

緩勾配方程式のグリーン関数および一般解の導出

藤井信太郎*・福島雅紀**・郭 文秀***
京 藤 敏 達****・西村仁嗣*****

1. 序 論

波の平面変形を解析する上で、計算精度および計算の簡便さから、グリーン関数法は優れた方法であることが示されている。特に、郭・西村 (1997) によって開発された緩勾配方程式に対するグリーン関数法の応用は、水深が緩やかに変化する波動場を精度良く予測し、計算量を減らすことを可能にした。この方法は、従来のグリーン関数法が、グリーン関数が解析的に与えられている定数係数偏微分方程式に限られたことを考えると、変数係数方程式を解く上での重要な指針を示したことになり画期的である。本研究では、グリーン関数を、特異点周りの級数解と遠方場の解に分け、それら漸近解を接合することにより構成する。ここで用いる方法は体系的であるため、従来一定水深の波動場のみに適用されていたグリーン関数法を水深変化がある場合に拡張することを可能にする。特に、ここでは任意水深場における境界要素法の表式を導く。

2. 緩勾配方程式のグリーン関数

緩勾配方程式

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla f) + k^2 CC_g f = 0, \quad \nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$$
..... (1)

は関数変換 $f = \phi/\sqrt{CC_g}$ により以下の Helmholtz 型の方程式に変換される (Radder, 1979)。

$$\left. \begin{aligned} L[\phi] &= 0, \quad L = \nabla \cdot \nabla + k_c^2 \\ k_c^2 &= k^2 - \frac{\nabla \cdot \nabla (\sqrt{CC_g})}{\sqrt{CC_g}} \end{aligned} \right\}$$
..... (2)

上式で定義される波数 k_c は水深 h に依存し、空間変数 x, y の緩やかな関数である。式 (2) に滑らかな関数 ϕ^+ を掛けグリーン関数の第 2 形式を使うと、

$$\iint_D (\phi^+ L[\phi] - \phi L^+[\phi^+]) dx dy = \int_r \left(\phi^+ \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi^+}{\partial n} \right) ds$$
..... (3)

となる。ここで、 $\partial/\partial n$ は領域 D の境界 Γ の外向き法線方向微分を表し、 L^+ は L の共役作用素である。また、Helmholtz 方程式が自己共役であることから $L^+ = L$ となる。

さて、 ϕ^+ が方程式

$$L^+[\phi^+] = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \quad (x_0, y_0) \in D \cdots \cdots (4)$$

を満たすとする、

$$\phi(x_0, y_0) = - \int_r \left(\phi^+ \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi^+}{\partial n} \right) ds, \quad (x_0, y_0) \in D$$
..... (5)

となり、式 (2) の一般解はその境界値および境界上の法線方向微係数のみから構成される。問題は変数係数偏微分方程式 (4) の特異点を持つ解をどのように求めるかであるが、ここでは特異点近傍では級数展開を行い、特異点から遠方では、郭・西村 (1997) にしたがって、一方向波の方程式を利用する。これにより、放物型方程式を解くことにより緩勾配方程式の解が構成される。

2.1 水深変化がない場合

水深変化がない場合には、定数係数偏微分方程式の解としてグリーン関数が得られる。まずこの厳密解を利用して本方法の妥当性について検討する。極座標表示による Helmholtz 方程式は

$$L[\phi^+] = \delta(r), \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \cdots (6)$$

である。波数 k は定数であるから、 θ 依存性のないグリーン関数が存在する。前述の方法に従って、グリーン関数を求める。

まず、原点周りの級数解として

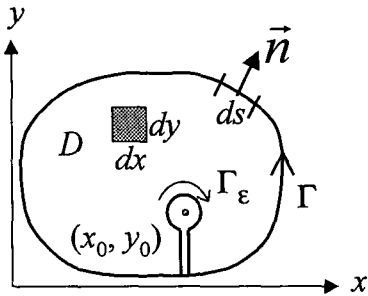


図-1 閉領域と座標系

* 学生会員 工修 筑波大学大学院 工学研究科
** 正 会 員 工博 土木研究所 河川部 海岸研究室
*** 正 会 員 工博 韓国科学財団 博士後課程
**** 正 会 員 工博 筑波大学助教授 構造工系
***** 正 会 員 工博 筑波大学教授 構造工系

$$\phi^+ = \phi_{\text{ser}} \equiv \log r \sum_{n=0} p_n r^n + \sum_{n=0} q_n r^n \dots\dots\dots (7)$$

