

位相平均型 Boussinesq モデルの開発と 長周期波生成・伝播計算への応用

灘 岡 和 夫*・Karthigesu Raveenthiran**

1. 研究の目的

水の波に関する最近の非線形分散性波動理論の進歩はめざましく、Boussinesq タイプの方程式の適用範囲の拡張や、さらに、任意水深での非線形不規則波動計算が可能な新しいタイプの非線形波動理論も開発されている。しかしながら、これらはいずれも波形変形まで記述するいわゆる phase-resolving models (位相分解型モデル) であることから、広領域計算の場合に計算機負荷がかなり大きくなってしまふ、という共通の難点がある。一方、実用上、波浪計算としては波高やエネルギーといったグロスな量が求まれば十分な場合が多く、さらに、最近数多くの研究が行われている波群のもとでの長周期波の生成・伝播といった現象の解析においても、Boussinesq 方程式を用いた位相分解型の計算だけでなく、波群包絡線振幅に基づく定式化によっても波群に付随する長周期波の伝播をある程度精度よく記述できることが示されている (例えば、松立・水口, 1997)。このようなことから、今後の波動理論展開の新たな方向として、phase-averaged models (位相平均型モデル) の開発を指向していくことが重要となる。

位相平均型モデルのレベルで波高やエネルギーを算定することはエネルギー平衡方程式によるのが一般的であるが、波群の時間発展といった現象まで記述可能な既存の位相平均型モデルとしては、非線形 Schrödinger 方程式などがある。しかし、この種の方程式は通常一定水深領域に適用対象が限られ、実際上重要となる非一様水深場に適用可能な位相平均型モデルはこれまでのところ存在しない。そこで本研究では、Boussinesq 方程式を対象として多重尺度法による定式化を行うことにより、非一様水深場にも適用可能で、しかも波群に付随する長周期波の生成・伝播も直接記述可能な、新たな位相平均型モデルを開発することを試みた。

2. 位相平均型 Boussinesq モデルの定式化

(1) 対象とする位相分解型波動方程式と搬送波に関する仮定

ここでは、位相分解型波動方程式として、波群に伴う長周期波成分の生成・伝播まで追跡可能な非線形分散性方程式の中で、最もポピュラーな方程式である Boussinesq 方程式を対象として位相平均型モデルの定式化を行った。ただし、オリジナルな形の Boussinesq 方程式 (Peregrine, 1967) は、よく知られているように、適用可能な水深範囲に限られるので、ここでは、適用範囲を拡大した改良 Boussinesq 方程式を採用することにした。改良 Boussinesq 方程式としては、Madsen and Sørensen (1992) や Nwogu (1993), Beji and Nadaoka (1996) らのものが提案されているが、ここではこのうち Beji and Nadaoka (1996) の方程式を採用した。これは、Madsen and Sørensen (1992) や Nwogu (1993) のものが、エネルギー保存の観点から整合性に問題があるからである (Beji and Nadaoka, 1996)。

Beji and Nadaoka (1996) の改良 Boussinesq 方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta) \mathbf{u}] = 0, \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta \\ = \frac{1}{2} (1 + \beta) h \left\{ \nabla \left[\nabla \cdot \left(h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right] - \frac{1}{3} h \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right\} \\ + \frac{1}{2} \beta g h \left[\nabla \cdot (h \nabla \eta) \right] - \frac{1}{3} h \nabla (\nabla^2 \eta). \dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここに、 η : 自由表面水位、 $\mathbf{u}$: 水深平均水平流速ベクトル、 h : 水深、 g : 重力加速度、 ∇ : 水平 2 次元勾配作用素。上式で $\beta=0$ とした場合、オリジナルの Boussinesq 方程式 (Peregrine, 1967) が得られる。

ここで、水深変化が緩く 2 次以上の空間微分を無視するものとする、式 (1), (2) は 1 次元波動場に関して以下のように書ける。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h + \eta) u = 0, \dots\dots\dots (3)$$

