

無反射境界条件としての One-Way 波動方程式について

余 錫 平*

1. 序 論

開境界が含まれる沿岸波浪場数値計算問題に関して、有限要素法を適用する場合には、無限要素に特殊な内挿関数を定義することによって対処する方法、境界積分法を適用する場合には、放射条件が満たされる基本解で対処する方法が有効である。しかし、差分法を用いる場合には、無反射境界の導入が欠かせない。物理的に無反射境界条件は、領域内で反射や散乱によって発生した波を自由に透過させるものであれば良いが、数学上容易に実現できるものではない。現在のところ、海岸工学の実務において、無反射境界の処理に決定的な手法がないものの、Sommerfeld の放射条件およびエネルギー吸収帯の併用 (佐藤ら, 1988; Oyama & Nadaoka, 1991) で多くの問題を解決している。しかし、比較的広域の波浪場が計算対象となると、効率的な数値計算が求められ、エネルギー吸収帯の幅をできるだけ狭く設定しなければならなくなる。そこで、エネルギー吸収帯の効率向上に関する研究 (Eric ら, 1997) をさらに重ねる必要があるとともに、Sommerfeld の放射条件に対する改良も不可欠となっている。

波動現象の数値解析において、Sommerfeld の放射条件を改良するために one-way 波動方程式を用いる手法は、Engquist & Majda (1977) によって提案された。近年、計算物理学の諸分野で多くの研究が行われ (例えば、Blaschak & Kriegsmann, 1988; Givol, 1991)、その有用性が確かめられている。差分方法に工夫をこらすことによって無反射境界条件を実現する方法 (例えば、Orlanski, 1976; 清川ら, 1996) も一方にあるが、本研究は、屈折・回折を含む沿岸波浪場数値計算に対する高精度差分法の開発の一環として、その開境界処理における one-way 方程式の適用性について検討を行うものである。

2. One-Way 波動方程式の誘導

図-1 に示されている無反射境界付近の平面波浪場について考える。境界の法線方向 n および接線方向 s における波数ベクトルの成分をそれぞれ k_n および k_s で表

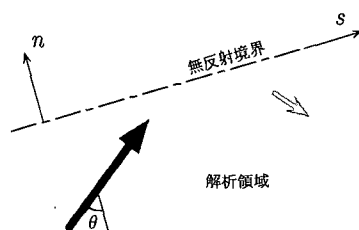


図-1 無反射境界の概念図

し、また、波の角周波数を σ で表すと、内部の波動方程式が以下の分散関係をもたすことが知られている。

$$k_n^2 + k_s^2 = k^2; \quad k = k(\sigma) \quad (1)$$

ただし、 k は波数の絶対値である。式 (1) と同義で、かつ、 k_n の定義域に負の値が含まれない式は以下のように書ける。

$$\frac{k_n}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{k_s}{k}\right)^2}; \quad k = k(\sigma) \quad (2)$$

式 (2) を分散関係式とする波動方程式を one-way 波動方程式と言う。つまり、one-way 波動方程式は、図-1 に示されている計算領域から出ていく波のみを表し、かつ、内部波動方程式に矛盾が生じないものである。したがって、それをも無反射境界条件とすることができる。しかし、one-way 波動方程式は容易に導出できるものではないので、以下の有理近似を導入することが一般的に行われている。

$$\frac{k_n}{k} = p + q \left(\frac{k_s}{k}\right)^2; \quad k = k(\sigma) \quad (3)$$

ただし、 p および q は定数である。 $(p, q) = (1, -1/2)$ と置けば、式 (3) が式 (4) のテイラー近似となる。

Halpern & Trefethen (1988) が、 $[-1, 1]$ を定義域とする関数 $\sqrt{1-x^2}$ に適用できる種々の有理近似式に基づいて、 p および q の値を求める方法を提案した。その結果、Chebyshev 接点法に対して、 $(p, q) = (1.03597, -0.76537)$; L^∞ 近似法を用いれば、 $(p, q) = (1.125, -1)$; また、最小 2 乗法では、 $(p, q) = (1.03084, -0.73631)$ となることが判明した。

式 (3) を分散関係式とする波動方程式 (これも通常 one-way 波動方程式と称す) は以下のように導かれる。

$$p \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + C \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial n} + q C^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 η は水面変動、 $C = g/k$ は波速、 t は時間である。 $(p, q) = (1, 0)$ に対して、式(4)はSommerfeldの放射条件に還元される。つまり、Sommerfeldの放射条件を one-way 波動方程式の特殊な場合とすることができる。

