

半球型底設魚礁に作用する回折波力に関する研究

西田 秀紀*・野田 英明**・西平 福宏*

1. ま え が き

著者らは面構造で3次元性に優れ、網がかりの少ない半球型底設魚礁（以降、無孔半球体と略記）を提案し、これまでに魚礁の球径が入射波長に比べて小さく（小型魚礁）、魚礁の存在による波の変形が無視できる場合に支配的な波力（抗力、慣性力および揚力）の特性をモリソン式および揚力の算定式を用いて実験的に明らかにした（西田ら、1994）。今後、魚礁の球径が入射波長に比べて無視できない大型魚礁の構造設計および安定計算を行うためには、魚礁の存在による波の変形が無視できない場合に支配的な“回折波力”の特性を明らかにする必要がある。

回折波力に関する研究は、従来より数多く実施されているものの、それらのほとんどは円柱や球体（例えば、Havelock, 1954；水谷ら、1990）を対象としたものであり、本研究が対象としているような、波動場に底設された半球体に作用する回折波力の特性を理論的かつ厳密に扱った研究は非常に少ない。

一般に回折波力が支配的な場合、水の粘性、剥離渦の影響はほとんどなく、完全流体の非圧縮、非回転運動の仮定のもとで速度ポテンシャルを導入した理論的解析が可能である。そこで、本研究では底設かつ無孔の半球体による回折波の速度ポテンシャルの解析解を回折波理論より求める。ついで、回折波理論に基づいて計算される無孔半球体に作用する波力とモリソン式および揚力の算定式を用いて算定されるそれとの関係について検討を加える。最後に、水理実験により得られた結果と上述の波力を比較することにより、回折波理論の適用範囲を明らかにする。

2. 理論解析

(1) 速度ポテンシャルの誘導

図-1に示すように、一定水深 h の水域に球径 $D(=2R)$ の無孔半球体が底設されている場合を考える。無孔半球体の中心位置を、 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ とし、 x, y, z は直

角座標系とする。なお、 x 軸は入射波の進行方向に平行な水平軸、 y 軸は入射波の進行方向と直交する水平軸、 z 軸は水底を原点とし鉛直上向きを正とする鉛直軸とする。いま、この水域に入射波高 H_i 、角周波数 $\sigma(=2\pi/T, T$: 入射波の周期) の微小振幅波が入射する場合の波の変形を考える。ここでは、速度ポテンシャルの存在を仮定し、無孔半球体まわりの流体運動は線形ポテンシャル理論によって表現できるものとする。

さて、場全体の速度ポテンシャル Φ は、入射波の速度ポテンシャル $\Phi_I(=\phi_I e^{-i\sigma t})$ と回折波の速度ポテンシャル $\Phi_S(=\phi_S e^{-i\sigma t})$ の和として次式で与えられる。なお、座標系として極座標系 (r, θ, ϕ) を採用する。

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_S = (\phi_I + \phi_S) \exp(-i\sigma t) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 i : 虚数単位、 t : 時間である。

式(1)の入射波の速度ポテンシャル Φ_I は、微小振幅波理論を適用すると次式で与えられる。

$$\Phi_I(=\phi_I e^{-i\sigma t}) = -\frac{igH_i}{2\sigma} \frac{\cosh(kr \cos \theta)}{\cosh kh} \times \exp(ikr \sin \theta \cos \phi) e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 k : 波数 $(=2\pi/L)$ 、 L : 入射波の波長、 g : 重力加速度である。

回折波の速度ポテンシャル $\Phi_S(r, \theta, \phi)$ 中の ϕ_S が満たすべき基礎方程式および境界条件を、本研究では、式(3)から式(6)で与えた。

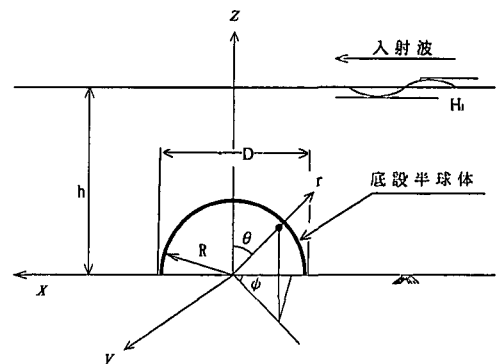


図-1 定義図

* 正会員 工博 西松建設(株)技術研究所

** 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部土木工学科

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_s}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{基礎方程式}) \cdots (3)$$

$$-\sigma^2 \phi_s + g \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{on } S_F) \cdots (4)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{on } S_B) \cdots (5)$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial r} + \frac{\partial \phi_s}{\partial r} = 0 \quad (\text{on } S_S) \cdots (6)$$