* 正会員 工博 東京工業大学教授 大学院情報理工学研究科情報環境学専攻

** 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻博士課程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = (1 + \beta) h \left(\frac{1}{3} h \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) + \beta g h \left(\frac{1}{3} h \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^3} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

ここに、 u は水深平均 x 方向流速である。

搬送波成分が狭帯域スペクトルで表現されるものとすると、その自由表面変動 η_c は、つぎのように表せる。

$$\eta_c(x, t) = \frac{1}{2} A(x, t) \exp \left[i \left(\int k dx - \omega t \right) \right] + * \quad (5)$$

ここに、 i ：虚数単位、 $*$ ：第1項の共役項、 $A(x, t)$ ：時空間的にゆっくり変化する複素振幅、 k ：搬送波の代表角周波数 ω と局所水深 h の値から、式(1)、(2)の線形分散関係式、

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{kh \left(1 + \frac{1}{3} \beta k^2 h^2 \right)}{1 + \frac{1}{3} (1 + \beta) k^2 h^2} \quad (6)$$

により求まる波数。上式中のパラメータは、理論的な線形分散関係式 $\omega^2 = gk \tanh kh$ の2次の Padé 近似表現

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{kh \left(1 + \frac{1}{15} k^2 h^2 \right)}{1 + \frac{2}{5} k^2 h^2} \quad (7)$$

に式(6)を一致させることにより、 $\beta = 1/5$ となることが要請される (Beji and Nadaoka, 1996)。これはちょうど、Madsen and Sørensen (1992) の Boussinesq モデルで、 $B = 1/1.5$ 、また Nwogu (1993) のモデルで $\alpha = -2/5$ とした場合に対応している。

搬送波成分の水平流速 u_c は、 η_c と同様に時空間的にゆっくり変化する複素振幅を用いて次のように表せる。

$$u_c(x, t) = \frac{1}{2} U(x, t) \exp \left[i \left(\int k dx - \omega t \right) \right] + * \quad (8)$$

自由表面変位 η と水平流速 u は、それぞれ搬送波成分 η_c 、 u_c と、長周期変動成分 η_l 、 u_l の和で表されるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_l + \eta_c \\ u &= u_l + u_c \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

以下では、表示上の簡便さから、長周期波成分の添え字 l を省略する。

3. 多重尺度法による搬送波と長周期波の非線形発展方程式の導出

まず、独立変数 t, x に関して下記のように多重尺度表

示する。

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \varepsilon t, t_2 = \varepsilon^2 t, \dots \\ x_1 &= \varepsilon x, x_2 = \varepsilon^2 x, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、 ε は変調の程度を示す 1 より十分小さいパラメータである。その他の変数に関しては以下のような関数関係にあるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} (\eta, u, A, U) &= \text{functions}(t_1, t_2, \dots, x_1, x_2, \dots) \\ (h, k) &= \text{functions}(x_1, x_2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

これから、改良 Boussinesq 方程式(3)、(4)を展開し、 ε の各オーダーごとに分離して整理すると、まず、連続式(3)より以下の式が得られる(多重尺度法については、例えば Mei (1983) 参照)。

• Zeroth harmonic :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} [(h + \eta)u] \\ + \frac{1}{2} (\text{Re}[A] \text{Re}[U] + \text{Im}[A] \text{Im}[U]) = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} [(h + \eta)u] \\ + \frac{1}{2} (\text{Re}[A] \text{Re}[U] + \text{Im}[A] \text{Im}[U]) = O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (13)$$

• First harmonic :

$$ik[(h + \eta)U + Au] - i\omega A = O(\varepsilon^0) \quad (14)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} [(h + \eta)U + Au] = O(\varepsilon) \quad (15)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} [(h + \eta)U + Au] = O(\varepsilon^2) \quad (16)$$