Higdon (1986) によれば、Sommerfeldの放射条件を拡張する視点から one-way 波動方程式を誘導することもできる。Sommerfeldの放射条件が適用される境界に対しては、ある特定の入射角を有する波が自由に透過することが知られている。このような完全透過角度を増やすことによって、高度な放射条件の構築が可能となることは考えられる。4つの完全透過角度($\pm \alpha_1, \pm \alpha_2$)を有する放射条件は次式となる。

$$\left(\cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} - C \frac{\partial}{\partial n} \right) \left(\cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} - C \frac{\partial}{\partial n} \right) \eta = 0 \quad \dots (5)$$

局所的に波形が規則的であれば、境界付近で $\eta = \eta(k_n n + k_s s - \sigma t)$ とすることができるので、

$$p = \frac{1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}, \quad q = -\frac{1}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} \quad \dots (6)$$

と置けば、式(5)は式(4)に帰着する。

3. One-Way 波動方程式による反射の最小化

One-way 波動方程式の誘導過程で有理近似式が導入されたため、式(5)からある程度の反射が発生することはやむをえない。境界への入射波(入射角 θ)を下式で表すと、

$$\eta_0 = \eta_0(kn \cos \theta + ks \sin \theta - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (7)$$

境界付近における合成波浪場は次式で表される。

$$\eta_0 = \eta_0(kn \cos \theta + ks \sin \theta - \sigma t) + K_r \eta_0(-kn \cos \theta + ks \sin \theta - \sigma t + \varphi_0) \quad \dots\dots (8)$$

ただし、 K_r は反射率、 φ_0 は位相のずれである。 η に対して式(4)が成立つことから、 K_r が次式によって表されることが分かる。

$$K_r = \left| \frac{p + q \sin^2 \theta - \cos \theta}{p + q \sin^2 \theta + \cos \theta} \right| \quad \dots\dots\dots (9)$$

図-2 は one-way 波動方程式による反射率と境界への入射波の入射角との関係を示している。Sommerfeld の

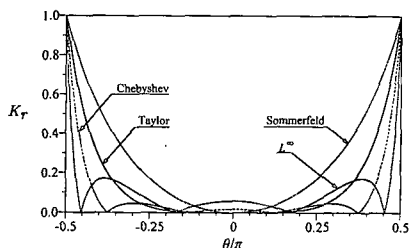


図-2 One-way 波動方程式の反射特性

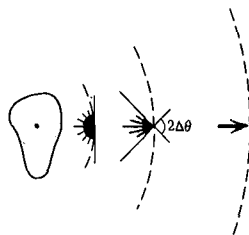


図-3 境界への入射波の概念図

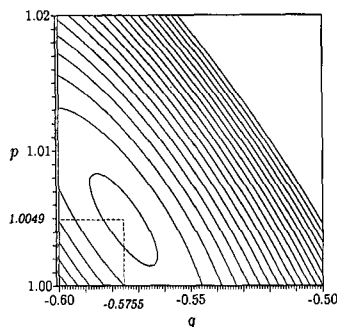


図-4 目的関数 r_1 の最小値

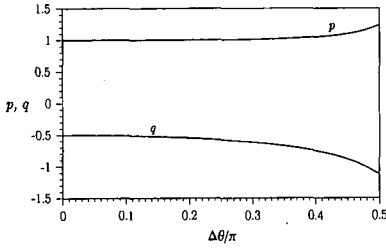
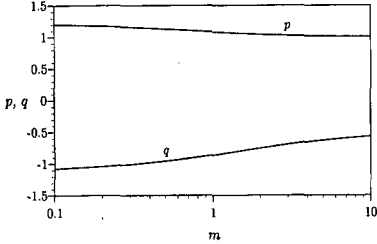
放射条件で波向が境界の法線方向から外れると、反射率が急速に大きくなるのに対して、one-way 波動方程式では θ がかなり大きくなっても反射率が小さく抑えられることが明らかである。テイラー近似による p と q の値の場合は、 θ が 30° を超えない波に対してほとんど反射が起こらない。一方、Chebyshev 接点法あるいは L^∞ 近似による p と q の値を用いれば、低反射の範囲がさらに広がるが、その代償として小さい入射角でも一定の反射が発生する。

One-way 波動方程式による反射が係数 p と q の値に影響されることから、具体的な応用問題に対して p と q の最適値の決定方法が必要となる。本研究においては、one-way 波動方程式による反射波エネルギーの最小化による p と q の値の決定方法を提案する。