なお、式 (3) は極座標系表示されたラプラスの方程式、式 (4) は自由表面 S_F における運動学的・力学的条件、式 (5) は水底面 S_B における不透過条件、式 (6) は半球体表面 S_S における不透過条件である。

式 (3) を満足する ϕ_s の一般解は、変数分離の方法を用いることにより、次式で与えられる。すなわち、

$$\phi_s(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} (A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \cdots (7)$$

ここに、 $P_n^m(\cos \theta)$ は、第一種 Legendre の陪関数であり、次式で与えられる (例えば、寺沢, 1994)。

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} \times \sin^m \theta \left\{ \cos^{n-m} \theta - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \times \cos^{n-m-2} \theta + \cdots \right\} \quad (m=0, 1, \cdots, n) \cdots (8)$$

後は、この級数解が式 (4)、式 (5) および式 (6) の境界条件を満たすように係数 A_n^m および B_n^m を決定すればよい。

(2) 係数 A_n^m, B_n^m の決定

式 (6) を用いて係数 A_n^m および B_n^m を決定することを考える。

まず $\partial \phi_s(R, \theta, \phi)/\partial r$ および $\phi_I(R, \theta, \phi)/\partial r$ を式 (6) に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{n+1}{R} \right) (A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) = \frac{i}{2} \frac{g H_I k}{\sigma \cosh kh} g_I(\theta, \phi) \cdots (9)$$

ここに、

$$g_I(\theta, \phi) = [\cos \theta \cdot \cosh(kR \cos \theta) \cdot \exp(ikR \sin \theta \cos \phi) \times \{\tanh(kR \cos \theta) + i \tan \theta \cos \phi\}] \cdots (10)$$

さらに、式 (9) の左辺は、右辺を球面関数系で級数展開した式と $(n+1)/R$ との積で表現されていることを考

慮すると、係数 A_n^m および B_n^m は、式 (11) から式 (13) で与えられる。

$$A_n^0 = -\frac{i}{2} \frac{kg H_I}{\sigma \cosh kh} \frac{R}{n+1} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \times \int_0^{\pi} g_I(\theta, \phi) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdots (11)$$

$$A_n^m = -\frac{i}{2} \frac{kg H_I}{\sigma \cosh kh} \frac{R}{n+1} \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\phi d\phi \int_0^{\pi} g_I(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \times \sin \theta d\theta \cdots (12)$$

$$B_n^m = -\frac{i}{2} \frac{kg H_I}{\sigma \cosh kh} \frac{R}{n+1} \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\phi d\phi \int_0^{\pi} g_I(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \times \sin \theta d\theta \cdots (13)$$

結局、式 (6) の境界条件を満足する解 $\phi_s(r, \theta, \phi)$ は、上述の A_n^0, A_n^m, B_n^m を用いて次式で与えられる。

$$\phi_s(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} (A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) + C \cdots (14)$$

ここに、 C は任意の定数である。

式 (14) の任意定数 C は、式 (4) を用いて次式のように決定される。なお、式 (14) は、式 (5) の境界条件を満たしていることは容易に確認される。

$$C = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R \cos \theta}{h} \right)^{n+1} T_n^m(\phi) P_n^m(\cos \theta) - \frac{g}{\sigma^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(n+1)}{R} \left(\frac{R \cos \theta}{h} \right)^{n+2} \times T_n^m(\phi) P_n^m(\cos \theta) \cos \theta + \frac{\cos \theta}{h} \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R \cos \theta}{h} \right)^{n+1} \times T_n^m(\phi) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] \cdots (15)$$

ここに、 $T_n^m(\phi) = A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi$ 。

(3) 波力の計算と支配無次元量

無孔半球体に作用する波力 F は、 $\phi(r, \theta, \phi)$ および線形化された非定常ベルヌーイ式より求まる圧力を無孔半球体表面にわたって積分することにより算定された。

さらに、無次元波力 $F/(\rho g D^2 H_I)$ を支配する無次元量は、式 (9) より求まる係数 A_n^m および B_n^m の次元および上述の非定常ベルヌーイ式を考慮すると次式に示す関数で表現される。

$$\frac{F}{\rho g D^2 H_I} = f\left(kR, \frac{D}{h}\right) \cdots (16)$$

ただし、 $kh = 2(h/D)kR$ 、 ρ : 水の密度である。

(4) 計算条件と級数項

波力の計算条件は、 D/h を 0.25, 0.33, 0.50 の 3 種類、

H_I/h を $0.04 < H_I/h < 0.08$ の範囲で8種類変化させるとともに、 kR の値は $0.10 < kR < 1.11$ の範囲とした。

