

非線形分散波理論式に関する多段階混合差分スキームの提案

原 信彦*・岩瀬浩之**・後藤智明***

1. はじめに

1983年日本海中部地震津波では、津波のソリトン分裂が観測された。このように浅海域でソリトン分裂を起したり、また波状段波へと変形する津波は、非線形効果と波数分散効果を考慮した支配方程式で解析する必要がある。本研究では、誤差解析および、数値計算結果と水理実験結果の比較から数値誤差を最小限にするような計算点配置を求めた上で、非線形分散波理論を支配方程式とする津波数値計算手法として、分散項を安定に計算することができ、かつ陸上遡上および領域結合の取り扱いの容易な多段階混合差分法を新たに提案する。

2. 非線形分散波理論

非線形分散波理論としては様々な提案式があるが、ここでは、津波数値計算に適合すると考えられる Peregrine の式、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial x \partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$= \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

を数値計算の支配方程式とする。ここで、分散項としては岩瀬ら (1998) が有限振幅性を考慮した分散関係から求めた最良な分散項を用いている。M, Nは水平方向の流量フラックス, ηは水位, hは静水深, Dは全水深(D=h+η), gは重力加速度である。

3. 第1微分方程式近似を利用した誤差解析に基づく最適な計算点格子に関する考察

(1) 非線形分散波の変形に関する水理実験

検証する数値計算モデルの精度は水理実験との比較によって検討する。水理実験で使用した実験装置を図-1に示す。長さ20m, 幅0.5m, 高さ0.8mの水槽に勾配3/20の斜面を設置し、実験を行った。波高計は、容量式波高計を用い、斜面下端から1m手前に設置し、その記録を計算の境界値として与えた。その他の波高計は、斜面上端から1m間隔で設置した。また、遡上に関する実験は、斜面上端7mの地点から勾配1/8の斜面を設置し、最大遡上高はビデオ撮影によって測定した。孤立波の伝播・変形に関する実験条件は上部水深を0.1mとし、遡上実験に関しては、上部水深を0.15mとした。

(2) 検討差分式とその第1微分方程式近似を利用した誤差解析

計算点格子の配置の違いにより数値計算誤差は大きく変わってくることが知られている。そこで、最適な計算点配置を調べるために、第1微分方程式近似を利用した誤差解析を行う。ここでは、支配方程式は1次元伝播の非線形長波理論式(1)~(3)を使用する。

非線形長波理論式をZabusky型差分化にする。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [M_{i+1/2}^{n+1} - M_{i+1/2}^n] + \frac{1+\beta_1}{4\Delta x} \left[(\alpha+1) \left(\frac{M}{D} \right)_{i+3/2}^n M_{i+3/2}^{n+1/2} \right. \\ \left. - 2\alpha \left(\frac{M}{D} \right)_{i+1/2}^n M_{i+1/2}^{n+1/2} + (\alpha-1) \left(\frac{M}{D} \right)_{i-1/2}^n M_{i-1/2}^{n+1/2} \right] \\ + \frac{1-\beta_1}{4\Delta x} \left[(\alpha+1) \left(\frac{M}{D} \right)_{i+3/2}^n M_{i+3/2}^{n+1/2} - 2\alpha \left(\frac{M}{D} \right)_{i+1/2}^n M_{i+1/2}^{n+1/2} \right. \\ \left. + (\alpha-1) \left(\frac{M}{D} \right)_{i-1/2}^n M_{i-1/2}^{n+1/2} \right] + \frac{2-\beta_2}{2\Delta x} gD [\eta_{i+1}^{n+1} - \eta_i^{n+1}] \end{aligned}$$

