

Boussinesq 方程式に対する高次数値計算モデルの開発

鄭 培 喜*・余 錫 平**・磯 部 雅 彦***

1. 序 論

近年,分散特性が改良された Boussinesq 方程式に基づく沿岸波浪場の数値計算に関する研究がさかんに行われている (Madsen ら, 1991; Nwogu, 1993; Wei & Kirby, 1995)。それにより, 2 次オーダーの差分法を用いると, 計算結果の精度に打ち切り誤差の 3 次微分項が決定的な役割を果たすこととなり, 計算条件によって数値分散が顕著に現れることが判明した。数値分散は計算結果に非物理的な波状成分をもたらしてしまうため, 避ける必要がある。Abbott ら (1984) の手法に倣って Nwogu (1993) が, Boussinesq 方程式に対して, 従来の差分スキームの打ち切り誤差となる 3 次微分項を意識的に残して, それをさらに差分化することで改良を図ったが, この手法の本質は, 低次微分に対して比較的高次精度の差分法を用いたことにある。基礎方程式に含まれる各次の空間微分に対して精度の異なる差分スキームを導入して数値分散を除去する手法は, Wei & Kirby (1995) によって提案された。しかし, Wei & Kirby (1995) は, 数値振動の抑止や境界条件の処理などに必ずしも効率的でないとされている集中格子を用いている。それに対して本研究では, スタガード格子に基づく高精度の予測子・修正子法の適用を提案し, 断面 1 次元および平面 2 次元の波浪変形諸問題の再現計算を通じて, 提案された数値モデルの有効性を検証する。

2. 数値計算法

(1) 基礎方程式

Nwogu (1993) によって提案された Boussinesq 方程式を考える。数値計算法の記述を容易にするために, 連続方程式および任意水深における水平方向の運動量方程式を Wei & Kirby (1995) に倣って以下のように書く。

$$\eta_t = E(\eta, u, v) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$[U(u)]_t = F(\eta, u, v) + [P(v)]_t \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$[V(v)]_t = G(\eta, u, v) + [Q(u)]_t \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

ただし, η は水面変動, u および v は任意水深 $z=z_a$ における x および y 方向の流速成分である。下添字 t は時間 t に対する微分を表す。また,

$$\begin{aligned} E(\eta, u, v) = & -[(h+\eta)u]_x - [(h+\eta)v]_y \\ & - \{a_1 h^3(u_{xx} + v_{xy}) + a_2 h^2[(hu)_{xx} + (hv)_{xy}]\}_x \\ & - \{a_1 h^3(u_{xy} + v_{yy}) + a_2 h^2[(hu)_{xy} + (hv)_{yy}]\}_y \quad \cdots (4) \end{aligned}$$

$$U(u) = u + b_1 h^2 u_{xx} + b_2 h(hu)_{xx} \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$F(\eta, u, v) = -g\eta_x - uu_x - vv_y \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

$$P(v) = -b_1 h^2 v_{xy} - b_2 h(hv)_{xy} \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

$$V(v) = v + b_1 h^2 v_{yy} + b_2 h(hv)_{yy} \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

$$G(\eta, u, v) = -g\eta_y - uv_x - vv_y \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

$$Q(u) = -b_1 h^2 u_{xy} - b_2 h(hu)_{xy} \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

ここに, 下添字 x および y はそれぞれ x および y に対する微分を表す。 h は局所水深である。さらに,

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{z_a}{h} \right)^2 - \frac{1}{6}; \quad a_2 = \frac{z_a}{h} + \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{z_a}{h} \right)^2; \quad b_2 = \frac{z_a}{h} \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

式 (1), (2) および (3) で分散性を有する非線形波動が表される。波動方程式の線形分散関係は, $z_a = -0.553 h$ とすると, 微小振幅波理論による分散関係の [2, 2] 次 Padé 近似と一致することが明らかにされている (Nwogu, 1993)。

断面 1 次元の問題は式 (1), (2) および (3) の特例とすることができる。この場合, $v=0$ に加えて, y 方向に各変数が変化しない。その結果, 式 (3) が自然に成立つ。

(2) 時間差分

式 (1), (2) および (3) に含まれる時間微分の項に対して Adams-Bashforth-Mouton の予測子・修正子法で差分化を行うこととする。予測子としては Adams-Bashforth の 3 次スキームを適用する。

$$\eta_{i,j}^n = \eta_{i,j}^{n-1} + \frac{\Delta t}{12} (23E_{i,j}^{n-1} - 16E_{i,j}^{n-2} + 5E_{i,j}^{n-3}) \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j}^* = & U_{i+1/2,j}^n + \frac{\Delta t}{12} (23F_{i+1/2,j}^n - 16F_{i+1/2,j}^{n-1} + 5F_{i+1/2,j}^{n-2}) \\ & + 2P_{i+1/2,j}^n - 3P_{i+1/2,j}^{n-1} + P_{i+1/2,j}^{n-2} \quad \cdots \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