また、式(14)に示すように、級数項には無限加算が現れているが、計算は有限項までの加算値で近似せざるを得ない。そこで、本研究では2%の収束判定基準を設け、この基準を満足するまで加算し有限級数で近似した(例えば、樺木, 1991)。

3. モリソン式および揚力の算定式への適用

ここでは、 $D < L$ の場合に有用となるモリソン式および揚力の算定式を回折波の速度ポテンシャルを誘導する際に導かれた無次元量で整理することを考える。

モリソン式は、抗力項 F_D と慣性力項 F_M の和として次式で与えられる(西田ら, 1992)。

$$F = F_D + F_M \\ = \frac{1}{2} \rho C_D A u |u| + \rho C_M V \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 F :作用波力、 F_D :抗力項、 F_M :慣性力項、 u および du/dt :それぞれ無孔半球体頂点における x 方向の水粒子速度および加速度、 C_D :抗力係数、 A :波の進行方向に垂直な面への物体の投影面積、 C_M :慣性力係数、 V :無孔半球体の体積である。

まず、抗力項 F_D を微小振幅波理論より与えられる式(18)を用いて整理すると次(19)を得る。

$$\frac{2\pi}{gT^2} = \frac{1}{L} \frac{\sinh kh}{\cosh kh} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{F_D}{\rho g D^2 H_I} = \frac{\pi^2}{16} \frac{H_I}{L} C_D \frac{\cosh^2 kR}{\sinh 2kh} \\ \times \cos(kx - \sigma t) |\cos(kx - \sigma t)| \quad \dots\dots\dots (19)$$

また、慣性力項 F_M は、 F_D の場合と同様、次式のように整理される。

$$\frac{F_M}{\rho g D^2 H_I} = \frac{\pi}{12} k R C_M \frac{\cosh kR}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (20)$$

さらに、 C_D および C_M は、式(21)に示すようにK.C.数($=u_m T/D$)の関数であることを考慮すると、最終的に、モリソン式は式(22)に示す関数で表現されることがわかる。

$$C_D, C_M = f\left(\frac{u_m T}{D}\right) = f\left(\pi \frac{H_I}{h} \frac{h}{D} \frac{\cosh kR}{\sinh kh}\right) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{F}{\rho g D^2 H_I} = f\left(kR, \frac{D}{h}, \frac{H_I}{h}\right) \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 $kh=2(h/D)kR$ 、 $H_I/L=(1/\pi)(H_I/h)(h/D)kR$ 、 u_m :1周期における x 方向水粒子速度の最大値である(以降、最大値を添字 m で表す)。

一方、揚力の算定式は、次式で与えられる。

$$F_m = \frac{1}{2} \rho C_L A u_m^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 C_L :揚力係数、 F_m :1周期における波力の最大値である。モリソン式の場合と同様、上式を整理すると次式を得る。

$$\frac{F_m}{\rho g D^2 H_I} = \frac{\pi^2}{16} \frac{H_I}{L} C_L \frac{\cosh^2 kR}{\sinh 2kh} \quad \dots\dots\dots (24)$$

つまり、揚力係数 C_L もK.C.数の関数であることを考慮すると、揚力の算定式もモリソン式と同一の関数で表現されることがわかる。

4. 水理実験

水理実験は、西松建設(株)技術研究所の2次元水槽(長さ65m, 幅1.0m, 高さ1.6m, 片面は38mのガラス張り)で行われた。波力の測定は、 x , y および z 方向の波力(F_x , F_y , F_z)を同時計測した。さらに、水位変動については、無孔半球体頂点上およびその頂点より2m沖側の2地点を電気容量式波高計によって測定した。これらは、サンプリング周波数100Hzで30s計測し、3Hz以上の高周波成分を除去する数値フィルターを施した後、デジタルレコーダに収録した。なお、無孔半球体モデルとしては、プラスチック製の半球体模型を用いた。

実験条件は、半球体の球径(D)を2種類($D=15, 20$ cm)、ついで、静水深(h)を40cm, 60cmおよび80cmの3種類とし、それぞれの静水深において入射波の周期(T)を8種類($T=1.0 \sim 2.8$ s)、入射波の波高(H_I)を3種類($H_I=3.0 \sim 9.0$ cmあるいは $H_I=6.0 \sim 12.0$ cm)変化させた。