図-3 に示されているように、散乱源から無限に離れている地点では、散乱波が散乱源を中心とした放射線方向に進行する。一方、散乱源の付近では、散乱波の方向が 180° の広角範囲に変動する可能性がある。したがって、散乱源から一定の距離だけ離れたところに境界を設定すれば、境界に入射する波の方向が、境界の外向き法線を中心に $\pm \Delta\theta$ ($0 < \Delta\theta < 90^\circ$) の範囲に限定されることとなる。よって、 p と q の値は以下の目的関数を最小化するものでよい。

$$r_1(p, q) = \int_{-\Delta\theta}^{\Delta\theta} \left(\frac{p + q \sin^2 \theta - \cos \theta}{p + q \sin^2 \theta + \cos \theta} \right)^2 d\theta \quad \dots\dots\dots (10)$$

$\Delta\theta$ の値は問題によるが、平均波長、散乱源の寸法および境界点と散乱源との距離でほぼ決定される。図-4 には

図-5 $\Delta\theta$ の変化による p と q の最適値の変化図-6 m の変化による p と q の最適値の変化

$\Delta\theta=45^\circ$ とした場合の、目的関数 r_1 の最小値付近における分布を示している。 $(p, q)=(1.0049, -0.5755)$ で r_1 が最小となることが分かる。図-5 は p と q の最適値が $\Delta\theta$ によって変化する傾向を示している。 $\Delta\theta$ が 0 に近づくと、 p と q がそれぞれ 1 および $-1/2$ (テイラー近似の結果) に近づくことは明らかである。

実際の計算問題においては、境界にはほぼ直角に入射する波に対しては、その反射波が計算領域の中心部まで伝わるので、できるだけ抑える必要がある一方、境界に広角で入射する波に対しては、その反射波が隣の無反射境界にほぼ吸収され、計算結果に著しい影響を与えないことが考えられる。このような場合において、異なる入射角を持つ波を区別して扱う必要があり、目的関数を以下のように設定することがより適切である。

$$r_2(p, q) = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta) \left(\frac{p+q \sin^2 \theta - \cos \theta}{p+q \sin^2 \theta - \cos \theta} \right)^2 d\theta \quad \dots (11)$$

ここに、 ρ は重み関数を表す。また、 $\rho_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta) d\theta$ 。重み関数としては、以下の関数形とすることが考えられる。

$$\rho(\theta) = \cos^m \theta \quad \dots (12)$$

ただし、 m は非負の実数である。 m の変化に対する p と q の最適値の変化が図-6 に示されている。 m の増加に伴って、 $\theta=0$ に近い波が重いペナルティを受け、 p と q の値がテイラー近似のものに近づくことが分かる。

4. 非定常緩勾配方程式に対する高次差分法

本研究で屈折・回折を含む平面波浪場の基礎方程式として、以下の非定常緩勾配方程式 (Watanabe & Maruyama, 1986) を用いる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \dots (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{C^2}{n} \nabla(n\eta) = 0 \quad \dots (14)$$

ただし、 ∇ は平面勾配演算子、 η は水面変動、 $\mathbf{q}$ は線流量を表す。また、 $n=(1+2kh/\sinh 2kh)/2$ は浅水度係数、 h は水深である。式 (13) と (14) から $\mathbf{q}$ を消去すれば、 η に関する以下の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left[\frac{C^2}{n} \nabla(n\eta) \right] = 0 \quad \dots (15)$$

ここで Radder (1979) に倣って、新たな変数 $\phi = \sqrt{n} C \eta$ を導入すると、式 (15) の左辺第 2 項が以下のように変形できる。

$$\nabla \cdot \left[\frac{C^2}{n} \nabla(n\eta) \right] = \frac{C^2}{\sqrt{n}} \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \left(\frac{C^2}{\sqrt{n}} \right) \quad \dots (16)$$

$\nabla^2(C/\sqrt{n})$ は底面勾配の 2 次オーダーに比例することから、式 (16) の右辺第 2 項を無視して差支えない。結局、式 (15) は ϕ に関する以下の波動方程式に書換えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = C^2 \nabla^2 \phi \quad \dots (17)$$

基礎方程式と同様に、 η に関する境界条件も ϕ に関する境界条件に容易に変換できる。無反射境界において、 ϕ は one-way 波動方程式を満足することとなる。