を仮定し、式(6)に代入し $\log r$ の項および r の冪でまとめると、それぞれ以下の漸化式を得る。

$$p_{n+2} = -\frac{k^2 p_n}{(n+2)^2}, \quad q_{n+2} = -\frac{k^2 q_n + 2(n+2)p_{n+1}}{(n+2)^2} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、この級数は初項である2つの未定係数 p_0, q_0 を含むことに注意する。これらは以下で示すように、特異点の強度および一方向波の条件から決定される。特に係数 p_n は特異点の強度のみから決定される。

一方向波の方程式

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = A \phi_s, \quad \phi^+ = \phi_s \dots\dots\dots (9)$$

は、これが式(6)の解となるように A を決定することによって得られる。すなわち、式(6)の ϕ_s の r 微分を式(9)を用いて消去し、これより得られる式が任意の ϕ_s について成り立つ条件から、 A の満たす微分方程式

$$A^2 + k^2 + \frac{A}{r} + \frac{dA}{dr} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。式(10)は非線形であるが、 r が大きいときの漸近解は A を $1/r$ の冪級数で展開することによって求められる。すなわち、

$$A = ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} + \dots\dots\dots (11)$$

この漸近解で、 k を $-k$ で置き換えたものも解であり、後者は点源に吸い込まれる波を表す。級数(11)の収束半径 $1/r$ は1に比べて小さくなるが、級数を $1/r^2$ までで切り捨てれば実用上は問題なくこれを適用できる。

未定定数 q_0 は特異点周りの級数解(7)が一方向波となる条件

$$\frac{\partial \phi_{\text{ser}}}{\partial r} = A \phi_{\text{ser}}, \quad r = r_m \dots\dots\dots (12)$$

を用いて決定する。ただし、 $r = r_m$ は級数解および一方向波の解の接合点を示す。本方法の妥当性を確かめるため、ここで得られる級数解の初項を厳密解と比較する。特異点の強度 p_0 は式(4)の級数解から $1/2\pi$ として与える。図-2は、一方向波の方程式として式(11)において $1/r^2$ まで考慮したものを用い、級数解の項数 l を増やしたときに初項 q_0 の相対誤差、

$$\Delta_{q_0} = \frac{q_{0\text{ext}} - q_{0\text{BP}}}{q_{0\text{ext}}}, \quad q_{0\text{ext}} = \frac{1}{4i} + \frac{i}{2\pi} \left(\gamma + \log \frac{k}{2} \right) \dots\dots\dots (13)$$

をプロットしたものである。ただし、 γ は Euler 定数であり、ここでは $k = r_m = 1$ とした。項数を増しても誤差が小さくならないのは、一方向波の方程式が厳密ではないためである。しかし、この解の接合によっても誤差が5～

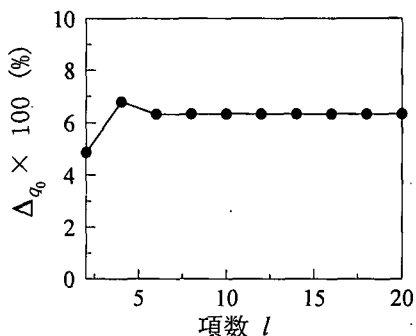


図-2 初項の相対誤差

6%であることから、本方法は実用上十分な精度を有すると思われる。

2.2 底面変化がある場合

底面変化がある場合には、グリーン関数は偏角 θ に依存する。先程と同様に、級数解および一方向波の方程式を求めることが出来るが、ここでは式(1)の導出の際に用いた緩勾配条件を再度使用する。