5. 結果とその考察

(1) 最大波力の特性と回折波理論の適用範囲

図-2(a)~(c)は、それぞれ $D/h=0.50, 0.33$ および 0.25 における x 方向の無次元最大波力 $F_{xm}/\rho g D^2 H_I$ と kR との関係を示したものである。図中の実線および破線は、それぞれ回折波理論より算定された無次元最大波力(F_{xm}^*)およびモリソン式中の C_M をパラメータとした場合の無次元最大波力(F_{xm}^{**})であり、シンボルは、 H_I/h をパラメータとした実験値を示している。ここでは、無次元量 H_I/h の値は、一定(0.075)とした。これらの図より、今回の計算範囲では、 kR の値が $0.2 \sim 0.3$ 付近に F_{xm}^* および F_{xm}^{**} の最大値のあること、 D/h の値の増加とともに、最大値に対する kR の値が漸増することが確認される。さらに、 F_{xm}^* と実験値を比較すると、 kR が小さい範囲の実験値にバラツキが認められるものの、両者はほぼ一致し、すべての kR に対して回折波理論が適用可能であることがわかる。なお、バラツキの原因としては、抗力成分の出現が考えられる。

図-3(a)~(c)は、それぞれ $D/h=0.50, 0.33$ および 0.25 における z 方向の無次元最大波力 $F_{zm}/\rho g D^2 H_I$ と

kR との関係を示したものである。図中には、 x 方向の場合と同様、回折波理論より算定された無次元最大波力 (F_{xm}^*) (図中の実線)、揚力の算定式中の C_L をパラメータとした場合の無次元最大波力 (F_{xm}^*) (図中の破線) および H_i/h をパラメータとした実験値が示されている。これらの図より、 F_{xm}^* の値は kR が増加するにつれて極大値をとることなく減少し、特に kR が小さい範囲 ($kR \cong 0.3$ より小さい範囲) では、 F_{xm}^* の特性は F_{xm}^* および実験値のそれと大きく異なっていることがわかる。さらに、 F_{xm}^* と F_{xm} を比較すると、すべての D/h において F_{xm}^* の値は F_{xm} より小さい値を示していることがわかる。これは底面近傍における z 方向の水粒子の運動が x 方向の水粒子運動に比べて小さいことによると考えられる。

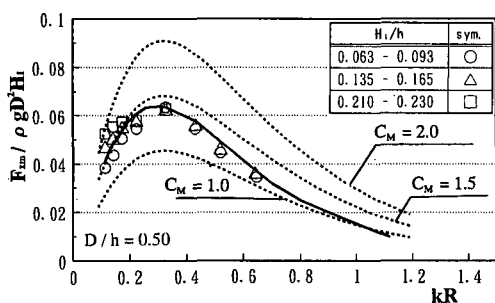
同様の特性は、Chakrabarti (1973) の研究においても報告されており、このことは本研究の妥当性を示しているものと考えられる。

以上のことを総合的に判断すれば、モリソン式を用いて無孔半球体に作用する x 方向波力を算定する場合、式に含まれる各波力係数をあらかじめ求めておく必要がある。しかしながら、回折波理論を用いればその必要がなく、直接計算することが可能であることがわかる。

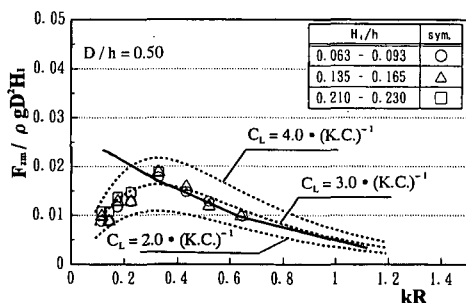
一方、 z 方向の波力については、 kR が小さい時 ($kR \cong 0.3$ より小さい範囲) 回折波理論は適用できない。

(2) 揚力係数 C_L ($kR < 0.3$ の場合)

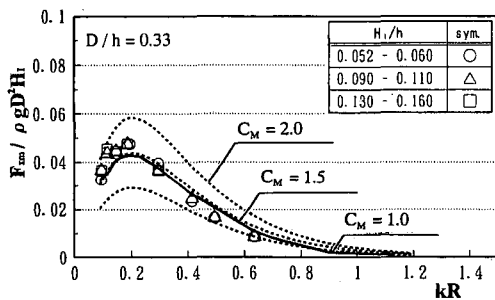
上述したように、 kR が小さい時、無孔半球体に作用する z 方向波力の算定に回折波理論は適用できず、揚力の



