

高レイノルズ数領域における円柱周辺振動流場の数値解析

石田 啓*・由比政年**・平川真史***

1. 序 論

円柱周辺の2次元振動流場の流況や流体力は、2つの無次元パラメータ、レイノルズ数およびクーリガン・カーペンター数(KC数)により特徴づけられる。レイノルズ数が非常に小さい場合を除けば、円柱からの剥離が周辺の流況や流体力特性に対して大きな影響を及ぼすが、振動流中の円柱の剥離点は時間的に変動するため、理論的な取り扱いは、いくつかの場合を除いては極めて困難となる。これに対し円柱周辺の振動流場に関する実験的研究は広く進められており、円柱からの渦の放出や周辺の流況の変化および抗力、揚力といった流体力の特性とレイノルズ数およびKC数の関連が明らかにされてきた(たとえば、Williamson, 1985; Obasaju, 1988 など)。

一方、近年の数値流体力学の発展に伴い、Navier-Stokes 方程式を数値的に解いて、円柱周辺の振動流場に対する流体力学的な検討を行うことが可能となり、差分法やスペクトル法を用いた検討が行われてきた(たとえば、Baba ら, 1987; Justesen, 1991; Badr, 1995; 佐藤ら, 1996)。しかしながら、従来の解析は中程度までのレイノルズ数領域を対象としたものが多く、高レイノルズ数領域での検討例は、決して十分とはいえない。

これに関し、石田・由比(1996)は、一般曲線座標系に変換された Navier-Stokes 方程式を高次精度の風上差分スキーム(Kawamura ら, 1986)を用いて解き、 $KC=4$, $Re=3000$ の場合に対して、信頼性の高い解析結果を得ている。本研究では、この手法をさらに発展させ、 $5 \leq KC \leq 10$ の範囲の KC 数領域、かつ、 $10^3 \sim 10^5$ 程度の高レイノルズ数領域の円柱周りの振動流場を対象として、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の数値解析を行う。以下では、数値解析結果と従来の実験結果とを比較することにより、計算手法の有効性を検証するとともに、渦放出と流体力の関連やレイノルズ数および KC 数による流況の変化に関する検討を行う。

2. 解析の手法

2.1 基礎方程式

解析に用いた基礎方程式は、2次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式および連続式を無次元化したものである。この基礎方程式系に対して、MAC 法(Harlow ら, 1965)による数値解析を行う。ここでは、その概略を説明する。なお、解析手法の詳細に関しては、前報(石田・由比, 1996)を参照されたい。

高レイノルズ数の流体場においては、物体の壁面近傍に大きな速度勾配が生じる。このため、物体の形状を正確に表現し、境界条件を精度良く与えることが重要となる。このような場合には、物体表面に沿った座標系すなわち境界適合座標系を用いて解析を行うことが有効である。この点を考慮し、基礎方程式を、次に示すような一般曲線座標系に変換して以下の解析を行う。

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t \quad \cdots \cdots (1)$$

変換された基礎方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} u_\tau + [(u-x_\tau)y_\eta - (v-y_\tau)x_\eta]u_\xi/J + [(v-y_\tau)x_\xi \\ - (u-x_\tau)y_\xi]u_\eta/J \\ = -(y_\eta p_\xi - y_\xi p_\eta)/J + \bar{\Delta}u/Re \quad \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\tau + [(u-x_\tau)y_\eta - (v-y_\tau)x_\eta]v_\xi/J + [(v-y_\tau)x_\xi \\ - (u-x_\tau)y_\xi]v_\eta/J \\ = -(x_\eta p_\eta - x_\eta p_\xi)/J + \bar{\Delta}v/Re \quad \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}p = -[(y_\eta u_\xi - y_\xi u_\eta)^2 + 2(x_\xi u_\eta - x_\eta u_\xi) \\ \cdot (y_\eta v_\xi - y_\xi v_\eta) + (x_\xi v_\eta - x_\eta v_\xi)^2]/J^2 \\ + (y_\eta u_\xi - y_\xi u_\eta + x_\xi v_\eta - x_\eta v_\xi)/(J\Delta t) \quad \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