級数解(7)の係数 p_n, q_n が θ に依存するとして、これを Helmholtz 方程式(2)に代入し r の冪でまとめると p_n, q_n に対する方程式

$$\left. \begin{aligned} (n+2)^2 p_{n+2} + \frac{d^2 p_{n+2}}{d\theta^2} + k_c^{(0)} p_n \\ + k_c^{(1)} p_{n-1} + \frac{1}{2} k_c^{(2)} p_{n-2} &= 0, \\ (n+2)^2 q_{n+2} + \frac{d^2 q_{n+2}}{d\theta^2} + k_c^{(0)} q_n \\ + k_c^{(1)} q_{n-1} + \frac{1}{2} k_c^{(2)} q_{n-2} &= -2(n+2)p_{n+2}, \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

を得る。上記の微分方程式を解く際に、波数 k_c の2乗を $r=0$ 周りに Taylor 展開した表式、

$$\left. \begin{aligned} k_c^2 &\approx k_c^{(0)} + r k_c^{(1)} + \frac{r^2}{2} k_c^{(2)}, \quad k_c^{(0)} = k_c^2|_{r=0}, \\ k_c^{(1)} &= \left. \frac{\partial k_c^2}{\partial x} \right|_{r=0} \cos \theta + \left. \frac{\partial k_c^2}{\partial y} \right|_{r=0} \sin \theta, \\ k_c^{(2)} &= \left. \frac{\partial^2 k_c^2}{\partial x^2} \right|_{r=0} \cos^2 \theta + \left. \frac{\partial^2 k_c^2}{\partial y^2} \right|_{r=0} \sin^2 \theta \\ &\quad + 2 \left. \frac{\partial^2 k_c^2}{\partial x \partial y} \right|_{r=0} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

を用いる。式(14)を $p_n, q_n=0, n<0$ に注意して解くと、

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \text{const.}, \quad p_1 = 0, \\ p_2 &= -\frac{k_c^{(2(0))}}{4} p_0, \quad p_3 = -\frac{k_c^{(2(1))}}{8} p_0, \dots \\ q_0 &= \text{const.}, \quad q_1 = q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

を得る。ここで、式(14)から p_n を決定する際に q_n が空間一価関数となる条件を用いた。未定定数 p_0 は特異点の強度、 q_0, q_{1c}, q_{1s} は一方向波との接合条件から決定される。

次に、式(2)を満たす一方向波の方程式として

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = A\phi_s + B\frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + C\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots (17)$$

を仮定し、式(2)が任意の ϕ_s , $\partial \phi_s / \partial \theta$ および $\partial^2 \phi_s / \partial \theta^2$ に対して成立するとして、 A, B, C についての3本の方程式を求める。これらの式は k_c を含むため、関数 A, B, C は距離 r および緩やかな空間変動スケール双方に依存する。 r 依存性は先程と同様に $1/r$ の幕で展開し、

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 + \frac{1}{r}A_1 + \frac{1}{r^2}A_2, & B &= B_0 + \frac{1}{r}B_1 + \frac{1}{r^2}B_2, \\ C &= C_0 + \frac{1}{r}C_1 + \frac{1}{r^2}C_2, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

と置く。 $A_m, B_m, C_m, m=0, 1, 2$, は空間変数に緩やかに依存するため、最終的に次の漸近解を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &\approx \frac{i}{8k_c^3} \left\{ 8k_c^4 + 4ik_c^2 \frac{\partial k_c}{\partial r} + 3 \left(\frac{\partial k_c}{\partial r} \right)^2 - 2k_c \frac{\partial^2 k_c}{\partial r^2} \right\}, \\ A_1 &\approx -\frac{1}{2}, & B_2 &\approx -\frac{i}{2k_c^2} \frac{\partial k_c}{\partial \theta}, & C_2 &\approx \frac{i}{2k_c}, \\ A_2 &\approx \frac{i}{64k_c^5} \left\{ 8k_c^4 - 16k_c^3 \frac{\partial^2 k_c}{\partial \theta^2} + 16k_c^2 \left(\frac{\partial k_c}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 8ik_c^2 \frac{\partial k_c}{\partial r} - 19 \left(\frac{\partial k_c}{\partial r} \right)^2 + 6k_c \frac{\partial^2 k_c}{\partial r^2} \right\} \\ B_0 &= 0, & B_1 &= 0, & C_0 &= 0, & C_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