* 工修 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻
** 正会員 工博 東京大学助教授 工学系研究科社会基盤工学専攻
*** フェロー 工博 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻

$$V_{i,j+1/2}^* = V_{i,j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{12} (23G_{i,j+1/2}^n - 16G_{i,j+1/2}^{n-1} + 5G_{i,j+1/2}^{n-2}) \\ + 2Q_{i,j+1/2}^n - 3Q_{i,j+1/2}^{n-1} + Q_{i,j+1/2}^{n-2} \dots\dots\dots (15)$$

ここに下添字 i, j 等は格子点, 上添字 n 等は時間ステップを表す。また, * は予測値を示し, Δt は時間刻みである。修正子は Adams-Mouton の 4 次スキームを用いる。

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{24} (9E_{i,j}^* + 19E_{i,j}^n - 5E_{i,j}^{n-1} + E_{i,j}^{n-2}) \dots (16)$$

$$U_{i+1/2,j}^{n+1} = U_{i+1/2,j}^n + \frac{\Delta t}{24} (9F_{i+1/2,j}^* + 19F_{i+1/2,j}^n - 5F_{i+1/2,j}^{n-1} \\ + F_{i+1/2,j}^{n-2}) + P_{i+1/2,j}^* - P_{i+1/2,j}^n \dots\dots\dots (17)$$

$$V_{i,j+1/2}^{n+1} = V_{i,j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{24} (9G_{i,j+1/2}^* + 19G_{i,j+1/2}^n - 5G_{i,j+1/2}^{n-1} \\ + G_{i,j+1/2}^{n-2}) + Q_{i,j+1/2}^* - Q_{i,j+1/2}^n \dots\dots\dots (18)$$

修正計算を繰返すことによって計算結果の精度を向上させることができるが, Δt の短縮による同様の効果に比べてその効率を判断する必要がある。本研究では, 修正計算を繰返して, η^{n+1} , u^{n+1} および v^{n+1} の相対誤差が予め指定された許容範囲を超えないようにすれば, 結果的に計算効率の向上につながる事が分かった。

(3) 空間差分

空間差分はスタガード格子に基づく。ただし, 連続方程式を格子点 (i, j) で, x および y 方向の運動量方程式はそれぞれ格子点 $(i+1/2, j)$ および $(i, j+1/2)$ で離散化する。移流項を除く各項について中心差分を用いるが, 1 次微分には 4 次オーダーのスキーム, 2 次および 3 次微分には 2 次オーダーのスキームを適用する。連続方程式に例をとれば各次の差分スキームは以下のように書ける。

$$\delta_x f_{i,j} = \frac{\Delta x^{-1}}{24} (f_{i-3/2,j} - 27f_{i-1/2,j} + 27f_{i+1/2,j} - f_{i+3/2,j}) \dots (19)$$

$$\delta_y f_{i,j} = \frac{\Delta y^{-1}}{24} (f_{i,j-3/2} - 27f_{i,j-1/2} + 27f_{i,j+1/2} - f_{i,j+3/2}) \dots (20)$$

$$\delta_{xx} f_{i,j} = \Delta x^{-2} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) \dots\dots\dots (21)$$

$$\delta_{yy} f_{i,j} = \Delta y^{-2} (f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}) \dots\dots\dots (22)$$

$$\delta_{xy} f_{i,j} = (\Delta x \Delta y)^{-1} (f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i+1/2,j-1/2} \\ - f_{i-1/2,j+1/2} + f_{i-1/2,j-1/2}) \dots\dots\dots (23)$$

$$\delta_{xxx} f_{i,j} = \Delta x^{-3} (f_{i+3/2,j} - 3f_{i+1/2,j} + 3f_{i-1/2,j} - f_{i-3/2,j}) \dots (24)$$

$$\delta_{yyy} f_{i,j} = \Delta y^{-3} (f_{i,j+3/2} - 3f_{i,j+1/2} + 3f_{i,j-1/2} - f_{i,j-3/2}) \dots (25)$$

$$\delta_{xxy} f_{i,j} = \Delta x^{-2} \Delta y^{-1} (f_{i+1,j+1/2} - f_{i+1,j-1/2} - 2f_{i,j+1/2} \\ + 2f_{i,j-1/2} + f_{i-1,j+1/2} - f_{i-1,j-1/2}) \dots\dots\dots (26)$$

$$\delta_{xyy} f_{i,j} = \Delta x^{-1} \Delta y^{-2} (f_{i+1/2,j+1} - f_{i+1/2,j-1} - 2f_{i+1/2,j} \\ + 2f_{i-1/2,j} + f_{i-1/2,j+1} - f_{i-1/2,j-1}) \dots\dots\dots (27)$$