ここに、 (u, v) は速度、 p は圧力、 Re はレイノルズ数である。また、下付き添え字は偏微分を表す。 $\bar{\Delta}$ は一般曲線座標系での Laplace 演算子であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}A = (\alpha A_{\xi\xi} - 2\beta A_{\xi\eta} + \gamma A_{\eta\eta})/J^2 \\ + [(ax_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})(y_\xi A_\eta - y_\eta A_\xi) \\ + (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})(x_\eta A_\xi - x_\xi A_\eta)]/J^3 \quad \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

ただし、 J, α, β, γ は、次式で定義される。

$$\begin{aligned} J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \quad \alpha = x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

先に示した式(4)は、圧力に対する Poisson 方程式であり、運動方程式の発散を取るにより得られる。

* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科
 ** 正会員 工修 金沢大学助手 工学部土木建設工学科
 *** 金沢大学大学院工学研究科

MAC 法では、連続式の代わりに、圧力に対する Poisson 方程式と運動方程式を組み合わせる (Harlow ら, 1965)。

2.2 基礎方程式の差分化

数値的な安定性を良くするために、式 (2) および式 (3) を時間積分する際には、陰的な Euler スキーム (時間 1 次精度) を用いた。また、空間的な差分化においては、式 (2) および式 (3) の対流項以外はすべて 2 次精度の中心差分を用いた。

ここで、対流項の差分化に関して説明を加える。Navier-Stokes 方程式の中の非線形項すなわち対流項は、流れ場の中の変動から、より高周波の変動を生成する。レイノルズ数が低く、粘性の作用が強い場合には、物理的な粘性が、この高周波の変動を抑える働きをするため、安定に数値解析を進めることができる。一方、高レイノルズ数領域においては、物理的な粘性の働きは弱く、流れ場の内部に次々と高周波成分が生み出される。こうして発生した細かい変動が、計算に用いられる格子の解像度を超えると、エリアシングエラーが発生し、計算は不安定となる (非線形不安定)。このため、高レイノルズ数流体場の数値解析を成功させるには、非線形項から生まれる高周波成分をいかに抑えるかが重要となる。

この問題を解決するために、通常、 $k-\varepsilon$ 系の乱流モデルや LES (Large Eddy Simulation) モデルが良く用いられる。これに対し、対流項に高次精度の風上差分を用いる方法も高レイノルズ数流れの数値解析に有効であることが知られている (Kawamura ら, 1986)。本論文では、乱流モデルは用いず、高次精度 (3 次精度) の風上差分を用いて、高レイノルズ数領域の流体場の数値解析を行う。

風上差分法は、元来、物理的な情報の伝播方向を考慮して、差分化に用いる格子点のステンシルを使い分ける手法として考案されたものであるが、見方を変え、高次精度の中心差分項に数値粘性項を付加したものとして解釈することもできる。たとえば、式 (2) の対流項に対する 3 次精度の風上差分近似として、次のような表現が可能である。

$$\left(g \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{i,j} \approx g_{i,j} \frac{-u_{i+2,j} + 8(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + u_{i-2,j}}{12\Delta\xi} + \alpha |g_{i,j}| \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{12\Delta\xi} \left\{ \begin{array}{l} g = \frac{(u - x_r)y_r - (v - y_r)x_r}{J} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、右辺の第 1 項は、4 次精度の中心差分式であり、右辺第 2 項が、数値粘性項である。風上差分法においては、この数値粘性項が高周波の成分を取り除く働きをす

るため、高レイノルズ数領域でも安定に計算を進めることができる。なお、式 (7) で、 $\alpha=1/3$ とすると、QUICK-ER スキーム (Leonard, 1979) が、また、 $\alpha=3$ とすると、河村・桑原スキーム (Kawamura ら, 1986) が得られる。本論文では、 $\alpha=3$ として対流項の差分化を行った。

以上述べたような方法で式 (2)～式 (4) を差分化した式が、数値計算上の基礎方程式となる。この差分方程式を SOR 法を用いて解き、流体場の時間発展の計算を行う。なお、計算格子には物理量の評価点と差分格子点が一一致する通常格子 (regular mesh) を用いている。

3. 解析結果および考察

3.1 円柱周辺の一様流場の解析

まず、今回用いた数値スキームが高レイノルズ数領域の非定常計算に対して有効であることを検証するために、静止流体中で急発進する円柱まわりの流れ場の解析を行った。なお、流れ場の代表長さとして円柱の直径を、代表速度として円柱の移動速度をそれぞれ用いている。

