

非線形波理論の最適分散特性について

Samir Abohadima*・余 錫平**・磯部 雅彦***

1. 序 論

近年, 強分散性を有する非線形波理論に関する研究が 2 つの方向に急発展している。一方では, Boussinesq 方程式が深海限界の近くまで微小振幅波理論と同等の分散関係を有するように拡張され, 他方では, 適切な鉛直分布関数を導入することにより, 深海から極浅海まで高精度の分散性を保つ緩勾配方程式が提案された。しかしながら, このいずれの理論も不規則波に適用する際に, 波のスペクトル特性を考えると, 必ずしも最適な分散関係が得られるような配慮をなされたとは言えない。

そこで本研究では, 不規則波への適用を前提とした種々の非線形波動方程式の分散特性に関する最適化手法を提案するとともに, 強分散性を有する非線形波理論の一種である磯部 (1994) の非線形緩勾配方程式に対して, 最適分散特性をもたらし鉛直分布関数形の特性を検討し, また, 種々の形式の Boussinesq 方程式に含まれている分散係数の最適値を明らかにする。

2. 非線形波理論の分散特性指数

非線形波動方程式を導く際に, 波形勾配に直接関係しない仮定や近似を導入する必要もあるため, 非線形波理論の線形分散特性は一般的に微小振幅波理論によるものに帰着しない。その誤差は波数に依存する場合が多い。ここで, 非線形波動方程式の線形分散関係および微小振幅波理論による波の分散関係をそれぞれ以下のように表すこととする。

$$k = k(\sigma; h) \dots\dots\dots (1)$$

$$k_0 = k_0(\sigma; h) \Leftrightarrow \sigma^2 = gk_0 \tanh k_0 h \dots\dots\dots (2)$$

ただし, σ は角周波数, k は波数, h は水深, g は重力加速度である。よって, 特定の周波数の波に対して, 以下の指標で非線形波動方程式の分散特性を評価することができる。

$$\lambda(\chi) = 1 - k/k_0 = 1 - \Omega/\Omega_0 \dots\dots\dots (3)$$

ただし, $\Omega (=kh)$ は無次元波数, $\chi (= \sigma\sqrt{h/g})$ は無次元周

波数である。式 (2) から分かるように, Ω_0 は χ にのみ依存する。また, Ω も χ にのみ依存する場合が多いため, λ も単一変数 χ の関数となる。以下で明らかにされるように, 非線形波浪理論において, 流速などの鉛直分布に対する近似精度を向上させることによって, 分散特性をより正確にすることができる。また, 多くの非線形波動方程式には, 分散特性を調節する係数が含まれ, この分散係数を変化させることによって, 特定の波数を有する波に対して波動理論の分散特性を最適化することも可能となる。

実際の海の波は一定のスペクトルを有する不規則波である。この場合においては, 波動理論の分散特性を示す指標として

$$\Lambda(\chi_p) = \int_0^\infty (1 - \Omega/\Omega_0)^2 S(\chi/\chi_p) d\chi \dots\dots\dots (4)$$

を定義することができる。ただし, $S(= \chi_p E/m_0)$ は無次元スペクトル密度関数 (E = パワースペクトル, m_0 = 波の全エネルギー), χ_p は無次元ピーク周波数である。 Λ は χ_p のみに依存することは明らかである。不規則波に適用できる非線形波動方程式に対して, Λ を最小化することにより, その分散特性を加重平均的な意味で最適化することは海岸工学の実務において重要な意味を持つ。

式 (4) に含まれるスペクトル密度関数に関しては, 実際問題にもっとも適したものを用いなければならないが, 本研究は下式の Bretschneider-光易型の標準形 (Goda, 1985) に基づく。

$$S\left(\frac{\chi}{\chi_p}\right) = 5\left(\frac{\chi}{\chi_p}\right)^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\chi}{\chi_p}\right)^{-4}\right] \dots\dots\dots (5)$$