ただし, f は η , u および v のいずれかを表す。また, δ は差分演算子, Δx および Δy は格子間隔である。移流項については, 2 次オーダーの風上差分を適用することとする。 x 方向の移流項を例とすれば, 差分式は以下のように書ける。

$$(f\delta_x g)_{i+1/2,j} = \frac{1}{4\Delta x} [(\bar{f} - \tilde{f})(3g_{i+1/2,j} - 4g_{i+3/2,j} + g_{i+5/2,j}) \\ + (\bar{f} + \tilde{f})(3g_{i+1/2,j} - 4g_{i-1/2,j} + g_{i-3/2,j})] \dots\dots\dots (28)$$

$$(f\delta_y g)_{i+1/2,j} = \frac{1}{4\Delta y} [(\bar{f} - \tilde{f})(3g_{i+1/2,j} - 4g_{i+1/2,j+1} \\ + g_{i+1/2,j+2}) + (\bar{f} + \tilde{f})(3g_{i+1/2,j} - 4g_{i+1/2,j-1} + g_{i+1/2,j-2})] \\ \dots\dots\dots (29)$$

ただし, f および g は u あるいは v を指す。また, $\bar{f} = f_{i+1/2,j}$, $\tilde{f} = 0.25(f_{i,j-1/2} + f_{i,j+1/2} + f_{i+1,j-1/2} + f_{i+1,j+1/2})$ 。

以上のように差分化された方程式は, 数値分散を含まず, かつ安定性に優れていることが期待される。また, 各時間ステップにおいて, 予測計算および修正計算ともに 3 重対角のマトリックスを解くだけなので, 数値計算が極めて効率的に行われる。

3. 数値モデルの精度

数値モデルの精度は, 一様水深に進行する規則波に対して, 計算で得られた波速と波形の, 流れ関数法によって計算される厳密解に対する相対誤差を調べることによって明らかにした。図-1 には, 周期 $T=8s$, $h/L_0=0.5$ (L_0 =深海波長), $H/h=0.1$ (H =波高) の波に対して, $\Delta x=L/100$, $\Delta t=T/200$ (L =波長, T =周期) の条件で行った計算による空間波形を示している。この場合は, 流れ関数法 (SFM) による解に比べて, 数値モデルの計算波長がやや大きく, また, 波高もやや変動していることが分かる。図-2 は, 波の諸パラメータを可能な範囲内で変化させ, それぞれの条件で得られた計算波長の相対誤差を示したものである。当然ながら, 長周期波に対してはモデルの精度が高いが, 深海条件 ($h/L_0=0.5$)

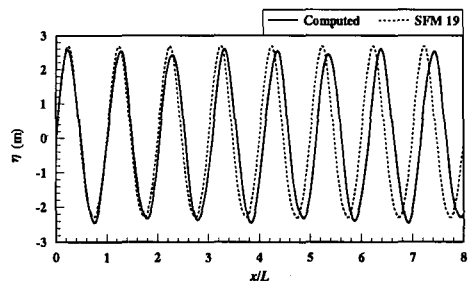


図-1 波形の計算値と SFM の結果との比較

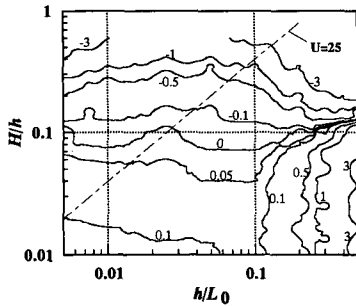


図-2 計算波長の相対誤差 (単位は%)

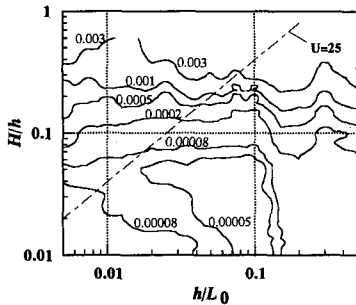


図-3 計算波形の2乗平均誤差 (単位は%)

付近に至っても誤差が3%を超えないことが分かる。図-3は、波長補正を施した場合の計算波形の二乗平均誤差を示したものである。本数値モデルで精度の高い結果が得られることが明らかである。