解析にあたっては、円柱の表面に適合した座標系を取り、円柱の周方向に θ 軸、円柱の半径方向に r 軸をとった。使用した格子点数は 94×102 点であり、計算領域の全体長は、半径方向に円柱直径の約 60 倍とした。計算格子の作成法には、代数的手法を利用し、周方向の格子間隔は等間隔、半径方向の格子間隔は、円柱の近傍では格子点が密に、遠方では格子点が疎となるように Vinokur (1983) の方法を用いて調整した。なお、半径方向の最小の格子幅 ($\Delta r_{\min}$) は、式 (8) により設定し (藤井, 1994)、境界層の内部に数点の格子点が入るようにしている。

$$\Delta r_{\min} = \frac{0.1}{\sqrt{Re}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

計算に用いた時間刻みは、 $\Delta t=0.001$ である。

初期条件としては、静止流体場を考え、 $t=0$ から、円柱を瞬間的に発進させた。一方、境界条件としては、外部境界では外挿により速度および圧力を決定した。また、円柱表面上では、速度を滑りなしの条件で与え、圧力は、外挿により決定した (石田・由比, 1996)。円柱後方の x 軸上の境界では、周期境界条件を用いた。これらの条件の下に解析を行った結果を以下に示す。

図-1 および図-2 は、レイノルズ数が、5000 および 9500 の場合の円柱近傍での流線の時間変化を示している。これらの図では、円柱後方の後流渦が成長していく様子が明確にとらえられている。なお、図中の下段が今回の数値解析から得られた流線図であり、上段は、Bouard ら (1980) による実験結果である。高レイノルズ数領域における円柱の急発進流れでは、最初に発達する大きな渦に加え、円柱後方に第 2、第 3 の後流渦が成長していく。今回の数値結果は、この過程を良く捕らえて

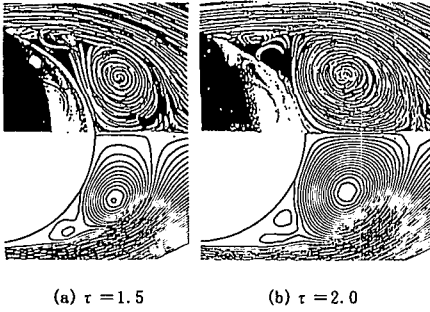


図-1 円柱近傍の流線の時間変化 ($Re=5000$)
(上段: 実験結果 (Bouard ら (1980)), 下段: 計算結果)

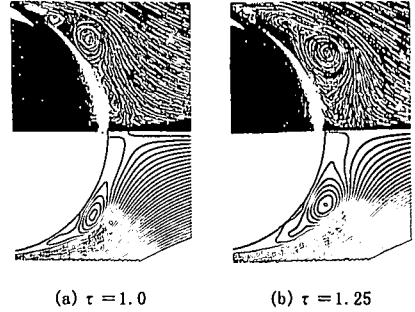


図-2 円柱近傍の流線の時間変化 ($Re=9500$)
(上段: 実験結果 (Bouard ら (1980)), 下段: 計算結果)