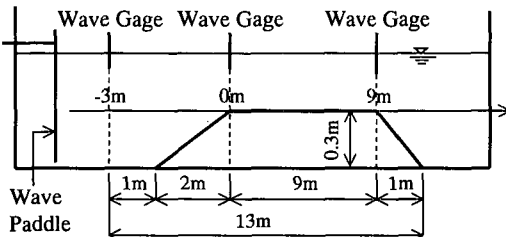


図-1 実験装置

* 正会員 工修 (株)エコー

** 正会員 東海大学 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東海大学教授 工学部土木工学科

$$+\frac{\beta_2}{2\Delta x}gD[\eta_{i+1}^n-\eta_i^n]=0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{1}{\Delta t}[\eta_{i+1}^{n+1}-\eta_{i+1/2}^{n+1/2}+\frac{2-\beta_3}{2\Delta x}[M_{i+1/2}^{n+1/2}-M_{i-1/2}^{n+1/2}] \\ +\frac{\beta_3}{2\Delta x}[M_{i+1/2}^n-M_{i-1/2}^n]=0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

である。ここで、係数 α は、移流項の空間差分配置を表す係数であり、 $\alpha=1$ ならば前進差分、 $\alpha=0$ ならば中央差分、 $\alpha=-1$ ならば後退差分を意味する。係数 β_1 は、移流項の時間差分配置を表す係数であり、 $\beta_1=1$ ならば未知の流量フラックスを使用、 $\beta_1=0$ ならば未知と既知の流量フラックスを使用、 $\beta_1=-1$ ならば既知の流量フラックスを使用することになる。係数 β_2 は、圧力項の時間的な係数であり、 $\beta_2=1$ ならば未知と既知の波高を使用し、 $\beta_2=0$ ならば既知の波高を使用する。係数 β_3 は連続の式第 2 項の時間差分配置を表す係数であり、 $\beta_3=1$ ならば未知と既知の流量フラックスを使用、 $\beta_3=0$ ならば既知の流量フラックスを使用する。

次に式 (4) を差分の中心である $(i+1/2, n+1/2)$ でテーラー展開を 3 階微分まで行う。ただし、移流項は他の項に比べ小さいので 2 階微分までとする。

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M^2}{D}\right)+gD\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\Delta t}{2}(\beta_2-1)gD\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \\ +\frac{\alpha}{2}\Delta x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{M^2}{D}\right)-\frac{\beta_1}{2}\Delta t\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{M^2}{D}\right) \\ -(1+\beta_1)\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[M\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M}{D}\right)\right]+\frac{\Delta x^2}{24}(1+2K^2)\frac{\partial^3 M}{\partial x^3} \\ =0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

同様に、式 (5) を差分の中心である $(i, n+1/2)$ でテーラー展開を行う。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[M+\frac{\Delta t}{2}(\beta_3-1)gD\frac{\partial M}{\partial x} \right. \\ \left. +\frac{\Delta t^2}{24}(1+2K^2)\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right]=0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、

$$M=M'\frac{\Delta t}{2}(\beta_3-1)gD\frac{\partial M'}{\partial x}-\frac{\Delta t^2}{24}(1+2K^2)\frac{\partial^2 M'}{\partial x^2} \\ \dots\dots\dots(8)$$

とおき、式 (8) を式 (6) の局所項に代入すると、第 1 微分方程式近似は、運動の式は、

$$\frac{\partial M'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M'^2}{D}\right)+gD\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\Delta t}{2}(1-\beta_3)gD\frac{\partial^2 M'}{\partial x^2} \\ +\frac{\Delta t}{2}(2-\beta_2-\beta_3)gD\frac{\partial^2 M'}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{2}\Delta x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{M'^2}{D}\right) \\ +(1+\beta_1)\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[M'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M'}{D}\right)\right] \\ -\frac{\beta_1}{2}\Delta t\sqrt{gD}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{M'^2}{D}\right)+\frac{\Delta x^2}{12}(1+2K^2)\frac{\partial^3 M'}{\partial x^3} \quad \dots\dots\dots(9)$$

となり、連続の式は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial M'}{\partial x}=0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

となる。ここで、運動の式 (9) の右辺の各項が誤差項となり、右辺の第 1～5 項が数値粘性誤差、第 6 項が数値分散誤差を表す。

したがって、第 1 微分方程式近似を用いて誤差解析を行った結果、誤差を最小にする係数は、 $\alpha=0, \beta_1=0, \beta_2=1, \beta_3=1$ が望ましいことがわかる。すなわち、支配方程式のすべての項を時間的にも空間的にも対称形の中央差分形式が適切であることを意味する。