同様に、運動量方程式(4)より、

• Zeroth harmonic :

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} |U|^2 + g\eta \right) = O(\varepsilon) \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} |U|^2 + g\eta \right) = O(\varepsilon^2) \quad (18)$$

• First harmonic :

$$B_1 U + B_2 u U + B_3 A = O(\varepsilon^0) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C_1 \frac{\partial U}{\partial t_1} + C_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} + C_3 \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial u U}{\partial x_1} \\ + (C_4 k_{x_1} + C_5 h_{x_1}) U + (C_6 k_{x_1} + C_7 h_{x_1}) A = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& C_1 \frac{\partial U}{\partial t_2} + C_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + C_3 \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{\partial u U}{\partial x_2} \\
& + (D_1 k_{x_1} + D_2 h_{x_1}) \frac{\partial U}{\partial t_1} + D_3 \frac{\partial^2 U}{\partial t_1 \partial x_1} \\
& + D_4 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + D_5 h_{x_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + (D_6 k_{x_1} + D_7 h_{x_1}) \frac{\partial A}{\partial x_1} \\
& + D_8 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + (C_4 k_{x_2} + C_5 h_{x_2}) U \\
& + (C_6 k_{x_2} + C_7 h_{x_2} + D_9 k_{x_1} h_{x_1}) A = O(\varepsilon^2) \dots (21)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned}
B_1 &= -i\omega \left(1 + \frac{1}{3}(1+\beta)k^2 h^2 \right) \\
B_2 &= ik \\
B_3 &= igk \left(1 + \frac{1}{3}\beta k^2 h^2 \right) \\
C_1 &= 1 + \frac{1}{3}(1+\beta)k^2 h^2 \\
C_2 &= -\frac{2}{3}(1+\beta)\omega k h^2 \\
C_3 &= g(1+\beta k^2 h^2) \\
C_4 &= -\frac{1}{3}(1+\beta)\omega h^2 \\
C_5 &= -(1+\beta)\omega k h \\
C_6 &= \beta g k h^2 \\
C_7 &= \beta g k^2 h \\
D_1 &= -\frac{1}{3}(1+\beta)ik^2 \\
D_2 &= -(1+\beta)ikh \\
D_3 &= -\frac{2}{3}(1+\beta)ikh^2 \\
D_4 &= -\frac{1}{3}(1+\beta)i\omega k^2 \\
D_5 &= (1+\beta)i\omega h \\
D_6 &= -\beta ig h^2 \\
D_7 &= -2\beta ig k h \\
D_8 &= -\beta ig k h^2 \\
D_9 &= -\beta ig h
\end{aligned} \right\} \dots (22)$$

上式系の中で、 ε のゼロ次オーダーの式(12)と(19)からは、それらの線形化方程式で構成される固有値問題を解くことにより、改良 Boussinesq 方程式の線形分散関係式(6)が得られる。

ε の異なるオーダーの式をまとめることにより、最終的に、振幅関数(A , U)と長周期波成分(η , u)の時空間発展を同時に記述する以下の方程式系が得られる。

まず連続式より、

• Zeroth harmonic :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta)u] \\
& + \frac{1}{2} (\text{Re}[A]\text{Re}[U] + \text{Im}[A]\text{Im}[U]) = 0 \dots (23)
\end{aligned}$$

• First harmonic :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta)U + Au] \\
& + ik[(h+\eta)U + Au] - i\omega A = 0 \dots (24)
\end{aligned}$$

また運動量方程式より、

• Zeroth harmonic :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} |U|^2 + g\eta \right) = 0 \dots (25)$$