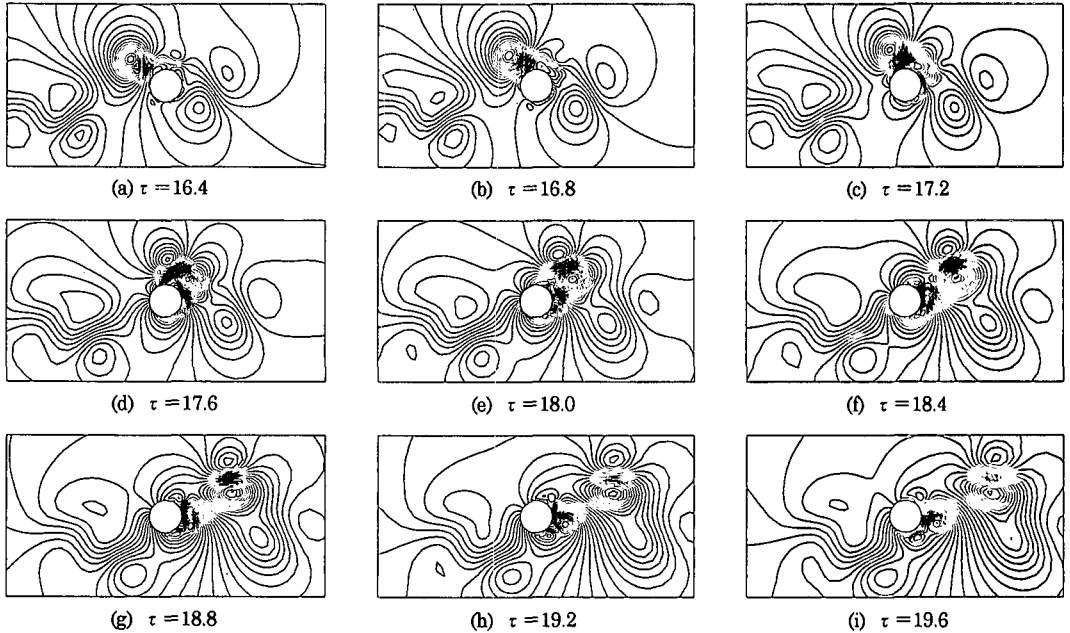


図-3 円柱近傍の流線の時間変化 ($Re=10000$, $KC=8$, 第3周期目前半)

おり, Bouard ら (1980) による実験結果とも, 非常に良く一致している. さらに, 後流域の速度分布や渦の中心位置等に関しても実験結果との比較を行ったところ, 解析結果と実験結果の間には, 良好な一致が見られた.

3.2 円柱周辺の振動流場の解析

次に, 静止流体中で単振動を行う円柱の周りの流体場の解析を行った. ここで, 流れ場の代表長さとしては, 円柱の直径をとり, 代表速度としては, 円柱の移動速度の最大値をとった. なお, この計算で用いた格子点は, 94×102 点であり, 計算領域の半径方向の全長は円柱直径の 20 倍とした. また, 半径方向の最小格子幅は, 式 (8) に基づいて決定した. 計算に用いられた時間刻みの値は, 0.002 である.

以下では, $5 \leq KC \leq 10$, $Re=10^3 \sim 10^5$ の範囲で, 円柱を

正弦単振動させた場合の解析結果を示す. なお, 流体場の上下非対称性の発現を容易にするために, 計算の初期の段階で円柱に上下方向の弱い振動を加えている.

図-3(a)~(i) は, $Re=10^4$, $KC=8$ の場合の, 円柱近傍での流線の時間変化を示したものであり, 第3周期目の前半の半周期分に相当する. なお, $\tau=16$ で, 円柱は振動の右端に位置し, $\tau=18$ まで, 加速しながら左側へと移動する. $\tau=18$ で最大の移動速度に達した後は, 円柱は徐々に減速しながらもさらに左側へと移動を続け, $\tau=20$ で速度ゼロとなり振動の左端に到達する. 図-3 に対応した時点での, 流体力の時間変化図を図-4 に示す.

図-3 より, 流れ場の上下非対称性が強いことが明確であるが, これを反映して, 円柱には水平方向の流体力と同程度の大きさの揚力が作用していることが, 図-4

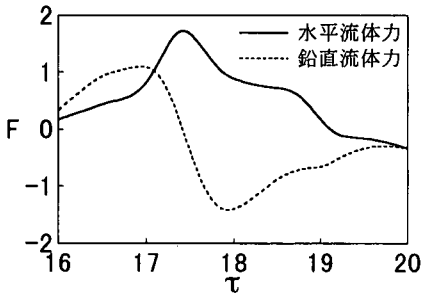


図-4 流体力の時間変化 ($Re=10000$, $KC=8$)
(第3周期目前半)

よりわかる。ここでの揚力の変動周期は、円柱の振動周期の約2分の1であり、Williamson (1985) の実験で見られた結果とほぼ一致している。図-3(a)~(e) に示される円柱の加速時には、円柱の上下から新たな渦が発達を続けるとともに、前の周期に生成された渦が、新たに生成された渦の上部へと回り込んでいく様子が良く捉えられている。一方、円柱の減速時には、円柱の上下から渦の放出が行われ、放出された渦は、それ以前に放出された渦と相互作用をしながら、より大きな渦へと成長していく。この時、円柱の下方から放出された渦も、円柱の上部方向へ向けて移動している。なお、図-4において、 $\tau=18$ 付近で水平方向の流体力変化の傾向が、 $\tau=19$ 付近で揚力変化の傾向が、それぞれ変化しているのは、円柱の上部および下部からの渦の放出(離脱)と関連していることが、図-3 との対応から確認できる。