4. 計算結果

(1) 潜堤による波の変形

図-4に示される潜堤周辺の波浪場は、非線形分散波の数値モデルに対する検証ケースとして広く用いられているものである(土木学会, 1994)。周期が2.01s、波高が5cmの波を入射させる場合は、潜堤の天端から後部にかけて波分裂現象が顕著に現れることが実験によって確認されている。このような非線形分散波の特有な現象を精度よく捉えられるかで、数値モデルの精度が確かめられる。本研究においては、沖側の一樣水深部に吸収造波帯(Ishii ら, 1994)、また、岸側の一樣水深部に消波帯(Eric ら, 1993)を設けて計算を行う。計算格子間隔および時間刻みはそれぞれ $\Delta t = T/60$ 、 $\Delta x = L/40$ とした。図-5は潜堤天端の後部位置における水面変動の計算結果と実験値との比較を示す。波分裂現象に起因した高周波数の変動も含めて、計算波形と実験波形がよく一致していることが分かる。

(2) 一樣水深における孤立波の伝播

非線形波動数値モデルの分散性に対する検証ケースとして、一樣水深を伝わる孤立波が多く引用されている。この問題には以下の解析解が得られている。

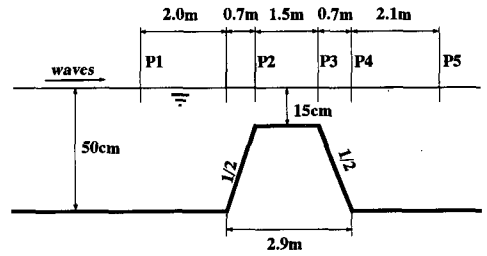


図-4 潜堤の定義図

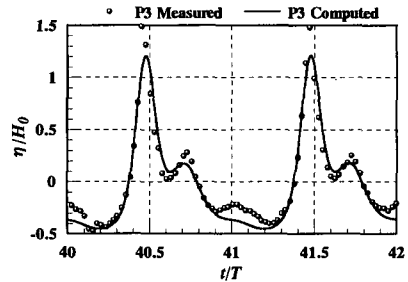


図-5 潜堤による波形の計算値と実験値との比較

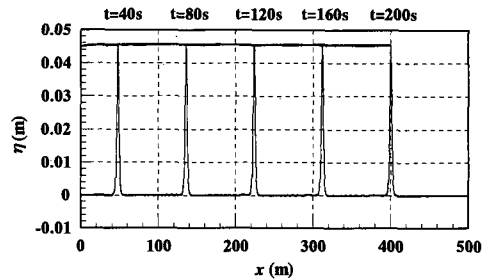


図-6 時間の経過に伴う孤立波の空間波形の変化

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4h^3}} (x - Ct) \right]; u = \sqrt{gh} \frac{\eta}{h} \quad \cdots (30)$$

ただし、 $C = \sqrt{gh}(1 + H/2h)$ は波速、 g は重力加速度である。計算条件として、静水深が0.45m、相対波高 H/h が0.1および0.2に設定した。入射境界において水面変動の理論値を与えることとし、透過境界の処理はEric ら(1993)の手法を用いた。計算格子間隔および時間刻みは、 $\Delta x = 0.222h$ 、 $\Delta t = 0.187\sqrt{h/g}$ とした。図-6には $H/h = 0.1$ の波に対して、計算の開始時刻から200sを経過した時点までの空間波形を40s間隔で示した。波が静水深の500倍以上に相当する距離を進行しても、波高の減衰がほとんど見られない結果となっている。孤立波の後部に微小な数値振動が現れているが、Wei & Kirby (1995) による同様の計算に比べて、その振幅がかなり小さくなっていることから、スタガード格子がより優れていると言える。図-7は $H/h = 0.1$ および $H/h = 0.2$ の波に対して、 $t = 40s$ と $t = 160s$ における空間波形を比較