以上の近似解では、 r に関して $1/r^2$ の項まで、緩やかに変化する空間変数に関して2階微分までを考慮している。

次に、特異点近傍で得られた解(16)が一方向波の方程式(17)を満たすように q_0, q_{1c}, q_{1s} を決定する。ここでは、ほぼ様な底面勾配を持つ地形に点波源が存在すると仮定して、波数 k_c の空間一階微係数までを考慮する。起伏を持つ底面の頂部など、地形の曲率が無視できない地点に波源がある場合は、さらに高階の微係数まで考慮する必要がある。また、解の接合点 $r=r_m$ は $r_m k_c|_{r=0}=1$ を満たすように選ぶ。級数解(7)において式(16)の p_0, p_1, p_2, p_3 および q_0, q_1 まで考慮し、これを一方向波の方程式(17)に代入する。この方程式が任意の θ に対して成立するためには、定数項、 $\sin \theta$ および $\cos \theta$ の係数が0となる必要がある。最終的に、 $p_0=1/2\pi$ に対して

$$q_0 = -\frac{1224}{1490\pi}i + \frac{745 \log(k_c|_{r=0}) - 67}{1490\pi}, \dots\dots\dots (20)$$

および

$$\left. \begin{aligned} q_{1c} &= \lambda r_m \frac{\partial k_c}{\partial x} \Big|_{r=0}, & q_{1s} &= \lambda r_m \frac{\partial k_c}{\partial y} \Big|_{r=0}, \\ \lambda &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1173659}{3486004} - i \frac{111000}{871501} \right), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

を得る。これらを用いると、点波源近傍の級数解は次の様になる。

$$\begin{aligned} \phi_s &= \log r (p_0 + p_2 r^2 + p_3 r^3) + p_0 \left(\frac{1}{4} k_c^{2(0)} r^2 + \frac{3}{32} k_c^{2(1)} r^3 \right) \\ &\quad + q_0 \left(1 - \frac{1}{4} k_c^{2(0)} r^2 - \frac{1}{8} k_c^{2(1)} r^3 \right) + q_1 \left(r - \frac{1}{8} k_c^{2(0)} r^3 \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

最終的に、一方向波に対する境界条件として、

$$\begin{aligned} \phi_s|_{r=r_m} &= \frac{68-459i}{745\pi} + \frac{1741191+409272i}{4357505\pi} r_m \\ &\quad \times \left(r_m \frac{\partial k_c}{\partial x} \Big|_{r=0} \cos \theta + r_m \frac{\partial k_c}{\partial y} \Big|_{r=0} \sin \theta \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

が得られる。上式第一項を一定水深のグリーン関数の $r=r_m$ における値と比較すると、その誤差は5%程度である。特に式(23)に対して次の近似、

$$r_m \frac{\partial k_c}{\partial x} \Big|_{r=0} \cos \theta + r_m \frac{\partial k_c}{\partial y} \Big|_{r=0} \sin \theta \approx k_c|_{r=r_m} - k_c|_{r=0} \dots\dots\dots (24)$$

を使えば、式(23)は簡便な表示

$$\begin{aligned} \phi_s|_{r=r_m} &= -\frac{1343459+3093963i}{4357505\pi} \\ &\quad + \frac{1741191+409272i}{4357505\pi} r_m k_c|_{r=r_m} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

