_0}{c} \zeta_n^{j+1} \right. \\ & \quad + \sum_{l=1}^{n-1} \nu \left(A_{1l} + B_{1l} \frac{d}{dx} \right) \zeta_{n-l}^{j+1} \\ & \quad + \sum_{l=1}^{N-n} \nu \left(A_{2l} + B_{2l} \frac{d}{dx} \right) \zeta_{n+l}^{j+1} \Big\} dx \\ &= \left[\nu cc_0 \frac{d\zeta_n^{j+1}}{dx} \right]_{x^*} - \left[\nu cc_0 \frac{d\zeta_n^{j+1}}{dx} \right]_{x_0^*}^{\zeta_0^*} + B.C. \end{aligned} \dots \dots \dots (13)$$

ただし、 ν ：形状関数、 N ：フーリエ成分の総数である。上添字 $j+1$ は現在の繰り返しステップを表し $A_{1l}, B_{1l}, \dots$ は式 (6) 右辺の非線形項を線形化したときの係数で、

前段での既知量である。右辺の第1, 2項は解析対象領域 $\Omega[R^-, R^+]$ および領域内の $x=\xi_0$ に水深不連続部がある場合の境界項であり、上添字±はそれぞれ波の入射側および伝播側での諸量を表す。また、B. C. は各種の境界条件を満たすために付加すべき境界項を表す。

式 (13) の左辺の微分項 $d\xi_{n+1}^i/dx$ を x について部分積分した弱形式も考えられるが、式 (13) のように、右辺の境界項に非線形項の影響が現れない弱形式では、以下に述べる反復計算過程は安定となる。

4.2 反復算法

境界条件として、開境界での水位と流速の連続条件、閉境界での波の反射条件、および水深不連続部での条件 (Tsutsui & Zamami, 1993) を考慮する。以下、反復算法 (筒井ら, 1997) の概略を述べる。

線形要素を用いて式 (13) を離散化して得られる連成方程式の係数行列は、図-3 に示すような3重対角行列でブロック化された連成行列となる。ただし、フーリエ成分の総数が $N=3$ の場合で、図中に■, □で示された部分以外は全てゼロである。■で示された対角ブロック中の $\{K_1\}_n$ は、式 (6) 左辺の線形項より得られる実係数の対称行列である。□で示された非対角ブロック $\{K_2\}_n$, $\{K_3\}_n$ は、式 (6) 右辺の非線形項に起因し、共に複素係数の非対称行列である。したがって、解くべき式は、大規模かつ非対称で疎な係数行列をもつ非線形連立方程式である。この式の数値計算は次の2種の反復過程より成る。

連立1次方程式の解法：対角ブロックに位置する実対称行列 $\{K_1\}_n$ のM行列化および不完全Choleski分解に基づく行列の前処理を併用したBi-CGSTAB法 (van der Vorst, 1992) を用いた。この算法は、演算過程でゼロ領域にfill-inが生じないので、係数行列の非ゼロ領域のみを記憶すればよく、記憶容量の節約を図ることができる。

非線形方程式の反復解法：線形解を初期値として単純な反復計算を行ったが、その収束の速さは線形収束であることが判明した。また、収束安定性の向上のために、 $(j+1)$ 次の反復の後に、各節点での ξ_{n+1}^i ($i=1, 2, \dots$) に対して、緩和係数 λ を用いた次式による補正を行った。

$$\xi_{n+1}^i = \lambda \xi_{n+1}^{i+1} + (1-\lambda) \xi_{n+1}^i \quad (\lambda > 0) \quad \dots\dots\dots (14)$$

通常は、緩和係数 λ として0.5近くの値を採ると収束安定性が向上する。さらに、入射波の振幅が大きい場合には、この反復計算は収束しない場合がある。その対策として、構造解析における荷重増分法と同様に、入射波の振幅の増分化を行う振幅増分法を用いる必要がある。