• First harmonic :

$$\begin{aligned}
& (C_1 + D_1 k_x + D_2 h_x) \frac{\partial U}{\partial t} + D_3 \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} + D_4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
& + (C_2 + D_5 h_x) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u U}{\partial x} \\
& + (C_3 + D_6 k_x + D_7 h_x) \frac{\partial A}{\partial x} + D_8 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\
& + (B_1 + C_4 k_x + C_5 h_x) U + B_2 u U \\
& + (B_3 + C_6 k_x + C_7 h_x + D_9 k_x h_x) A = 0 \dots (26)
\end{aligned}$$

4. 線形浅水特性の理論的検証

得られた方程式は非一様水深場に適用可能なものであるが(ただし原式の Boussinesq 方程式(3),(4)自体に起因する制約を当然受ける),ここでその基本的な妥当性を検証する意味で、線形浅水特性を理論的に検討する。

定常線形波動場の場合、式(24)と(26)を組み合わせることにより搬送波振幅 U に関する次の方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
& \frac{U_x}{U} + \frac{1}{2} \frac{\left[1 + 2\beta k^2 h^2 + \frac{5}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]}{\left[1 + \frac{2}{3}\beta k^2 h^2 + \frac{1}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]} \frac{k_x}{k} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\left[2 - \frac{1}{3}(1-6\beta)k^2 h^2 + \frac{4}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]}{\left[1 + \frac{2}{3}\beta k^2 h^2 + \frac{1}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]} \frac{h_x}{h} = 0 \dots (27)
\end{aligned}$$

また、式(24)より、

$$\frac{A_x}{A} = \frac{U_x}{U} + \frac{k_x}{k} + \frac{h_x}{h} \dots (28)$$

式(27)と(28)より、搬送波振幅 A に関する次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \frac{A_x}{A} - \frac{1}{2} \frac{\left[1 - \frac{2}{3}\beta k^2 h^2 - \frac{1}{3}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]}{\left[1 + \frac{2}{3}\beta k^2 h^2 + \frac{1}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]} \frac{k_x}{k} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{1}{3}(1-2\beta)k^2 h^2 - \frac{2}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]}{\left[1 + \frac{2}{3}\beta k^2 h^2 + \frac{1}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]} \frac{h_x}{h} = 0 \dots (29)
\end{aligned}$$

一方、式(6)から、 $dw/dx=0$ より、

$$\begin{aligned}
& \frac{k_x}{k} = -\frac{1}{2} \frac{\left[1 - \frac{1}{3}(1-2\beta)k^2 h^2 + \frac{1}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]}{\left[1 + \frac{2}{3}\beta k^2 h^2 + \frac{1}{9}\beta(1+\beta)k^4 h^4 \right]} \frac{h_x}{h} \dots (30)
\end{aligned}$$

であることから、これを式(29)に代入することにより、最終的に以下の式を得る。

$$\frac{A_x}{A} = -\frac{1}{4} \frac{h_x}{h} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} \beta k^2 h^2\right)}{\left[1 + \frac{2}{3} \beta k^2 h^2 + \frac{1}{9} \beta (1 + \beta) k^4 h^4\right]^2} \cdot \left[1 - (1 - \beta) k^2 h^2 + \frac{1}{3} \beta (1 + \beta) k^4 h^4 + \frac{1}{27} \beta (1 + \beta)^2 k^6 h^6\right] \dots (31)$$

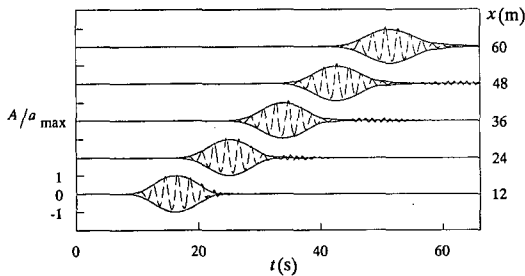
これは、Beji and Nadaoka (1996) が改良 Boussinesq 方程式 (1), (2) に関して、エネルギーフラックス保存から導いた関係式と同一である。このことは、本モデルの定式化が少なくともエネルギー的な観点から見て矛盾のないものであることを示すものである。