式 (17) を差分化するために、Fairweather & Mitchell (1965) によって提案された 4 次オーダーの ADI スキームに修正を加えたものを用いる。長方形格子における差分方程式は以下のように書ける。

$$A_1 \phi_{i+1,j} + (1-2A_1) \phi_{i,j} + A_1 \phi_{i-1,j} = B_{i,j}^n \quad \dots (18)$$

$$A_2 \phi_{i,j+1}^n + (1-2A_2) \phi_{i,j}^n + A_2 \phi_{i,j-1}^n = B_{i,j}^n \quad \dots (19)$$

ここに、上添字 n および $n+1$ はそれぞれの時間ステップにおける値、また、 $'$ はその中間のある値を示す。さらに、

$$A_1 = \frac{1-\mu^2}{12}; \quad A_2 = \frac{1-\nu^2}{12} \quad \dots (20)$$

$$B_{i,j}^n = \frac{5-4\mu^2+5\mu^4+6\mu^2\nu^2}{3(1-\mu^2)} \phi_{i,j}^n + \frac{1+5\mu^2}{6} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n) - \frac{\mu^2(1+\nu^2)}{1-\mu^2} (\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n) - \frac{5+\mu^2}{6} \phi_{i,j}^{n-1} - \frac{1-\mu^2}{12} (\phi_{i+1,j}^{n-1} + \phi_{i-1,j}^{n-1}) \quad \dots (21)$$

$$B_{i,j}^n = \phi_{i,j}^n + \frac{1+5\nu^2+5\mu^2+\mu^2\nu^2}{6(1-\mu^2)} (\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n) - \frac{1-\nu^2}{12} (\phi_{i,j+1}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i,j-1}^{n-1}) \quad \dots (22)$$

ただし、 $\mu = C\Delta t/\Delta x$, $\nu = C\Delta t/\Delta y$ 。

境界条件としての One-way 波動方程式も Fairweather & Mitchell (1965) のスキームに適合する ADI

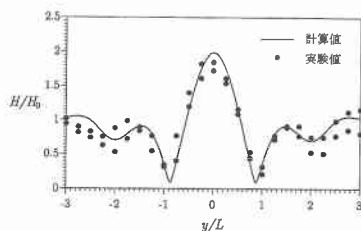


図-7 波高分布の計算値と実験値との比較

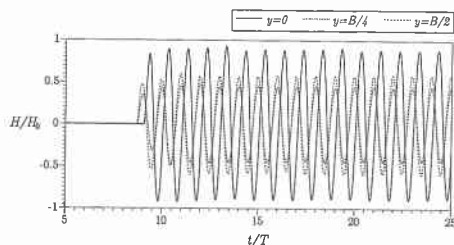


図-8 透過境界前面における水面変動の経時変化

法で差分化する必要がある。その結果として得られる差分方程式は、境界の向きや入射波の有無によって異なるが、 x の正の方向を外向き法線方向として、入射波を含まない場合は、次式によって表される。

$$(1-D_1)\phi_{I,J}+D_1\phi_{I-1,J}=E_{I,J}^n \quad (23)$$

$$D_2\phi_{I,J+1}^n+(1-2D_2)\phi_{I,J}^n+D_2\phi_{I,J-1}^n=E_{I,J}^n \quad (24)$$

ここに、 I は境界節点である。また、

$$D_x=\frac{1-\mu'}{2}; \quad D_y=-\frac{1-\nu'}{2} \quad (25)$$

$$E_{I,J}^n=\frac{1-\nu'-2\mu'\nu'}{1-\nu'}\phi_{I,J}^n+\phi_{I-1,J}^n+\frac{\mu'\nu'}{1-\nu'}(\phi_{I,J-1}^n+\phi_{I,J+1}^n) \\ -\frac{1-\mu'}{2}\phi_{I,J-1}^n-\frac{1+\mu'}{2}\phi_{I,J+1}^n \quad (26)$$

$$E_{I,J}^n=\phi_{I,J}^n-\frac{1-\mu'+\mu'\nu'}{1-\mu'}(\phi_{I,J+1}^n-2\phi_{I,J}^n+\phi_{I,J-1}^n) \\ +\frac{1-\nu'}{2}(\phi_{I,J-1}^n-2\phi_{I,J}^n+\phi_{I,J+1}^n) \quad (27)$$