次に、図-3 の場合よりも、レイノルズ数を小さく、 KC 数を大きくした場合の解析結果を示す。図-5(a)~(f) は、 $Re=5000$, $KC=10$ の場合の円柱近傍の流線の時間変化図であり、第3周期目の前半(円柱が左側へと移動する位相)に相当する。図-3 の場合と比較して、個々の渦

径が大きくなり、渦群の存在領域も広い範囲に渡っていることがわかる。また、円柱の振動方向に対する渦列の角度も変化している。

逆に、図-3 の場合よりも、レイノルズ数を大きく、 KC 数を小さくした場合の解析結果を示す。図-6(a)~(f) は、 $Re=10^5$, $KC=5$ の場合の円柱近傍の流線の時間変化図であり、第3周期目の前半(円柱が左側へと移動する位相)に相当する。なお、この時の格子点数は、半径方向に82点、周方向に184点としている。先の2つの場合と比較して、渦群の存在領域が円柱の近傍に限定されており、流れ場は上下対称に近い形となっていることがわかる。

4. 結 論

高レイノルズ数領域の円柱周辺の流体場に対して、2次元非圧縮性の Navier-Stokes 方程式を一般曲線座標系に変換して数値解析を行った。数値スキームの検証を目的に行われた、円柱まわりの急発達流れの解析においては、後流渦の成長過程に関して、従来の実験結果と非常に良い一致が確認され、高レイノルズ数領域の非定常計算に対する数値スキームの有効性を確認することができた。次に、静止流体中の円柱の振動に伴う流体場の変化の解析を、 $Re=10^3 \sim 10^5$, $5 \leq KC \leq 10$ の範囲で行い、高レイノルズ数領域での数値解析を安定に進めることに成功した。レイノルズ数および KC 数と流況の関連は、解析結果と従来の実験結果とで良く整合する。また、流体力の時間変化とその周辺の流況の時間変化との関連を検討することにより、剥離渦の生成、放出と、円柱の受ける流体力の変動との関連をとらえることができた。

今後の課題の1つとして、多方向不規則振動流場への拡張をあげることができる。今回の解析では、振動流場の第3周期目までを対象としたが、不規則な振動流場に

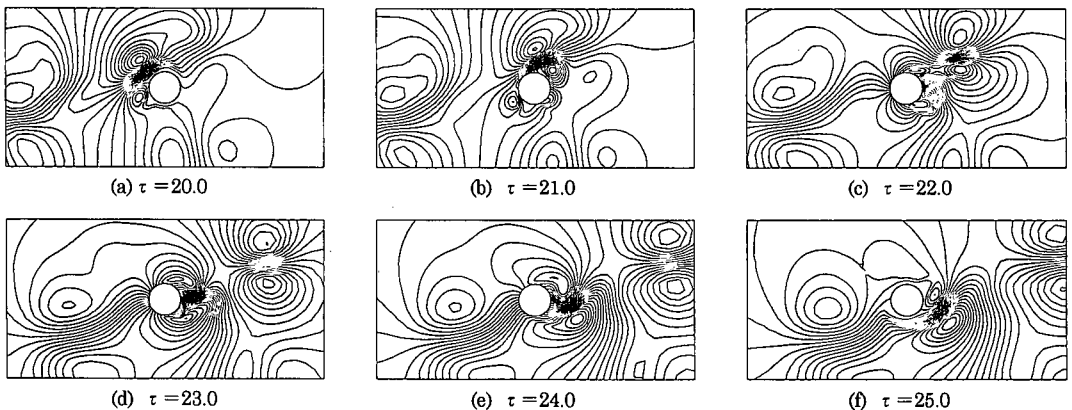
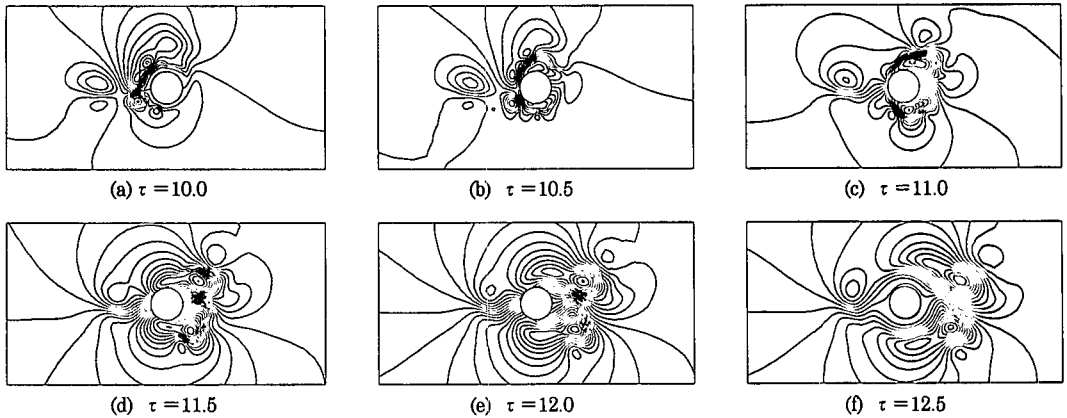