(3) 最適な計算点配置

(2) では、検討差分式を用い、非線形長波理論における数値誤差を最小にするような計算点配置を第 1 微分方程式近似から求めた。ここでは、検討差分式に分散項を取り入れ、非線形分散波理論として係数 $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ の異なる全 36 ケースの数値計算を行い、水理実験結果との比較を通して、第 1 微分方程式近似から得られた誤差特性と数値計算結果を考察する。また、この数値計算において分散項を考慮する場合、移流項を中央差分としても安定に計算できることを示す。

図-2 は水位の時系変化に関する数値実験結果と水理実験結果の比較を示したものである。図はすべて斜面上端から 8 m の点での水位の時系変化を比較したものである。図-2(a) は、係数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ を一定とし係数 α の違いによる誤差特性を示したものである。 $\alpha=1$ のときは水理実験結果に比べ波形変化が大きく負の数値拡散が生じて、発散する可能性がある。 $\alpha=-1$ のときは波形変化が小さく、最適な係数ではないと考えられる。よって、係数 α は第 1 微分方程式近似から得た結果と同様に数値計算結果でも $\alpha=0$ のとき誤差が小さく、適合度も良好である。次に、図-2(b) で係数 β_1 について比較検討する。 $\beta_1=0$ のとき水理実験結果との誤差が最小となり、第 1 微分方程式近似の誤差特性と同様の結果を得た。そして、係数 β_2, β_3 も、共に 1 のときに精度の良い結果を得た。以上の結果から、第 1 微分方程式近似の誤差特性と数値実験結果の両方の結果が一致していることが分かる。また、非線形分散波理論を計算の支配方程式とするならば移流項を中央差分としても安定に計算することが可能であり、かつ精度の良い結果を得ることが確認できる。したがって、最適な計算点配置は、非線形分散波理論を計算の支配方程式とするならば、時間、空間格子ともに中央差分をとることが望ましい。

4. 多段階混合差分スキーム

(1) 多段階混合差分スキーム

多段階混合差分法は、2 段階混合差分法(原ら, 1998)

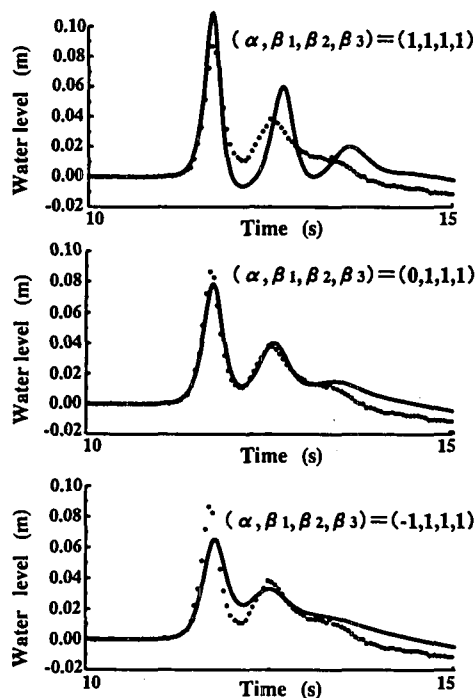
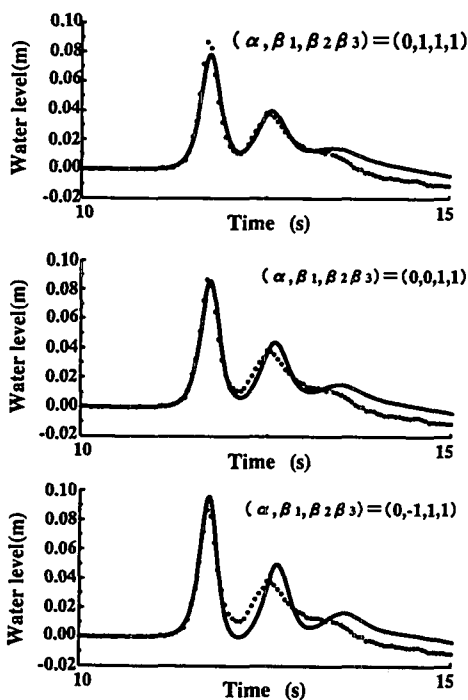
(a) 係数 α の違いによる計算結果の差違(b) 係数 α の違いによる計算結果の差違