ただし、 $\mu'=(1/p)Ct/\Delta x$, $\nu'=(q/p)(C\Delta t/y)^2$ 。また、外向き法線方向が y の正の方向と一致し、入射波を含まない境界に対する差分方程式は以下のように得られる。

$$F_1\phi_{I-1,J}+(1-2F_1)\phi_{I,J}+F_1\phi_{I+1,J}=G_{I,J}^n \quad (28)$$

$$(1-F_2)\phi_{I,J+1}^n+F_2\phi_{I,J}^n+G_{I,J}^n \quad (29)$$

ここに、 J は境界節点である。また、

$$F_1=-\frac{1-\mu''}{2}; \quad F_2=-\frac{1-\nu''}{2} \quad (30)$$

$$G_{I,J}^n=\frac{4-3\mu''}{1-\mu''}\phi_{I,J}^n-(\phi_{I-1,J}^n+\phi_{I+1,J}^n-\frac{\mu''}{1-\mu''}\phi_{I,J-1}^n) \\ -(2-\mu'')\phi_{I,J-1}^n-\frac{1-\mu''}{2}(\phi_{I,J+1}^n+\phi_{I,J-1}^n) \quad (31)$$

$$G_{I,J}^n=\phi_{I,J}^n-\frac{1}{1-\mu''}(\phi_{I,J}^n-\phi_{I,J-1}^n)+\frac{1+\nu''}{2}(\phi_{I,J-1}^n-\phi_{I,J-2}^n) \quad (32)$$

ただし、 $\mu''=(q/p)(C\Delta t/\Delta x)^2$, $\nu''=(1/p)C\Delta t/\Delta y$ 。

5. 計算例

(1) 浅瀬による波の屈折

One-way 波動方程式の無反射境界条件としての効果を調べるために、まず、浅瀬による波の屈折計算を行っ

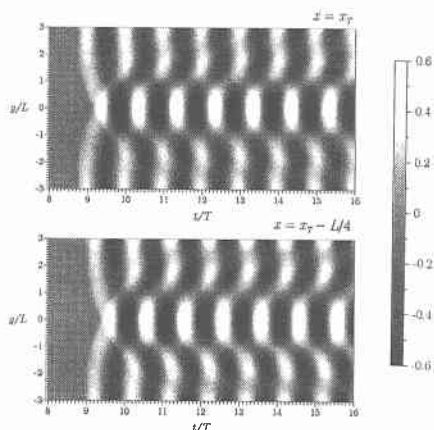


図-9 透過境界前面における水面変動の経時変化

た。伊藤・谷本 (1972) と同様に、一様水深 15 cm の水槽中に設置した天端水深 5 cm の円形浅瀬周辺の波浪場を対象とした。水槽の幅 B は 2.5 m で、側面は不透過である。入射波の波長 L は 40 cm である。計算において、沖側の一様水深部で水位変動を与え、浅瀬背後の一様水深部に無反射境界を設ける。計算格子間隔および時間刻みに関しては、 $\Delta x=\Delta y=0.05L$, $\Delta t=0.02T$ とした。One-way 波動方程式に対して $(p,q)=(1.0,-0.5)$ と置いた。図-7 に示しているのは浅瀬の頂点位置から岸方向に $2L$ 離れた断面 ($x=2L$) における計算波高分布を伊藤・谷本 (1972) の実験値と比較したもので、精度の高い計算結果が得られたことを表している。図-8 には、無反射境界 ($x=x_T$) の前面で $y=0$ (中央点), $y=B/4$, $y=B/2$ (側境界の前面) における水面変動の経時変化を示している。非常に長い計算時間に対して、良好な波形が保持されていることは明らかである。図-9 は無反射境界 ($x=x_T$) およびそこから沖方向に $L/4$ 離れた断面 ($x=x_T-L/4$) における水面変動の経時変化を比較したものである。両者に $T/4$ に相当する位相のずれがあるのみで、境界付近の波浪場は単一の進行波で、反射波が存在しないことが分かる。