で置き換えることができる。

本節で述べた方法は、他の変数係数偏微分方程式にも適用可能と考えられる。

2.3 グリーン関数の数値解

前節で求めた任意水深場におけるグリーン関数の数値解の1例として、水深が岸沖方向に変化する平行等水深領域の2点 $P_1(x=30.0, y=0.0)$, $P_2(x=70.0, y=0.0)$ から単位強度で発するグリーン関数 ϕ_s について、その実数部の値を図-3に示す。図中の実線、破線はそれぞれ P_1, P_2 に特異性を持つグリーン関数に対応している。ここで位相速度 C 、水深 h は次式で与えられる。

$$C=0.1x, \quad h=\frac{C}{2\omega} \log \frac{g+\omega C}{g-\omega C}, \quad \omega=2\pi/T \dots\dots\dots (26)$$

ただし $x=0$ 付近は、通常碎波帯に相当する極浅水域であり、有意な解ではない。

従来の郭・西村(1997)の方法では、波源の直近傍に一樣水深を仮想し、この領域のHankel関数解を外側領域の放物型方程式の数値解と接合してグリーン関数を求めている。それに対し、本方法により得られるグリーン関数は、点源付近での水深変化の影響を考慮している。

次に、一樣水深場における相反定理が任意水深場において成立するかを検証する。点 P_1 より発する ϕ_s の点 P_2 での実数部の値は $-0.073(\text{m}^2/\text{s})$ 、逆に点 P_2 より発する

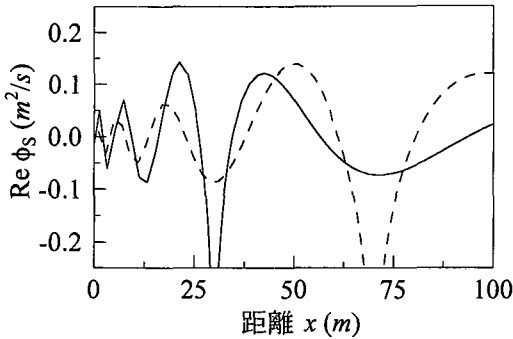


図-3 グリーン関数の実数部の値

波の点 P_1 での値は $-0.085 \text{ (m}^2/\text{s)}$ となる。同様に、虚数部の値について比較すると、それぞれ $0.013 \text{ (m}^2/\text{s)}$ 、 $0.029 \text{ (m}^2/\text{s)}$ であった。これより一般的に、任意水深場では相反定理が成立しないことが分かる。

2.4 積分方程式

グリーン関数が θ に依存する場合の、境界要素法の表式を導く。まず、式 (5) で領域 D 内の点 (x_0, y_0) を境界 Γ 上に漸近させグリーン関数を特異点まわりに積分すると、

$$\frac{1}{2}\phi(x_0, y_0) = -\int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} \left(\phi^+ \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi^+}{\partial n} \right) ds, \quad (x_0, y_0) \in \Gamma \quad (27)$$

となり、上式は境界 Γ 上での ϕ , $\partial \phi / \partial n$ の関係を与える。ここで Γ_ϵ は積分経路より特異点 (x_0, y_0) を除外するための半円経路である (図-1 参照)。また、上記の ϕ^+ は ϕ_s を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \phi^+ &= \phi_s(r, \theta) \equiv G(x, y; x_0, y_0), \\ x - x_0 &= r \cos \theta, y - y_0 = r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

と表示される。次にグリーン関数の $\vec{n}$ 方向微分を極座標表示で求めると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi^+}{\partial n} &= \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right) \cdot \vec{n}, \\ \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right) &= \frac{\partial G}{\partial r} (\cos \theta, \sin \theta) - \frac{\partial G}{r \partial \theta} (\sin \theta, -\cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

となる。仮に x 軸が境界のとき、 $\vec{n} = (0, -1)$ より

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial n} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right) \cdot \vec{n} = -\frac{\partial G}{r \partial \theta} \cos \theta \quad (\theta = 0, \pi) \quad (30)$$