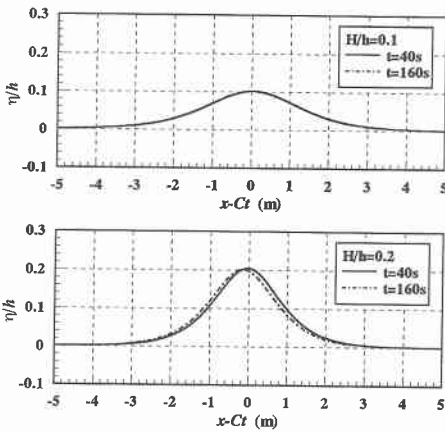


図-7 孤立波の波形の計算値と理論値との比較

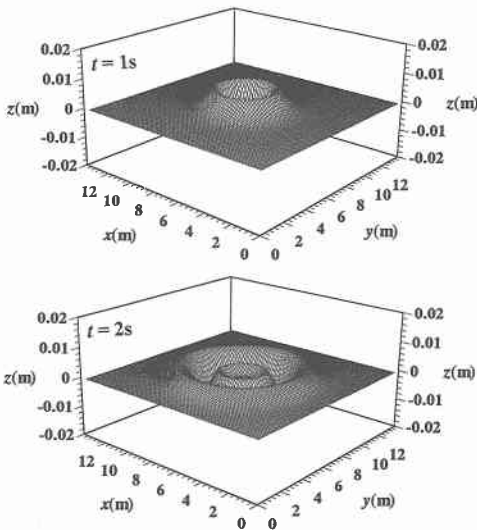


図-8 初期水面変位に伴う空間波形

したものである。相対波高が小さい場合に波の変形がほとんど見られないのに対して、相対波高が比較的大きくなると、波峰の計算波速が理論値より多少小さくなる傾向が示されている。しかし、このような波の変形は、格子間隔および時間刻みを小さくすることによって改善されることが確認されている。

(3) 初期水面変位による水面波の伝播

平面2次元問題に対する本計算手法の妥当性を検証するために、初期海面上昇による水面波の伝播計算を行った。本手法は、初期波形が断層モデルによって与えられた津波の、海岸線の近くに到達するまでの間の伝播予測に適用できる。その検証計算において、一様水深 $h=0.45$ mを有する $13.5\text{ m} \times 13.5\text{ m}$ の正方形水域に消波帯を加えた領域を計算の対象領域とした。初期海面上昇に流速

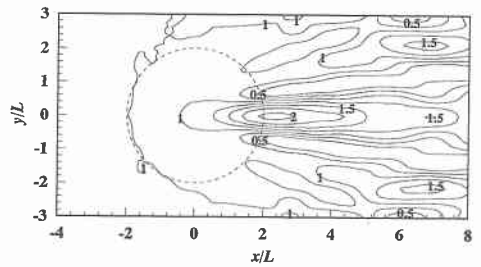


図-9 浅瀬周辺における波高分布

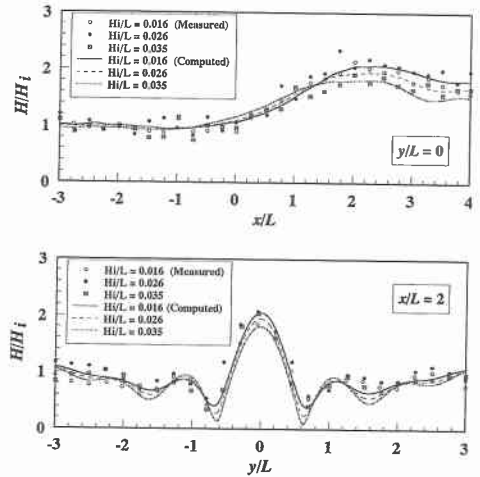


図-10 波高の計算値と実験値との比較

が伴わないことを仮定し、初期波形を以下のガウスの分布関数で与えた。

$$\eta_0 = 0.045 \exp\{-2[(x-6.75)^2 + (y-6.75)^2]\} \quad (\text{m}) \quad \dots\dots\dots (31)$$

初期最大波高は4.5 cmとなっている。また、計算において、 $\Delta x = \Delta y = 0.15\text{ m}$ 、 $\Delta t = 0.025\text{ s}$ とした。図-8は $t = 1\text{ s}$ および $t = 2\text{ s}$ の時刻に計算された空間波形が示されている。当然ながら、放射状の水面波が形成されている。ある地点でこの波を観察すれば、第1波は押し波で、かつその振幅が一連の波の中でもっとも大きいものであることが分かる。これは Mei (1989) の解析結果に一致する。

(4) 浅瀬による波の屈折

浅瀬による波の屈折に関する研究は多角的に行われてきて、信頼性の高い結果が多く得られている。これらの結果は平面波浪場の数値モデルの検証計算に活用されている。本研究では、伊藤・谷本 (1972) が線形計算および水槽実験を用いて検討した、円形浅瀬周辺の波浪場の再現計算を行う。対象地形は、一様水深 15 cm の水槽に、天端水深 5 cm の円形浅瀬を設置したものである。水槽の幅は 2.5 m、浅瀬の平面直径は 1.6 m である。再現計算