図-5 円柱近傍の流線の時間変化 ($Re=5000$, $KC=10$, 第3周期目前半)



図—6 円柱近傍の流線の時間変化 ($Re=100000$, $KC=5$, 第3周期目前半)

対して有意な結果を得るには、より多くの周期に渡って解析を行う必要がある。今回の解析では、時間ステップ数が大きくなるにつれて、1ステップあたりの計算時間が長くなる傾向が見られたが、より長い周期に渡って、効率良く解析を行うには、今回の手法を更に改良し、時間積分の精度を向上させることが必要となる。この点を考慮し、時間積分にCrank-Nicolson法を採用した解析を現在検討中である。また、多方向の振動流場の解析に向けては、Kuwahara (1996)の提案している多方向の風上差分を取り入れるなどして、解析を進めていく予定である。

参 考 文 献

- 石田 啓, 由比政年 (1996): 一般曲線座標系表示の Navier-Stokes 方程式を用いた円柱周辺流体場の数値解析, 海岸工学論文集, 第43巻, pp. 916-920.
- 佐藤幸雄, 渡部靖憲 (1996): 水平振動流中の円柱の表面に剝離を伴う場合の流体力について, 海岸工学論文集, 第43巻, pp. 911-915.
- 藤井孝蔵 (1994): 流体力学の数値計算法, 234 p., 東京大学出版会.
- Baba, N. and H. Miyata (1987): Higher-order accurate difference solutions of vortex generation from a circular cylinder in an oscillatory flow, J. Comp. Phys., Vol. 69, pp. 362-396.
- Badr, H. M., S. C. R. Dennis, S. Kocabiyik and P. Nguyen (1995): Viscous oscillatory flow about a circular cylinder at small to moderate Strouhal number, J. Fluid Mech., Vol. 303, pp. 215-232.
- Bouard, R. and Coutanceau, M. (1980): The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40 < Re < 104$, J. Fluid Mech., Vol. 101, pp. 583-607.
- Harlow, F. H. and J. E. Welch. (1965): Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Physics of Fluids., Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189.
- Justesen, P. (1991): A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol. 222, pp. 157-196.
- Kawamura, T., H. Takami and K. Kuwahara (1986): Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness, Fluid Dynamics Research Vol. 1, pp. 145-162.
- Kuwahara, K. (1996): Computational study of incompressible flow by finite-difference method, Proceedings of the 14th NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics, pp. 289-293.
- Leonard, B. P. (1979): A stable and accurate convecting modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 19, pp. 59-98.
- Obasaju, E. D., P. W. Bearman, and J. M. R. Graham, (1988): A study of forces, circulation and vortex patterns around a circular cylinder in oscillating flow, J. Fluid Mech., Vol. 196, pp. 467-494.
- Vinokur, M. (1983): On one-dimensional stretching function for finite difference calculation, J. Comp. Phys., Vol. 50, No. 2, pp. 215-234.
- Williamson, C. H. K. (1985): Sinusoidal flow relative to circular cylinders, J. Fluid Mech., Vol. 155, pp. 141-174.