となる。したがって、一般にグリーン関数が θ に依存するときには、境界上でその外向き法線方向微分が 0 とはならない。このためグリーンの公式の適用に際しては一様水深場と異なった注意を要する。

式 (5) と異なる表式で、境界 Γ 上に分布する特異点

の密度、つまり波源強度 μ を用いて解を表現するものに密度法がある。この場合も前節で導いたグリーン関数を利用することができ、

$$\phi(x, y) = \int_{\Gamma} \mu(x_0, y_0) G(x, y; x_0, y_0) ds, \quad (x, y) \in D \quad (31)$$

と置くことができる。この方程式を使って $\vec{n}$ 方向微分を求め、点 (x, y) を境界 Γ に漸近させることによって、境界上の $\partial \phi / \partial n$ と強度 μ の関係

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu(x_0, y_0) &= -\frac{\partial \phi}{\partial n}(x_0, y_0) \\ &+ \int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} \mu(x'_0, y'_0) \frac{\partial G}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (32)$$

を得る。ここで緩勾配であることを考慮すると、波源の強度はポテンシャルの勾配から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu(x_0, y_0) &\approx -\frac{\partial \phi}{\partial n}(x_0, y_0) \\ &- 2 \int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial n}(x'_0, y'_0) \frac{\partial G}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (33)$$

により算定される。式 (33) の右辺第 2 項は底面変化があるために生じる項であり、ある点での強度がその点での振幅の勾配のみでは決定されないことを示す。

3. 半無限平面における波動解

西村らの方法に従って波の場を計算する際、以下の 2 つのケース、すなわち直線境界前面の波動解から、波源強度を決定する事が重要となる。

3.1 直線境界に到達する波

x 軸に沿う直線境界 C_0 と無限遠境界 C_1 にとり囲まれている半無限領域 $D(y \geq 0)$ を考える。領域 D 内の曲線 Γ 上に分布波源 $\mu(P_1)$ が存在し、

$$\phi_1(Q) = \int_{\Gamma} \mu(P_1) G(Q; P_1) ds \quad (34)$$

となる波の場が生じている状況を考える。このとき式 (3) で、 $\phi = \phi_1(Q)$, $\phi^+ = G(Q; P)$ とすると、

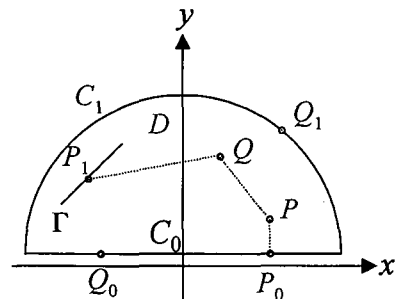


図-4 半無限平面

$$\begin{aligned} \phi_1(P) - \int_{C_0} \mu(P_1) G(P_1; P) ds \\ = \int_{C_0} \left(\phi_1(Q_0) \frac{\partial G}{\partial n}(Q_0; P) - G(Q_0; P) \frac{\partial \phi_1}{\partial n}(Q_0) \right) ds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (35)$$

となる。ここで C_1 上の周回積分は Sommerfeld の放射条件より 0 となる。また式 (35) で、点 P を境界 C_0 上の点 P_0 に近づけると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_1(P_0) = \int_{C_1} \mu(P_1) G(P_1; P_0) ds \\ + \int_{C_0-C_1} \left(\phi_1(Q_0) \frac{\partial G}{\partial n}(Q_0; P_0) \right. \\ \left. - G(Q_0; P_0) \frac{\partial \phi_1}{\partial n}(Q_0) \right) ds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