3. 非線形緩勾配方程式の最適分散特性

一樣水深における微小振幅波に対して非線形緩勾配方程式 (磯部, 1994) を適用すると, その線形分散関係が明らかになる。具体的には, N 個の独立な鉛直分布関数 $Z_a (\beta = 1, 2, \dots, N)$ に対して, 速度ポテンシャルの水平分布関数を $f_\beta = a_\beta e^{i(kx - \sigma t)}$ (a_β = 係数) とすると, 線形化された非線形緩勾配方程式が以下の a_β に関する線形代数方程式に帰着される。

$$(\chi^2 Z_a^2 \beta^2 - B_{a\beta}) a_\beta = \Omega^2 A_{a\beta} a_\beta \dots\dots\dots (6)$$

* 工修 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻
** 正会員 工博 京大助教授 工学系研究科社会基盤工学専攻
*** フェロー 工博 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻

ただし, $Z^0 = Z|_{z=0}$, $A_{\alpha\beta} = h^{-1} \int_{-h}^0 Z_{\alpha} Z_{\beta} dz$, $B_{\alpha\beta} = h \int_{-h}^0 Z'_{\alpha} Z'_{\beta} dz$, $Z' = \partial Z / \partial z$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. a_{β} が非自明解であるべき条件から, 無次元周波数 Ω と無次元波数 χ との関係が求められる。それが非線形緩勾配方程式の線形分散関係である。

(1) 線形分散関係の最適化

非線形緩勾配方程式の最適分散特性は, 物理的に合理的な鉛直分布関数に基づいて求めなければならないが, ここではまず, 以下のいくつかの条件を満足する行列 $A_{\alpha\beta}$ と $B_{\alpha\beta}$ の各要素が独立に与えられた場合, 物理的に合理的な鉛直分布関数が必ず得られることを前提として, 独立した鉛直分布関数の個数によって波動理論の最適分散特性がどのように変わるか, また, $A_{\alpha\beta}$ と $B_{\alpha\beta}$ の各要素の最適値が χ_p にどう依存するかを調べる。最適化の手法はポウエル法である。行列 $A_{\alpha\beta}$ と $B_{\alpha\beta}$ については,

(i) 独立直交系から鉛直分布関数を得ることを考慮して, $\alpha \neq \beta$ の場合は $A_{\alpha\beta} = 0$, また, $\alpha = \beta$ の場合は $A_{\alpha\alpha} > 0$;
(ii) Z_{α} に定数を乗じることは差支えないので, $Z_{\alpha}^0 = 1$ とすることができる;
(iii) $B_{\alpha\beta} (=B)$ は固有値がすべて正となる実対称行列であるため, $B = TDT^T$ とすることができる。ただし, 上添字 T は行列の転置を表し, また, D は対角行列, T は対角化のための直交行列である。

図-1 には非線形緩勾配方程式の分散特性指標と鉛直分布関数の個数との関係が示されている。概して, 鉛直分布関数を1つ増やすことによって, 分散特性指標が2オーダー減少することが言える。また, χ_p が大きくなると, つまり, ピーク周期が短くなると, 波動方程式による分散関係の精度が低下することが分かる。図-2 は $\chi_p = 7.55$, つまり, 平均的な分散特性を表す指標が比較的大きい場合 (クリティカル・ケース) において, 各成分波に対する分散特性の誤差 λ を示すものである。鉛直分布関数を2つ以上用いれば, パワー・スペクトルに含まれているほとんどの成分波に対して, 非線形緩勾配方程式が微小振幅波理論とほぼ同等の分散関係を有することは明らかである。また, 鉛直分布関数を1つに限定しても, 波浪エネルギーの約80%を占める波の成分に対して, 分散特性を $\pm 10\%$ の精度で捉えられることが確かめられる。