5. リーフ上での波の非線形挙動

図-4, 5はスロープおよびステップ型リーフ上での進

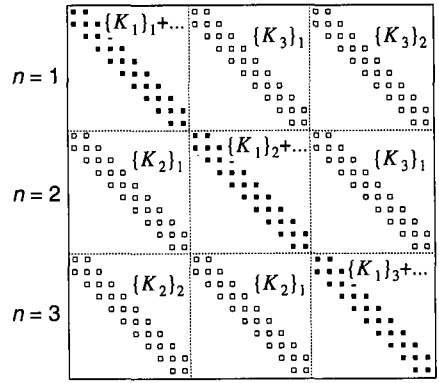


図-3 非線形連立方程式の疎な連成行列 ($N=3$)

行波の波高分布を示す。ただし、リーフ内外の水深比 $\alpha=0.2$ ($h_1=37.5$ cm, $h_2=7.5$ cm) の場合であり、縦・横軸は入射波高に対する波高増幅率 K およびリーフ先端からの距離 x (m) である。○は実験による全体の波高分布、太い実線は対する非線形解を示す。□, △等のシンボルは実験結果より得られた1, 2, ..., 5次のフーリエ成分波の波高分布であり、これらに対する非線形解はそれぞれ細い点線、破線等の曲線で示されている。リーフ上で一定値を採る細い実線は線形解を示す。なお、数値計算では次の仮定が置かれている。(1)入射波には基本周波数成分以外の成分波は含まれていない。(2)スロープ上およびリーフ上が非線形領域である。

リーフ上での波の伝播とともに、非線形相互干渉による成分波間のエネルギー授受の生じる様子が明瞭に示されている。すなわち、基本周波数成分の波高の増減と、他の周波数成分の波高の減少、増加が良く対応している。その結果、全体の波高分布 (○) は周期的に脈動し、その間隔は波の周期とともに長くなる。また、波高値は線形解よりかなり大きくなる。これらの実験ではリーフ上での長波性パラメータ μ_2 の値は0.071-0.47であるから、数値計算結果は、長波性の弱い領域を含む広範な波の非線形挙動特性をよく再現している。

図-6は、スロープおよびステップ型リーフ上における進行波の波形の比較を例示する。ただし、縦・横軸は、入射波高および波の周期でそれぞれ規格化された水面変動量および時間である。破線および実線はそれぞれ実験波形と数値計算波形を示す。

図-6(1)に示されているように、波が発達し波高が大きい地点 ($x=-1$ m) では波の分裂が生じ、波高の小さい地点 ($x=-2$ m) では倍周波数成分はほぼ消滅している。また、図-6(3)には波の伝播による波高増加とともにその分裂が顕著になる様子が示されている。これらの波形には、K-dV方程式に見られる成分波間の非線形相互干渉による波形の分裂とその再起現象 (Zabusky