5. 波群に伴う長周期波生成・伝播計算への応用

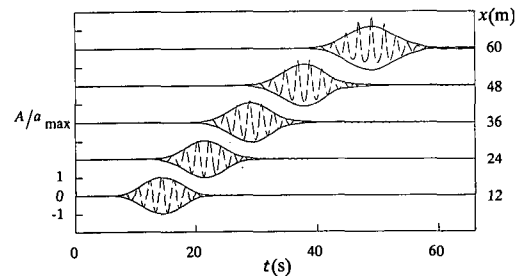
未知変数 η , u , A および U に関する初期条件としては、 $t=0$ でこれらの値を全計算領域でゼロとした。入射境界での境界条件としては、包絡線が次式で表される単一波群の搬送波を入射させた。

$$A_0(t) = \frac{1}{2} a_{\max} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T_g}\right)\right] \dots (32)$$

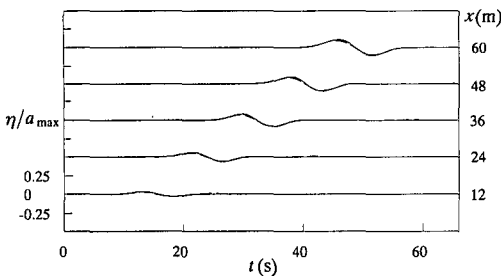
このとき搬送波の時系列は、



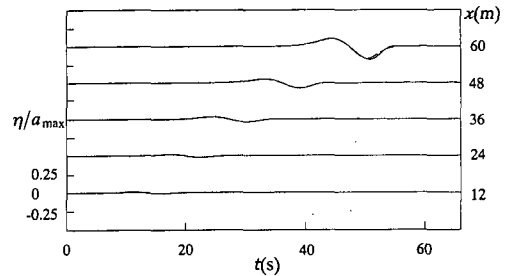
(a) 搬送波成分



(a) 搬送波成分



(b) 長周期波成分



(b) 長周期波成分

図-1 水平床に関する計算結果(実線: 本モデル, 破線: 改良 Boussinesq 方程式)

図-2 斜面のケースに関する計算結果(実線: 本モデル, 破線: 改良 Boussinesq 方程式)

$$\eta_0(t) = \begin{cases} A_0(t) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 < t < T_g \\ 0 & t < 0, t > T_g \end{cases} \dots (33)$$

ここに、 T_g : 波群周期、 T : 搬送波周期。対応する流速変動は進行波として連続式より与えた。透過側境界の境界条件は、搬送波、長周期波ともに放射条件より与えた。

ここでは計算例として、一様水深上ならびに式 (34) で表される斜面上 (単位: m) に、それぞれ上記の単一波

$$h(x) = \begin{cases} 0.5 & 0 \leq x \leq 15 \\ 0.5 - 0.01(x - 15) & 15 \leq x \leq 55 \\ 0.1 & 55 \leq x \end{cases} \dots (34)$$

群を入射させたときの波群の伝播およびそれに伴う長周期波成分の生成・発達過程の計算結果を示す。

図-1(a) (b) は、一様水深のケースに関する計算結果を示したもので、(a) が搬送波成分を、また (b) が長周期波成分を表している。設定した計算パラメータは、 $a_{\max} = 1$ cm, $h = 25$ cm, $T = 2$ s, $T_g = 15$ s, $\Delta x = 0.75$ m, $\Delta t = 0.12$ s である。同図には比較のため、改良 Boussinesq 方程式 (3), (4) に基づく通常の位相分解型計算による計算結果 ($\Delta x = 0.075$ m, $\Delta t = 0.02$ s) を破線で示している。ただし、この場合には計算結果を数値フィルターで成分分離することにより搬送波成分と長周期波成分を算出している。この図-1 の結果を見ると、本モデルによる計算結果は、改良 Boussinesq 方程式による位相分解型の