図-3 および4は, 鉛直分布関数の個数が $N=1$ および $N=2$ の場合に対して, Λ の最小値をもたらす行列 $A_{\alpha\beta}$ と $B_{\alpha\beta}$ の各要素の値が χ_p にどう依存するかを示している。数値結果から, χ_p が大きくなると, $A_{\alpha\beta}$ は小さくなり, また, 逆に $B_{\alpha\beta}$ は大きくなること分かる。

(2) 鉛直分布関数の最適化

これより実用的な鉛直分布関数形の最適化を試みる。まず, 1関数のみを用いる場合 ($N=1$) について以下の2通りの関数形を考えてみる。

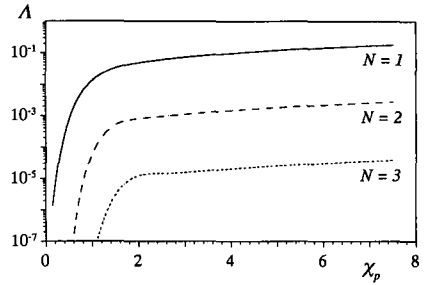


図-1 分散特性指数と鉛直分布関数の個数との関係

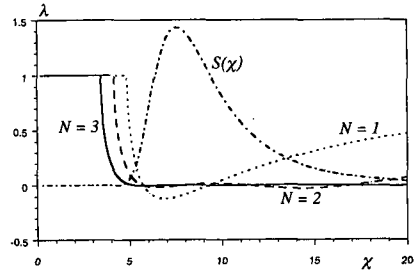


図-2 最適分散特性の周波数依存性 ($\chi_p = 7.55$)

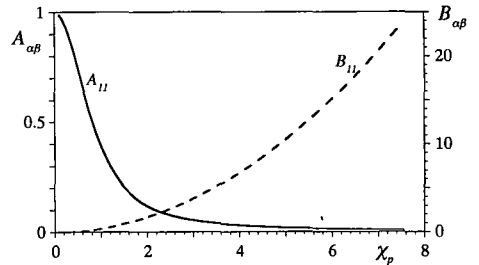
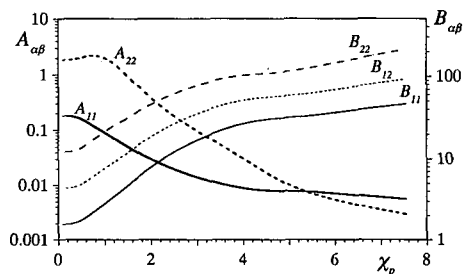
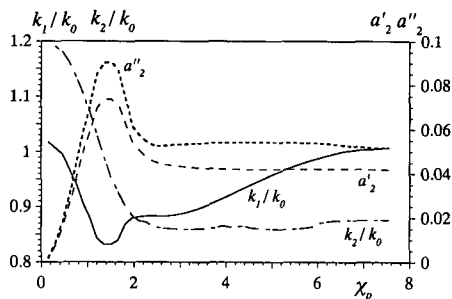
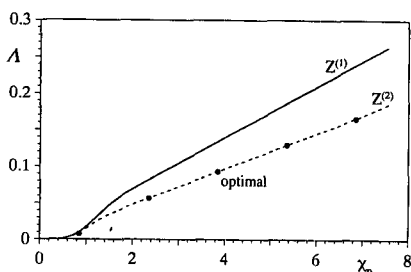


図-3 係数行列の最適値 ($N=1$)

$$Z^{(1)} = \frac{\cosh k_1(h+z)}{\cosh k_2 h} \quad \dots (7)$$

$$Z^{(2)} = (1 - a_2' - a_2'') \frac{\cosh k_2(h+z)}{\cosh k_2 h} + a_2' \frac{\cos k_2'(h+z)}{\cos k_2 h} + a_2'' \frac{\cos k_2''(h+z)}{\cos k_2 h} \quad \dots (8)$$