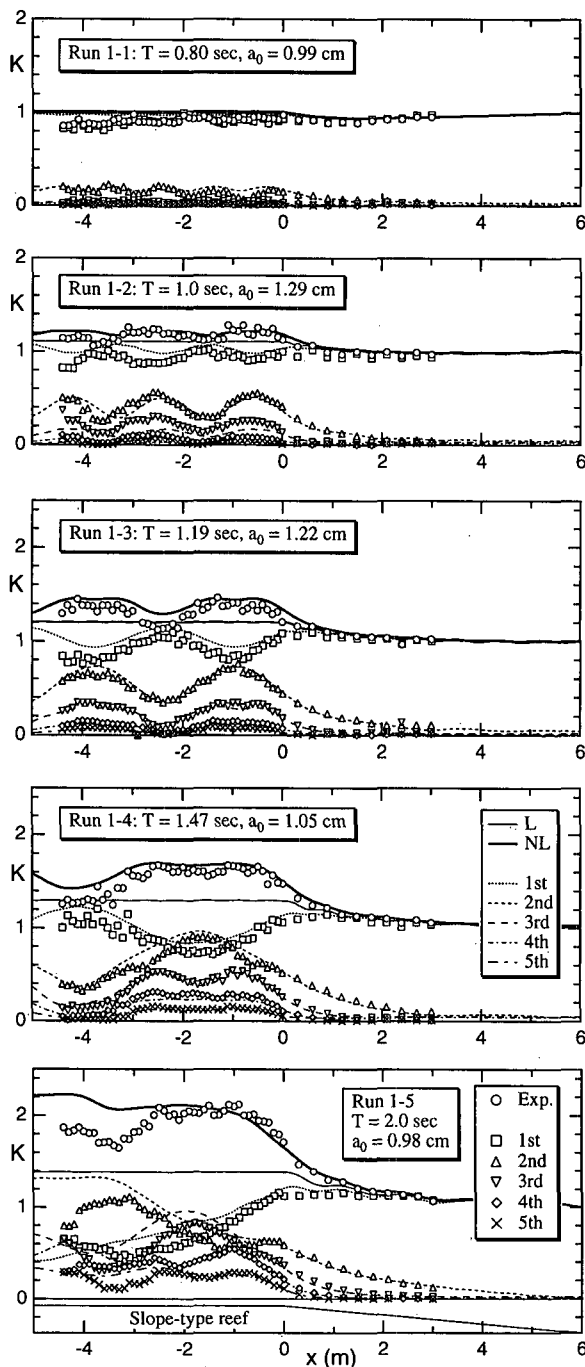


図-4 スロープ型リーフ上での進行波の波高分布

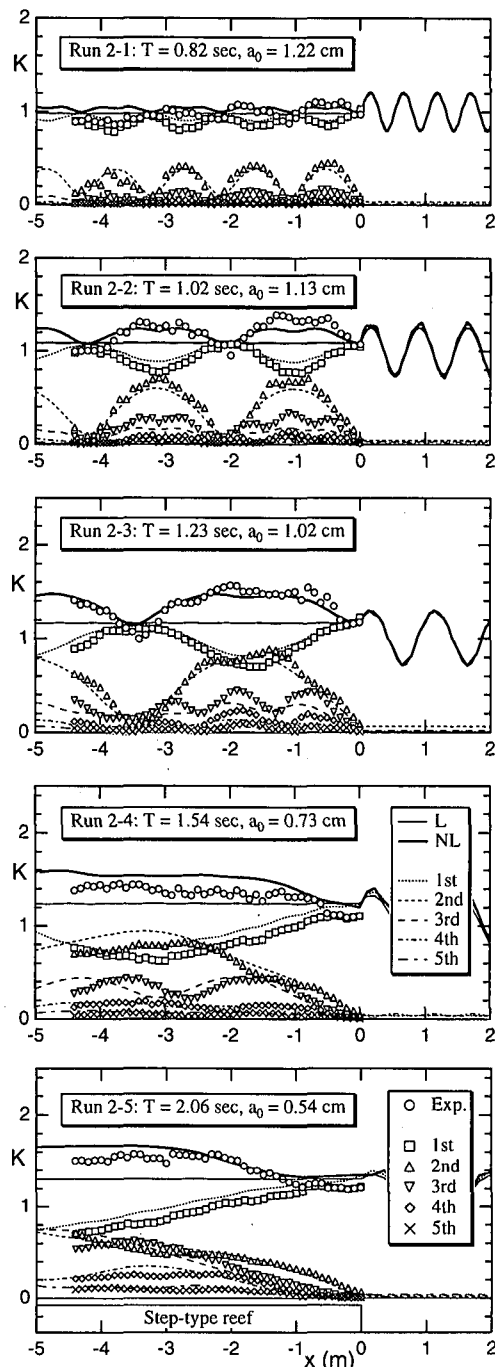


図-5 ステップ型リーフ上での進行波の波高分布

& Kruskal, 1965) との顕著な類似性が認められる。いずれの場合にも、波高には図-4, 5に見られるような若干の差異が見られるものの、実験および数値計算による波の位相関係は良く一致している。