図-2 計算差分点の違いによる計算結果の差違

をもとに改良したものである。改良点は、検討差分式の第1微分方程式近似から、すべて中央差分が望ましいという結果を得た。よって、2段階混合差分法で風上差分を用いる移流項を時間的にも空間的にも中央差分に取り、分散項を含めた陰差分計算を行う。また、2次元計算への拡張に伴う方向分散性を抑えるため、運動の式を3段階に分け、1段階では線形長波理論を計算し、2、3段階で移流項と分散項の計算を行う。

ここで、多段階混合差分法の計算の流れを説明する。1段階では、運動の式の線形項(局所項・圧力項)を陽差分で計算し、計算上の中間値 $M^{(1)}$, $N^{(1)}$ を算出する。次に、2段階では、トーマスアルゴリズムを利用した陰解法で、移流項と分散項を計算、中間値 $M^{(2)}$, $N^{(2)}$ を算出する。ただし、 x 方向の運動の式であれば、 x で微分されている移流項と x の2階微分の分散項を計算する。最後に、3段階では、残りの移流項と分散項を用いて計算する。ここでの計算法は、 x 方向の運動の式であれば、 y 方向でのトーマスアルゴリズムを利用した陰解法を用いる。また、連続の式は、陽解法で計算する。

以下に、計算法の式を示す。運動の式は、

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial x \partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x \partial y} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

であり、連続の式は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。差分式は、1段階が、

$$\frac{1}{\Delta t} [M_{i+1/2,j}^{(1)} - M_{i+1/2,j}^{n-1/2}] + gD_{i+1/2,j}^n \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{F.D.}^n = 0 \quad \dots\dots (14)$$

$$\frac{1}{\Delta t} [N_{i,j+1/2}^{(1)} - N_{i,j+1/2}^{n-1/2}] + gD_{i,j+1/2}^n \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{F.D.}^n = 0 \quad \dots\dots (15)$$

で表され、2段階が、

$$\frac{1}{\Delta t} [M_{i+1/2,j}^{(2)} - M_{i+1/2,j}^{(1)}] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \right]_{F.D.}^n + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \Big|_{F.D.}^{n-1/2} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} \Big|_{F.D.}^n \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{1}{\Delta t} [N_{i,j+1/2}^{(2)} - N_{i,j+1/2}^{(1)}] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) \right]_{F.D.}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) \Big|_{F.D.}^{n-1/2} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial y^2} \Big|_{F.D.}^n \quad \dots\dots\dots (17)$$

そして、3段階が、

$$\frac{1}{\Delta t} [M_{i+1/2,j}^{n+1/2} - M_{i+1/2,j}^{(2)}] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) \right]_{F.D.}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right)_{F.D.}^{n-1/2} = \frac{k^2}{3} \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial x \partial y} \Big|_{F.D.} \dots (18)$$

$$\frac{1}{\Delta t} [N_{i,j+1/2}^{n+1/2} - N_{i,j+1/2}^{(2)}] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) \right]_{F.D.}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right)_{F.D.}^{n-1/2} = \frac{k^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x \partial y} \Big|_{F.D.} \dots (19)$$

と表される。なお、連続の式は、1段階の計算で済み、

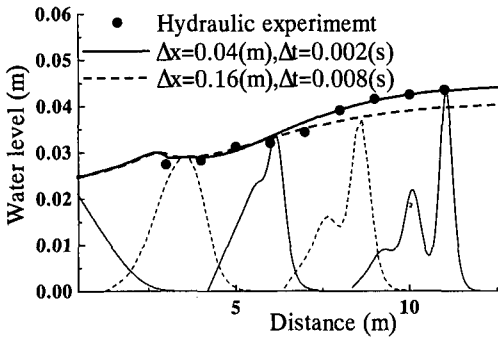
$$\frac{1}{\Delta t} [\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n] + \frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{F.D.}^{n+1/2} + \frac{\partial N}{\partial y} \Big|_{F.D.}^{n+1/2} = 0 \dots (20)$$