係数 k_1 , k_2 , k_2' , k_2'' , a_2' および a_2'' の値は, 与えられた χ_p に対して, Λ が最小となるように求め, その結果を図-5 に示している。ただし, $k_2 h$ および $k_2' h$ はほぼ定数で, $k_2 h = 4.60$, $k_2' h = 4.85$ 。通常, $Z^{(1)}$ に準ずる関数形を用いる場合は, k_1 を微小振幅波理論による波数 k_0 とすることが多いが, 波動理論の最適分散特性を確保するために, k_0 よりやや小さい値の方がより適切であることが分かった。また, a_2' と a_2'' の値が1に比べてはるかに小さいことから, $Z^{(2)}$ を $Z^{(1)}$ の修正形として見る事ができる。図-6 に示されているように, $Z^{(1)}$ を分布関数形とした場合の最適分散指標は, $A_{\alpha\beta}$ と $B_{\alpha\beta}$ の各要素を独立に最適化

図-4 係数行列の最適値 ($N=2$)図-5 $N=1$ の場合の鉛直分布関数の最適係数図-6 $N=1$ の場合の最適分散性指数

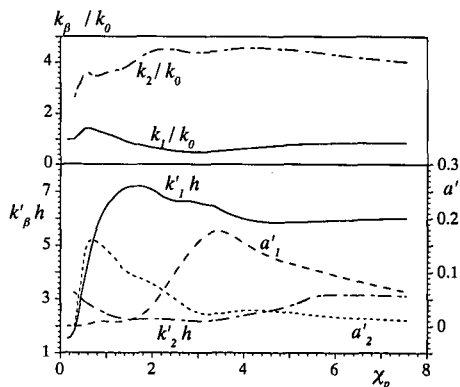
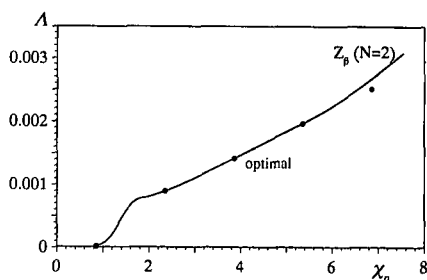
した場合に比べてかなり大きいものに対して、 $Z^{(2)}$ を用いれば、その差がほとんどなくなることが分かる。図-6の結果は、 $A_{\alpha\beta}$ と $B_{\alpha\beta}$ の各要素に対して独立に最適化を行っても、それに対応する合理的な鉛直分布関数が構成可能であることを示唆している。

次いで、2鉛直分布関数を用いる場合 ($N=2$) について考える。対象関数形は以下のように設定する。

$$Z_\beta = (1 - \alpha_\beta) \frac{\cosh k_\beta(h+z)}{\cosh k_\beta h} + \alpha_\beta \frac{\cos k'_\beta(h+z)}{\cos k'_\beta h} \quad (\beta=1, 2) \dots\dots\dots (9)$$

求められた係数 α'_β , k_β , k'_β ($\beta=1, 2$) の最適値は図-7に示されている。また、図-8で分かるように、式(9)を分布関数形とした場合は、最適化過程における自由度が6つあるため、 $A_{\alpha\beta}$ と $B_{\alpha\beta}$ の各要素について独立に最適化を行う結果に非常に近い分散特性指標の値が得られた。

最後に、以下のような3鉛直分布関数の場合 ($N=3$) について調べる。

図-7 $N=2$ の場合の鉛直分布関数の最適係数図-8 $N=2$ の場合の最適分散性指数

$$Z_\beta = \frac{\cosh k_\beta(h+z)}{\cosh k_\beta h} \quad (\beta=1, 2, 3) \dots\dots\dots (10)$$

計算された k_1 , k_2 および k_3 の最適値を図-9に示す。これらの値に対応する分散特性指標は図-10に示される。 $N=1$ の場合に同様、双曲線関数のみを用いると、 $A_{\alpha\beta}$ と $B_{\alpha\beta}$ の各要素を独立に最適化するのに比べて、最適化過程における自由度が限定されるため、分散特性指標が比較的大きくなってしまふ。しかしながら、図-10と図-8と図-6を比較すれば分かるように、鉛直分布関数の個数を増やすことに従って、波動理論の分散特性指標が小さくなることは変わらない。