計算結果と、搬送波成分、長周期波成分ともに、ほぼパーフェクトに一致した結果が得られることが分かる。

つぎに斜面のケースに関する計算結果を図-2(a)(b)に示す。設定計算パラメータは $a_{\max}=1$ cm, $T=2$ s, $T_0=15$ s, $\Delta x=0.75$ m, $\Delta t=0.075$ s である。先と同様に比較のため、改良 Boussinesq 方程式 (3), (4) による計算結果 ($\Delta x=0.075$ m, $\Delta t=0.02$ s) を破線で示す。これを見ると、本モデルによる計算結果は、搬送波については最も水深が浅い $x=60$ m の地点において、改良 Boussinesq 方程式に基づく位相分解型計算結果に比べて、正側の包絡線振幅が過小評価また負側が過大評価になっているものの全体的にはほぼ妥当な計算結果を与えていることが分かる。また、長周期変動成分については、 $x=60$ m の地点の結果も含めて両者の差はほとんど見られず、本モデルはきわめて良好な結果を与えている。

水深が浅い地点で、本モデルによる包絡線振幅の計算精度がやや低下するのは、非線形性が増大した場合、搬送波に関する式 (5) や (8) の単純な仮定が不十分になるためである。したがって包絡線振幅の計算精度向上には、高次の高調波を含んだ形の搬送波表現を導入する必要がある。しかし、長周期成分に関しては式 (5), (8) の搬送波表現で十分な精度が得られている。このことは、長周期波生成に関わる駆動力が搬送波の基本波成分のみでほぼ表現されることを示すものである。

本モデルは、このように、改良 Boussinesq 方程式による位相分解型の計算結果と比べて、搬送波振幅と長周期成分の双方に関してほぼ同様の結果を与えることができるが、計算時間に関しては、本モデルの方が大幅に短縮できる。ここで示した計算例では、本モデルによる CPU 時間は、改良 Boussinesq 方程式によるものと比べて水平床のケースで約 1/20、斜面のケースで約 1/6 であった。この点は、位相平均型としての本モデルの大きな長所である。

6. おわりに

改良 Boussinesq 方程式を対象とした位相平均型モデ

ルを新たに開発した。また、このモデルが、搬送波としての波群振幅だけでなく波群に付随して生成・伝播する長周期波に関してもその時空間発展を精度よく記述できることを示した。なお、ここでは、位相分解型の波動モデルとして最もポピュラーな Boussinesq 方程式を対象として定式化した。同様の定式化は他の非線形分散性波動方程式 (例えば、Nadaoka et al., 1994, 1997; Beji and Nadaoka, 1997) にも適用できる。それらの結果や、多方向波浪場への拡張等については別途報告したい。

謝辞：本研究は、平成 8～9 年度文部省科学研究費補助金(基盤研究(B)(2)) (研究代表者：灘岡和夫、課題番号：08455228) の補助を受けて行われたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 松立博樹・水口 優 (1997): 浅海域における波群の伝播変形と長周期波, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp. 211-215.
- Beji, S. and Nadaoka, K. (1996): A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth. *Ocean Eng.*, Vol. 23, No. 8, pp. 691-704.
- Beji, S. and Nadaoka, K. (1997): A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves. *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, Vol. 453, pp. 319-332.
- Madsen, P. A. and Sørensen, O. R. (1992): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. *Coastal Eng.*, Vol. 18, pp. 183-204.
- Mei, C. C. (1983): The applied dynamics of ocean surface waves, John Wiley & Sons, 740 p.
- Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y. (1994): A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions. *Proc. 24th ICCE*, pp. 427-441.
- Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y. (1997): A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves. *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, Vol. 453, pp. 303-318.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. Waterway Port Coastal Ocean Eng.*, ASCE, Vol. 119, No. 6, pp. 618-638.
- Peregrine, D. H. (1967): Long wave on a beach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp. 815-827.