で表される。ここで、 $|_{F.D.}$ の記号は各微分項に対応する差分項を意味する。

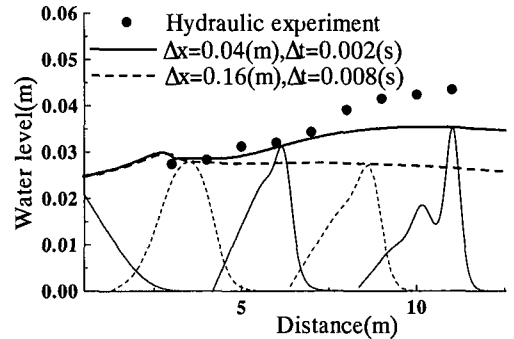
(2) 計算結果と水理実験結果の比較

多段階混合差分法の精度を検討するために、Zabusky, 2段階混合差分法, ADI法による数値計算と、水理実験結果を用いて比較する。ここで、ZabuskyとADI法は、非線形分散波理論を計算の支配方程式とするので移流項を中央差分と風上差分の両方で計算した。

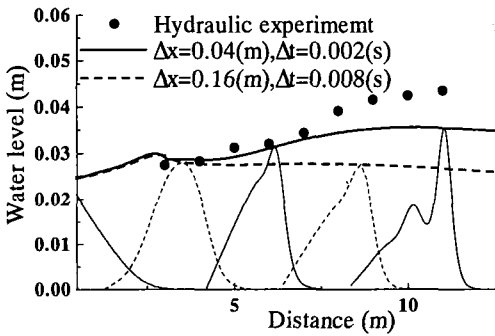
図-3(a)~(f)は、それぞれZabusky, Zabusky (up-wind), ADI法, ADI法(up-wind), 2段階混合差分法, 多段階混合差分法の、空間波形の図であり、クーラン数



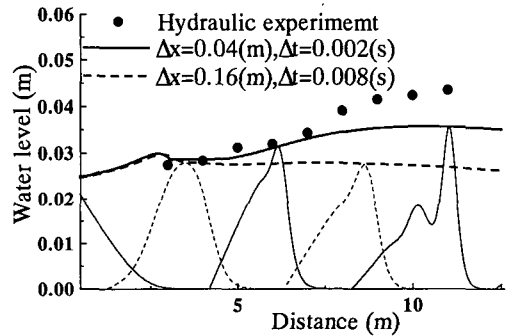
(a) Zabusky 差分



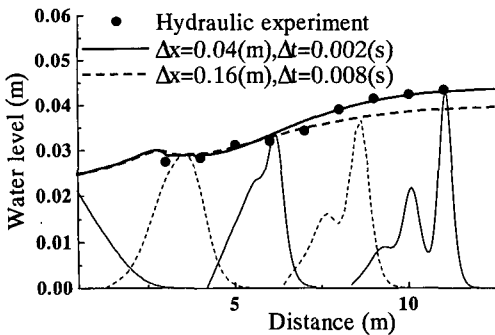
(b) Zabusky (up-wind) 差分



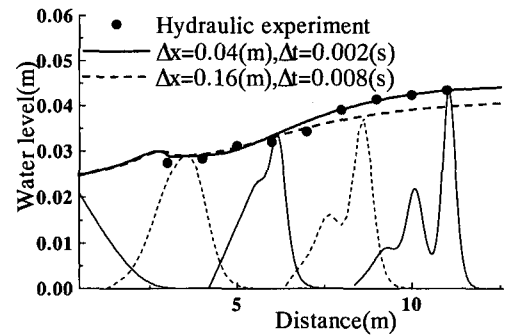
(c) ADI 法



(d) ADI 法 (up-wind)