4. Boussinesq 理論の最適分散係数

近年、Boussinesq 方程式の線形分散関係の改良を目的とする研究がさかんに行われてきた。そのきっかけとなったのは Witting (1984) の論文で、その後、Madsen ら (1991) および Nwogu (1993) の研究が発表され、海岸工学の分野における Boussinesq 方程式の実用化が急速に展開された。Madsen ら (1991) および Nwogu (1993) が提案した Boussinesq 方程式 (MNBE) の線形分散関係は以下のように書ける。

$$\chi^2 = \frac{\Omega^2 - \left(\mu_1 + \frac{1}{3}\right)\Omega^4}{1 - \mu_1\Omega^2} \dots\dots\dots (11)$$

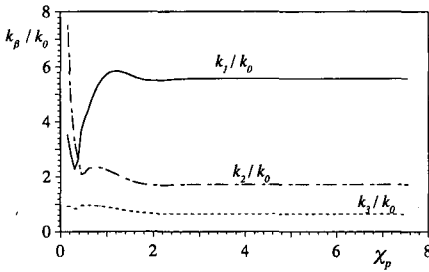
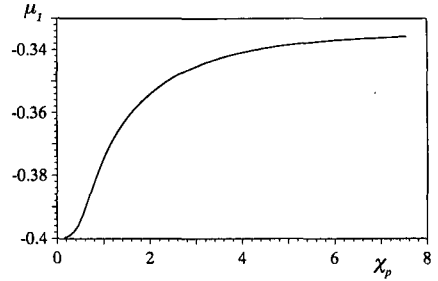
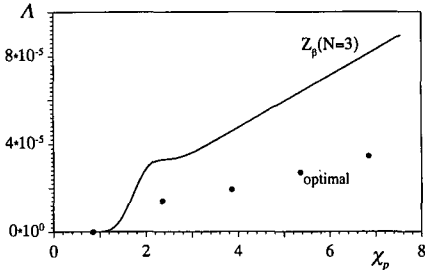
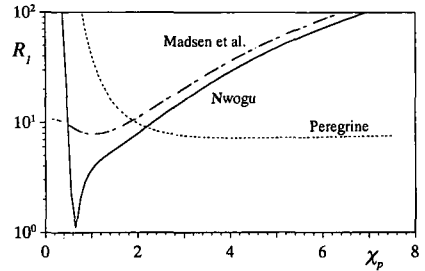
図-9 $N=3$ の場合の鉛直分布関数の最適係数図-11 μ_1 の最適値図-10 $N=3$ の場合の最適分散性指数

図-12 各種 Boussinesq 方程式の分散特性

ただし、 μ_1 は分散係数である。Madsen ら (1991) によれば μ_1 は Boussinesq 方程式の分散関係を改良するために導入された係数に過ぎないが、Nwogu (1993) はこの係数を基礎方程式に含まれている流速の物理的解釈に関連付けた。Madsen ら (1991) は、式 (11) が微小振幅波理論の分散関係式のテイラー展開に 4 次のオーダーまで等しくなるのを前提に、 $\mu_1 = -2/5$ とした。一方、Nwogu (1993) は、式 (11) と微小振幅波理論の分散関係式との差が $0 < h/L_0 \leq 1/2$ の範囲で平均的にもっとも小さくなるように、 $\mu_1 = -0.39$ を推奨した。一方、本研究の計算結果によれば、一定のスペクトルを有する不規則波に適用する場合において、Boussinesq 方程式の線形分散関係が最適となるような μ_1 の値は、ピーク周波数によって異なり、図-11 に示されるものを用いなければならない。Madsen ら (1991) および Nwogu (1993) が提案した μ_1 の値は、それぞれ $\chi_p = 0.15$ および $\chi_p = 0.60$ 、つまり、ピーク周波数で長波となる場合にしか適していない。図-12 には現在提案されている種々の形式の Boussinesq 方程式の分散特性指標と最適化された分散特性指標との比 (R_i) を示している。ピーク周期が比較的に短い不規則波に対して、Peregrine (1967) の方程式は Madsen ら (1991) および Nwogu (1993) の方程式よりよい結果をもたらすことも有り得ることが示されている。