(2) 構造物による波の回折

次に、開境界の処理方法に対する検証問題として広く

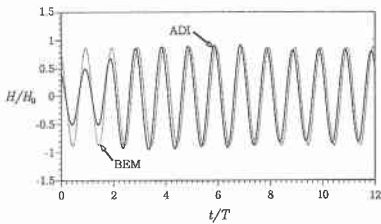


図-10 水面変動の比較

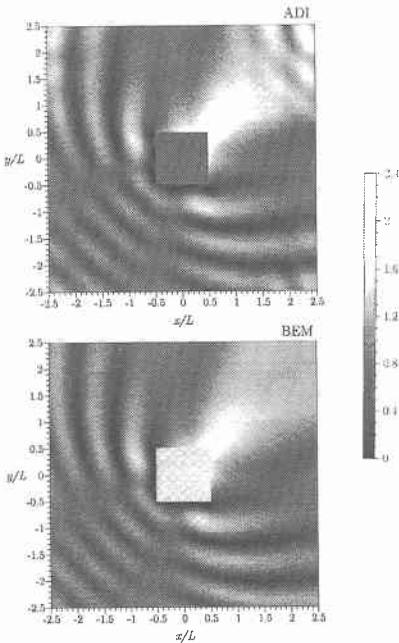


図-11 波高分布の比較

用いられている波の回折現象に本研究の手法を適用した。計算の対象領域は、 $5L \times 5L$ (L =波長)の正方形海域の中央に、 $L \times L$ の不透過構造物が設置される場合に対応する。この問題に対しては、放射条件が厳密に満たされる定常解が境界積分法で求められるので、その数値結果を用いて本計算モデルの有効性を検証することができる。本計算においては、領域の四方に無反射境界を設け、one-way波動方程式を適用する。また、 $(p, q) = (1.0049, -0.5755)$ とし、 $\Delta x = \Delta y = L/50$ 、 $\Delta t = T/100$ とした。図-10に示しているのは構造物の1対角線に沿って波が入射する場合、構造物背後の $x = x_0 + 1.5L$ 、 $y = y_0 + 1.5L$ の地点 [(x_0, y_0) は計算領域の中心である]において計算された水位の経時変化を、境界積分法で得られた結果と比較したものである。定常状態では、両者に位相差があるものの、振幅がほぼ一致していることが確認できる。図-11は、構造物周辺で定常状態に達したときの波高分布を、境界積分法で得られたものと比較してい

る。本計算の結果に関して、角点付近で多少の擾乱が発生しているものの、境界積分法の結果とよく一致していることが明らかである。

6. まとめ

本研究では、屈折・回折を含む沿岸波浪場数値計算に、one-way方程式を用いた開境界処理手法の適用性について検討した。非定常緩勾配方程式の差分化に4次精度のADI法を用い、それに適合したone-way波動方程式の高精度差分スキームを導出した。また、one-way波動方程式に関して、反射波エネルギーの最小化によってその最適係数を決定する手法を提案した。浅瀬による波の屈折および構造物による波の回折問題に適用した結果、本計算モデルの有効性が確認された。

参考文献

- 伊藤喜行・谷本勝利 (1972): 波向線交差領域での波の屈折-数値波動解析法の応用 (2), 第19回海岸工学講演会論文集, pp. 325-329.
- Eric Cruz・石倉正英・青野利夫 (1997): 非線形分散波モデルを用いた開境界処理に関する研究, 海岸工学論文集, Vol. 44, pp. 46-50.
- 清川哲志・灘岡和夫・Serdar Beji (1996): 非線形波動伝播シミュレーションにおける開境界処理の方法, 海岸工学論文集, Vol. 43, pp. 6-10.
- 佐藤典之・磯部雅彦・泉宮尊司 (1988): 任意形状港湾に対する不規則波の港内波高分布計算法の改良, 海岸工学講演会論文集, Vol. 35, pp. 257-261.
- Blaschak, J. G. and Kriegsmann, G. A. (1988): A comparative study of absorbing boundary conditions. J. Comput. Phys., Vol. 77, pp. 109-139.
- Engquist, B. and Majda, A. (1977): Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. Math. Comput., Vol. 31, pp. 629-651.
- Fairweather, G. and Mitchell, A. R. (1965): A high accuracy alternating direction method for the wave equation. J. Inst. Maths Appl., Vol. 1, pp. 309-316.
- Givoli, D. (1991): Review article: non-reflecting boundary conditions. J. Comput. Phys., Vol. 94, pp. 1-29.
- Halpern, L. and Trefethen, L. N. (1988): Wide-angle one-way wave equations. J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 84, pp. 1397-1404.
- Higdon, R. L. (1986): Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation, Math. Comput., Vol. 47, pp. 437-459.
- Orlanski, I. (1976): A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, J. Comput. Phys., Vol. 21, pp. 251-269.
- Oyama, T. and Nadaoka, K. (1991): Development of a numerical wave tank for analysis of nonlinear and irregular wave field. Fluid Dynamics Res., Vol. 8, pp. 231-251.
- Radder, A. C. (1979): On the parabolic equation method of water wave propagation. JFM, Vol. 95, pp. 159-176.
- Watanabe, A. and Maruyama, K. (1986): Numerical modeling of nearshore wave field under combined refraction, diffraction and breaking. CEJ, Vol. 29, pp. 19-39.