(e) 2段階混合差分法



(f) 多段階混合差分法

図-3 数値計算結果と水理実験結果

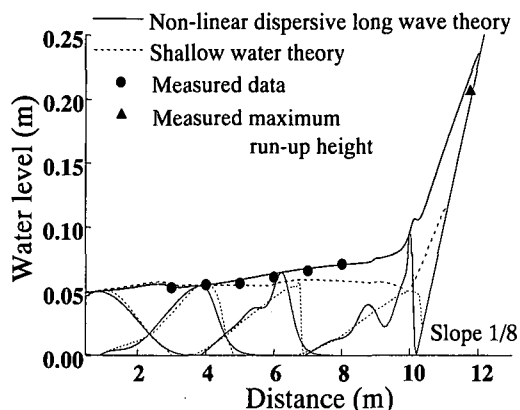


図-4 多段階混合差分スキームによる遡上計算

を一定とし、時間、空間格子を変えたものである。どの計算法を用いても格子を小さくしなければ精度の良い計算をすることができないことがわかる。次に、移流項を風上差分で計算している計算法と中央差分で計算している計算法を比較すると、中央差分で計算を行ったものはすべて水理実験結果とほぼ同じような波高増幅となり、適合度も良好であるのに対し、風上差分では移流項における数値粘性の影響が計算に表れ、水位の過小評価となる。また、移流項を中央差分で行う各計算法はいずれも良く水理実験値と一致し差はほとんどないことがわかる。したがって、非線形分散波理論を計算の支配方程式とするならば、移流項を中央差分で計算しなければ精度の良い計算をすることができない。

5. 陸上遡上計算

多段階混合差分法の特徴は、Zabusky, ADI法と異なり連続の式と運動の式の1段階目においては、陽差分法を用いて計算を行っているため、容易に陸上遡上計算を行うことが可能である。ただし、遡上の先端部分は移流項を中央差分で計算することが難しいので遡上領域では風上差分を用いて計算を行った。図-4は、非線形長波理論と非線形分散波理論を用いた数値計算結果を比較したものである。この図から、非線形長波理論に比べ非線形分散波理論を用いた遡上計算の方が遡上高が高くなり水理実験結果の遡上高に近い結果となっている。ここで、遡上時の底面摩擦はManningの粗度係数を0.03として計算したものである。

6. 結 論

本研究では、検討差分式を用いて、打ち切り誤差解析および水理実験結果との比較検討から誤差を最小にするような移流項および静水圧項の計算点配置は時間的にも空間的にも対称形の中央差分の形式が望ましいことを確認した。また、非線形長波理論を計算の支配方程式とした場合、移流項を風上差分で計算しなければ打ち切り誤差に基づく分散性と干渉により数値ギブス振動を発生させるが、非線形分散波理論を計算の支配方程式とした場合は、移流項を中央差分で計算が可能であることを明らかにした。そして、移流項を中央差分で計算することにより、風上差分を用いた計算よりも精度の良い計算をすることができる。

今回提案した多段階混合差分法は、上述の結果を考慮し2段階混合差分法における移流項の陰的差分法への適用を考え改良したものである。また、津波数値計算で重要と思われる、陸上遡上計算に対しても、1段階目で陽差分を使用しているので考慮可能である。ただし、遡上計算において非線形長波理論式に比べ非線形分散波理論式を支配方程式として用いた方が水理実験結果との適合度は良好だが底面摩擦に関しては、これから研究を進めていく必要がある。

謝辞：本研究を実施するにあたり、熱心なご指導を賜りました東海大学工学部土木工学科濱野啓造教授、飯田邦彦助教授に深く感謝いたします。また、(株)大林組技術研究所藤澤康雄氏、(株)エコー柴木秀之氏、五洋建設(株)技術研究所金山進氏そして(株)アルファ水工コンサルタンツ見上敏文氏の助力を得た。ここに記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 岩瀬浩之・見上敏文・後藤智明 (1998): 非線形分散波理論を用いた実用的な津波計算法モデル, 土木学会論文集, (印刷中).
- 原 信彦・後藤智明 (1997): 2段階混合差分法による非線形分散波の数値計算, 東海大学紀要工学部, Vol. 37, No. 2, pp. 101-107.
- Pergrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. F. M., Vol. 27, Part 4, pp. 815-827.
- Zabusky, N. J. (1968): Solitons and bound states of time-independent Schrodinger equation. Physicalreview. Vol. 168.