次に、Gobbi & Kirby (1996) によって提案された Boussinesq 方程式 (GKBE) について考える。この方程式の線形分散関係式は、以下のような 2 つの分散係数 μ_2 と μ'_2 を含むものとなる。

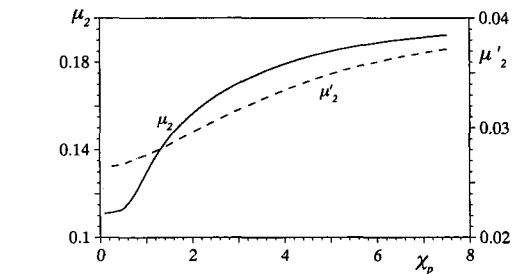
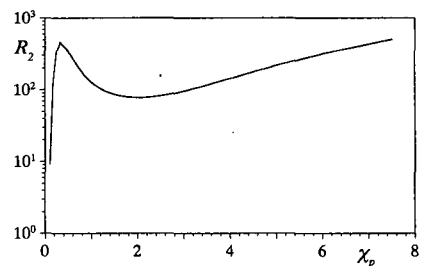
図-13 μ_2, μ'_2 の最適値

図-14 Boussinesq 方程式 (GKBE) の分散特性

$$\chi^2 = \frac{\Omega^2 - \frac{1}{2} \left(\mu_2 - \frac{1}{3} \right) \Omega^4 + \left(\frac{1}{4} \mu_2^2 - \frac{1}{12} \mu_2 - \frac{1}{24} \mu'_2 + \frac{1}{120} \right) \Omega^6}{1 - \left(\frac{1}{2} \mu_2 - \frac{1}{2} \right) \Omega^2 + \left(\frac{1}{4} \mu_2^2 - \frac{1}{4} \mu_2 - \frac{1}{24} \mu'_2 + \frac{1}{24} \right) \Omega^4} \quad (12)$$

Gobbi & Kirby (1996) は、式 (12) が微小振幅波理論による分散関係式の (4, 4) 次オーダーの Padé 近似に等しくなるように、 $\mu_2 = 1/9$ 、 $\mu'_2 = 5/189$ を提案した。一方、この Boussinesq 方程式に対して、最適分散特性が得られ

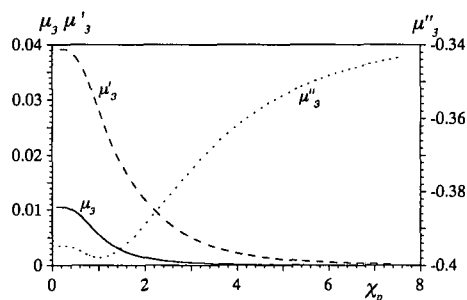
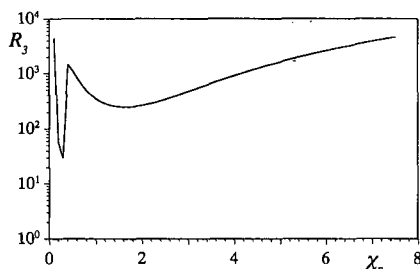
図-15 μ_3 , μ'_3 と μ''_3 の最適値