以上の結果は、波の非線形挙動解析に対するモデル方程式 (6) の有用性を示唆している。ただし、リーフ海

岸における数値計算には、一般的に、リーフ上での水位上昇を考慮する必要がある。

6. 結 言

本研究で得られた結果は次のように要約される。

(1) リーフ上では非線形相互干渉により成分波間に

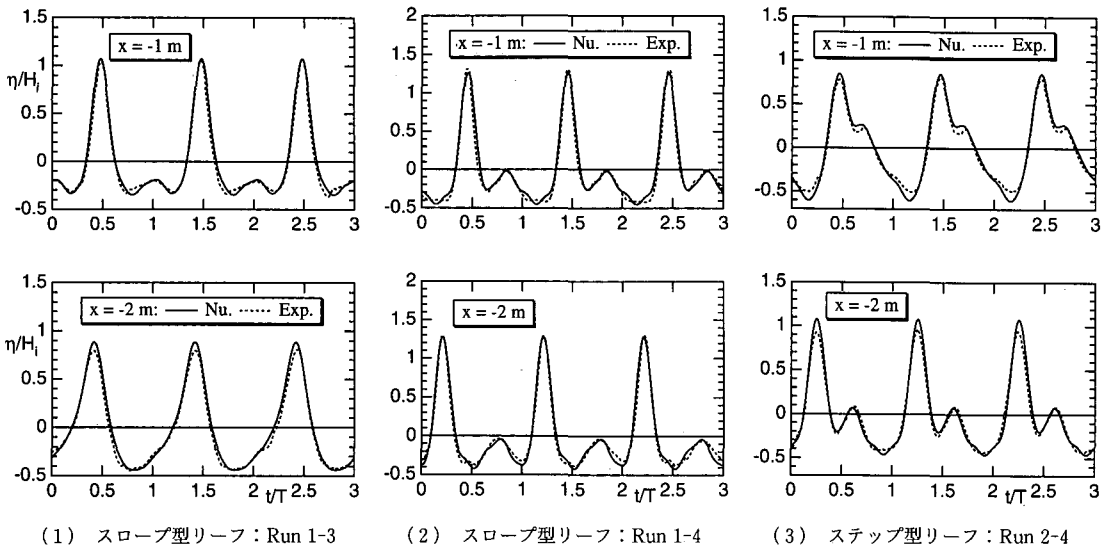


図-6 スロープおよびステップ型リーフ上での進行波の波形

エネルギー授受があり、波高分布に周期的な脈動が生じる。

(2) その脈動間隔は波の周期とともに長くなる。

(3) また、波高値は線形理論値よりかなり大きくなるので、波の挙動を非線形解析する必要がある。

(4) 提案したモデル方程式は、これらの非線形特性の数値予測モデルとして有用である。

参考文献

- 磯部雅彦(1994): 非線形緩勾配方程式の提案, 海岸工学論文集, JSCE, Vol. 41, pp. 1-5.
- 喜岡 渉・柏原謙爾(1995): 高次 Boussinesq 方程式とそのステップ地形への適用性, 土木学会, 海岸工学論文集, Vol. 42, pp. 166-170.
- 灘岡和夫・Serdar Beji・大野修史(1994): 新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法と室内実験による検証, 土木学会, 海岸工学論文集, Vol. 41, pp. 11-15.
- 筒井茂明・鈴山勝之・大木洋典(1996): 浅海での非線形分散波のモデル方程式とそのステップ型リーフへの適用, 海岸工学論文集, Vol. 43, JSCE, pp. 16-20.
- 筒井茂明・大木洋典(1997): 線形分散性と浅海長波の非線形性を合わせ持つモデル方程式(第4報) - 非対称疎行列系への Bi-CGSTAB 法の適用 -, 琉球大学工学部紀要, 第 55 号, pp.

17-25.

- Liu, Philip L. -F., Sung B. Yoon and J. T. Kirby (1985): Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, Jour. Fluid Mech., Vol. 153, pp. 185-201.
- Madsen, P. A., R. Murray and O. R. Sorenson (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 371-388.
- Tsutsui, S. and K. Zamami (1993): Jump condition of energy flux at the line of bathymetric discontinuity and wave breaking on the reef flat, Coastal Eng. in Japan, JSCE, Vol. 36, pp. 155-175.
- Tsutsui, S., K. Suzuyama and H. Ohki(1998): Model equations of nonlinear dispersive waves in shallow water and an application of its simplest version to wave evolution on the step-type reef, Coastal Eng. in Japan, JSCE, Vol. 40 (in press).
- van der Vorst, H. A. (1992): Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 13, pp. 631-644.
- Zabusky, N. J. and M. D. Kruskal (1965): Interactions of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett., Vol. 15, pp. 240-243.