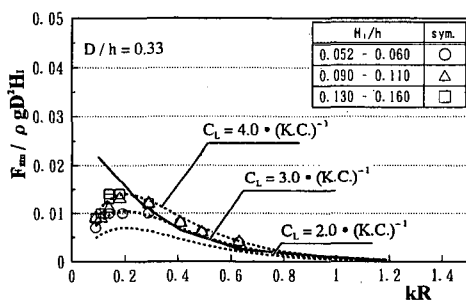
(a) $D/h=0.50$



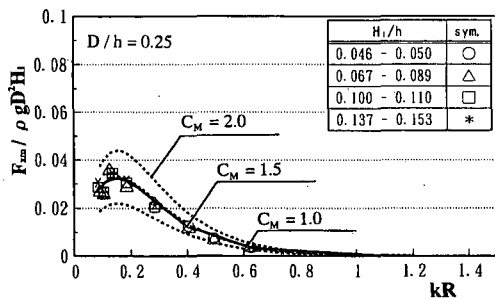
(a) $D/h=0.50$



(b) $D/h=0.33$

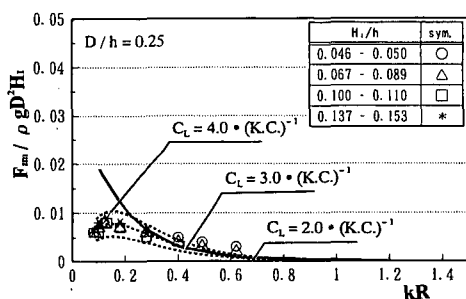


(b) $D/h=0.33$



(c) $D/h=0.25$

図-2 $F_{xm}/\rho g D^2 H_i$ と kR の関係



(c) $D/h=0.25$

図-3 $F_{zm}/\rho g D^2 H_i$ と kR の関係

算定式が有用となる。そこで、 $kR < 0.3$ の場合を対象とし、式 (23) で定義された揚力係数 C_L と K.C. 数の関係を実験結果より求めたものが次式である。式より、揚力係数 C_L は K.C. 数の増加にともなって減少することが確認される。

$$C_L = 3.22 \times (\text{K.C.})^{-0.94} \dots\dots\dots (25)$$

5. あとがき

本研究では、回折波理論に基づいた解析解を求め、無孔半球体に作用する回折波力の特性について検討を加えた。得られた結果を要約すると以下のとおりである。

(1) 無孔半球体に作用する無次元最大波力は、無次元量 kR および D/h に支配される。さらに、 $D < L$ の場合に適用されるモリソン式および揚力の算定式は、 kR , D/h および H_I/h で表現される。

(2) すべての D/h において、 kR で整理された x 方向の無次元最大波力 $F/\rho g D^2 H_I$ の特性は、 C_M をパラメータとしたモリソン式を用いて算定された $F/\rho g D^2 H_I$ の特性と類似している。

(3) 無孔半球体に作用する水平方向波力は、今回の

計算範囲では、すべての kR に対して回折波理論を用いて算定可能であるが、鉛直方向波力については kR が小さい時算定できない。

参考文献

- 榎木 亨 (1991): 波と漂砂と構造物, 技報堂出版, pp. 58-62.
 寺沢寛一 (1994): 自然科学者のための数学概論, 岩波書店, pp. 399-433.
 西田秀紀・多田彰秀・水野 晋・西平福宏 (1992): 半球型底設魚礁に作用する波力に関する実験的研究—群体魚礁相互の干渉効果について—, 海岸工学論文集, 第 39 巻, 土木学会, pp. 746-750.
 西田秀紀・多田彰秀・西平福宏・野田英明 (1994): 半球型底設魚礁に作用する流体力に関する実験的研究—波動場, 流れ場および共存場に適用可能な波力係数に関する経験式—, 海岸工学論文集, 第 41 巻, 土木学会, pp. 871-875.
 水谷法美・岩田好一郎・松岡滋治 (1990): 球体構造物に作用する回折波力, 海岸工学論文集, 第 37 巻, pp. 679-683.
 Chakrabarti, S. K (1973): Wave force on submerged objects of symmetry, Proc. ASCE, Vol. 99, No. WW2, pp. 147-164.
 Havelock, T. H. (1950): The wave forces on a submerged body moving under waves, Quart. Trans. of Naval Arch., January and in The Collected Paper of Sir Thomas Havelock on Hydrodynamics, ONR/ACR-103, pp. 590-596.