図-16 Boussinesq 方程式 (SMBE) の分散特性

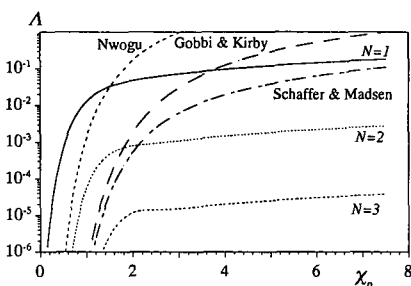


図-17 各種 Boussinesq 方程式の分散特性と最適分散特性との比較

るような μ_2 と μ'_2 の値は図-13 に示されている。また、図-14 は Gobbi & Kirby (1996) の分散係数による分散特性指標と最適化された分散特性指標との比 (R_2) を示している。絶対値が非常に小さい部分、つまり、 χ_p が 0 に非常に近い部分を除けば、Gobbi & Kirby (1996) の分散係数による分散特性指標は概ね 2 ～ 3 オーダー大きいことが言える。

最後に、Schaffer & Madsen (1995) によって提案された Boussinesq 方程式 (SMBE) について考える。この場合の線形分散関係式は以下のように表される。

$$\chi^2 = \frac{\Omega^2 + \left(\mu_3 + \mu'_3 - \mu''_3 - \frac{1}{3}\right)\Omega^4 + \mu_3\left(\mu'_3 - \mu''_3 - \frac{1}{3}\right)\Omega^6}{1 + (\mu_3 + \mu'_3 - \mu''_3)\Omega^2 + \mu'_3(\mu_3 - \mu''_3)\Omega^4} \quad (13)$$

ただし、3つの分散係数 (μ_3 , μ'_3 , μ''_3) が含まれている。Schaffer & Madsen (1995) は、式 (13) が微小振幅波理論による分散関係の (4, 4) 次オーダーの Padé 近似に

等しくなることなどを前提に、 $\mu_3 = (05 - 3\sqrt{803})/1890$, $\mu'_3 = (28 - 2\sqrt{133})/126$, $\mu''_3 = (-3 - \sqrt{23/35} - 2\sqrt{19/7})/18$ を提案した。それに対して、図-15 に μ_3 , μ'_3 および μ''_3 の最適値を示している。また、図-16 に Schaffer & Madsen (1995) の分散係数による Boussinesq 方程式の分散特性指標と最適化された分散特性指標との比 (R_3) を示す。ピーク周波数が非常に小さい場合に対して R_3 は 10 近くまで小さくなるが、それ以外では Schaffer & Madsen (1995) の分散係数による分散特性指標は概ね 2 オーダー大きい結果が示された。

図-17 は Boussinesq 方程式に対して分散係数を最適化した場合と非線形緩勾配方程式に対して鉛直分布関数を最適化した場合の波動方程式の最適分散特性の比較である。図示されているように、鉛直分布関数の最適化を通じて分散関係の高精度化を実現することが有効である。

5. 結 論

本研究では、不規則波に適用する場合の非線形波動方程式の分散性を評価する指数を提案した。それを用いて、非線形緩勾配方程式に対して、最適な鉛直分布関数の決定方法を示した。また、Nwogu (1993), Gobbi & Kirby (1996) および Schaffer & Madsen (1995) らによって提案された Boussinesq 方程式を不規則波に適用する場合の最適分散係数を求めた。最適化によって波動方程式の分散特性が大きく改良されることが判明した。また、鉛直分布関数の最適化は波動方程式の分散関係の高精度化にとって極めて効率的な手法であることが分かる。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1994): 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No. 491, pp. 1-14.
- Gobbi, M. F. and Kirby, J. T. (1996): A forth order Boussinesq-type wave model, Proc. 25th ICCE, pp. 1116-1129.
- Goda, Y. (1985): Random seas and design of maritime structures, Univ. of Tokyo Press, pp. 23-27.
- Madsen, P., Murray, R., and Sorensen, O. (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 371-388.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equation for nearshore wave propagation, J. Wtrwy., Port, Coastal, and Ocean Eng. Vol. 119, No. 6.
- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 815-827.
- Schaffer, H. A. and Madsen P. A. (1995): Further enhancements of Boussinesq-type equations, Coastal Eng. Vol. 26, pp. 1-14.
- Witting, J. M. (1984): A unified model for the evolution of nonlinear water waves, J. Comput. Phys., Vol. 56, pp. 203-236.