を得る。

3.2 直線境界から発する波

直線境界 C_0 から発して半無限領域 D に伝播する波 ϕ_2 は 2.4 節の議論より、密度法を用いると次のようになる。

$$\phi_2(P) = \int_{C_0} \mu(Q_0) G(P; Q_0) ds \quad \dots\dots\dots (37)$$

次に、境界 C_0 上の点 P_0 における ϕ_2 の法線方向勾配を調べるため、式 (37) の法線方向微分を取ると、

$$\frac{1}{2} \mu(P_0) = - \frac{\partial \phi_2(P_0)}{\partial n} + \int_{C_0-C_1} \mu(Q_0) \frac{\partial G}{\partial n}(P_0; Q_0) ds \quad \dots\dots\dots (38)$$

となり、このとき波源強度 $\mu(P_0)$ は、次のようになる。

$$\mu(P_0) \approx -2 \frac{\partial \phi_2(P_0)}{\partial n} - 4 \int_{C_0-C_1} \frac{\partial \phi_2(Q_0)}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial n}(P_0; Q_0) ds \quad \dots\dots\dots (39)$$

上式右辺第 2 項は、水深変化があるために生じる。

3.3 閉境界における境界条件

前節までの議論に基づいて、図-5 に示すように、 x 軸に沿って直線状の壁境界 C が存在し、これに波が入射する場合の反射波の波源強度を決定する。入射波の場を ϕ_I 、壁面による反射波の場 ϕ_R をとすると、これが重合して形成する重複波の場は $\phi_I + \phi_R$ となる。壁面で完全反射が生じている場合には、壁面に垂直な方向の振幅勾配は 0 でなければならないから、

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial \phi_R}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

となる。そこで、3.2 節の議論に基づき、 x 軸上に反射波の波源分布 $\mu_R(x)$ を想定すれば、

$$\begin{aligned} \mu_R(x) \approx -2 \frac{\partial \phi_R(x, 0)}{\partial y} \\ - 4 \int_{C_0-C_1} \frac{\partial \phi_R(x_0, 0)}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0; x_0, 0) ds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (41)$$

となる。ここで、式 (40) を考えれば波源分布 $\mu_R(x)$ は、

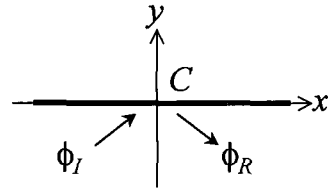


図-5 閉境界

次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mu_R(x) \approx 2 \frac{\partial \phi_I(x, 0)}{\partial y} \\ + 4 \int_{C_0-C_1} \frac{\partial \phi_I(x_0, 0)}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0; x_0, 0) ds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (42)$$

壁面で部分反射が生じる場合には、その流体力学的なメカニズムに応じて適切な境界条件を設定しなければならない。もっとも単純に、入射波に反射率 β を乗じたものが、そのまま反射すると考えれば、反射波源の強度は、

$$\begin{aligned} \mu_R(x) \approx 2\beta \frac{\partial \phi_I(x, 0)}{\partial y} \\ + 4\beta \int_{C_0-C_1} \frac{\partial \phi_I(x_0, 0)}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0; x_0, 0) ds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (43)$$

である。上式右辺第 2 項は、水深変化に伴う反射波の波源強度を与える。

4. おわりに

本研究では、まず緩勾配方程式のグリーン関数法の導出手法を示した。一様水深場における厳密解である Hankel 関数と本手法による解を比較した結果、実用上十分な精度を持つことがわかり、これより本手法の妥当性が示された。緩勾配方程式と同様に、その他様々な工学分野において重要となる変数係数偏微分方程式を解析する際、本手法は非常に有効となるであろう。

任意水深場におけるグリーン関数は、相反定理が成立しない。また一様水深場の解析で用いられている鏡像法が使えないため、一般に閉領域の境界上で、その外向き法線微分が 0 とならない。このため任意水深場における境界要素法の表記は、一様水深場の場合と比べて大きく異なる。密度法を用いた場合、波源強度はその点での振幅勾配のみでは決定されず、境界上のすべての強度が相互に影響することが示された。

参考文献

- 郭 文秀・西村仁嗣(1997): Green 関数法による任意水深水域の波浪場解析, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp. 26-30.
- Radder, A. C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, Part 1, pp. 159-176.