

屈折現象に注目した津波数値計算の精度

李 昊俊*・今村文彦**・首藤伸夫***

1. はじめに

現在、津波数値計算において空間格子寸法を定めるに当たり、津波波形の分解能からする選定基準 (Shuto, 1991) はあるものの、地形を考慮した基準は未だ確立していない。しかし、対象地形に応じた適切な離散化間隔の選定が非常に重要であることは過去の例が示している。安政津波 (1854) の下田港や御前崎、あるいは昭和三陸津波 (1933) の越喜来湾崎浜などでは、差分格子が粗いため陸棚で浅い屈折を十分表現できず、津波集中度が過小であったり、その出現の場所が違ったりすることが報告されている (佐山ら, 1986)。また、1993 年北海道南西沖地震津波の奥尻島の例などでは、島回りのエネルギー捕捉が重要であり (藤間・後藤, 1994)、浅海域での屈折現象を適切に表現できないと、沿岸での波高分布に大きな差が生ずることが示されている。

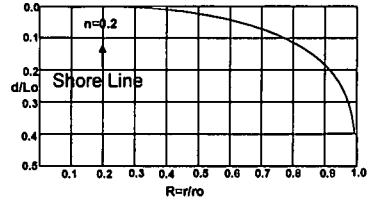
津波屈折計算の精度について、佐山ら (1986) は波向線の離散化誤差に注目し、海底勾配と入射角との関連において波向線到達位置の誤差を議論したが、その結果波高に生ずる誤差については考えていなかった。一方、島周りの津波に関し、Liu ら (1994) や藤間ら (1995) は水理及び数値実験を行い、波長に対する島の寸法が小さくなるにつれ計算精度が低下することを指摘した。しかし、これらの議論も円錐形の島に限定され、現実の複雑な地形を持つ場合には当てはめられない。

本研究では、始め円錐形の島での屈折計算の基本問題を整理し、任意の形状を扱える方法に拡張を試みる。次に、佐山ら (1986) による波向線法を拡張して波向きや波向線幅に関する誤差の検討を行い、所要の精度を得るための計算条件について議論する。

2. 円錐形島周りでの屈折計算の精度

2.1 理論解析

まず、屈折現象の影響が最も大きいと思われる島回りの伝播問題に関して検討を行う。島および周辺の海底地

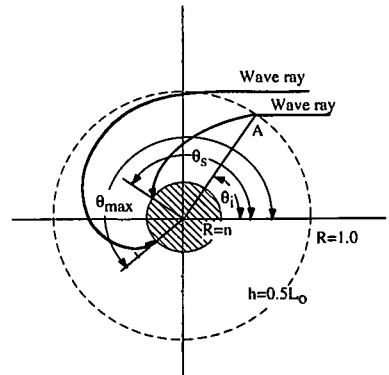


図一 対象地形の断面

形を円錐状の関数に仮定すれば、変数分離法による Arthur (1946) の理論的手法が適用でき、得られる解析解と波向線法による数値解とを比較することにより、空間格子寸法による波向線や屈折係数の誤差を評価できる。

Arthur (1946) によれば、図一のような地形に対し、波向線が島の汀線上の到達する地点の角度 θ_s を次のように得ることが出来る。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i < \sin^{-1}(1-n), \\ \theta_s &= [-1/\sqrt{(1-n)^2 \csc^2 \theta_i - 1}] \\ &\quad \times \ln \frac{n[(\csc \theta_i) \sqrt{(1-n)^2 \csc^2 \theta_i - 1} + (1-n) \csc^2 \theta_i]}{\cot \theta_i \sqrt{(1-n)^2 \csc^2 \theta_i - 1} + (1-n) \csc^2 \theta_i - 1} \\ \theta_i &> \sin^{-1}(1-n), \\ \theta_s &= [1/\sqrt{1 - (1-n)^2 \csc^2 \theta_i}] [\sin^{-1}[(1-n) \csc \theta_i] \\ &\quad - \sin^{-1}[(1-n) \csc^2 \theta_i - 1]/n \csc \theta_i] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$



図二 変数の定義

* 学生会員 工修 東北大学大学院 工学研究科
** 正 会 員 工博 東北大学助教授 工学部災害制御研究センター
*** 正 会 員 工博 東北大学教授 工学部災害制御研究センター

ここで、伝播速度 C は $C/C_0 = (R-n)/(1-n)$, $0 < n < 1$ で表される。式中の各変数は図-2 にその定義を示す。

2.2 数 値 解

2次元直交座標系 (xy 座標) での長波屈折計算には、以下の式で示される波向線方程式が一般に用いられる。

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{C} \left[\sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right] \frac{\partial C}{\partial h} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 θ は波伝播方向角、 s は波向線に沿って測った距離、 C は水深の関数として決まる伝播速度である。これを中央差分を用いて離散化する。丸山・鹿島 (1983) は、波向線の軌跡を求める場合には水深の1次微分項を、屈折係数まで求めるときには2次の微分項 (水深の曲率) まで考慮する必要があると指摘して、16個の格子点上の水深値から近似曲線を求めて、計算に使う水深を定めている。しかし、本研究では、この方法と使用点数を8点とした方法とを比較したが、その結果には差が見られなかったために、格子点数を減らした後者の方法を採用している。

2.3 比較結果

計算条件及び誤差の定義を図-3 に示す。波向線は入射点から出発し島に向かい螺旋状になる。その際、数値解では離散化された地形の不連続性のために屈折率が小さくなり、解析解との誤差が大きくなる傾向を示す。以下に、到達位置と屈折係数の誤差を調べる。なお、図で見るように、島は上下対象であるから、入射点は上半分だけとする。それでも島を回り込んだ波向線到達位置は角度で表して210度以上になりうる。

(1) 波向線の到達誤差

これは波向線軌跡に関する誤差であり、出発点から島に到達するまで波向き角の誤差が累積され、汀線での波向線到達位置に差が生ずるのである。この差を理論解に対する百分率として、計算格子間隔毎に求め、図-4 に示す。縦軸が誤差、横軸が理論より得られる汀線上の波向線到達の位置であり、パラメータとして計算格子数 (島の直径に対する) を用いてある。図より、島の前面 ($\theta < 90$) では、粗い格子間隔でも比較的誤差は小さいが、島の背面 ($\theta > 240$) の場合には、格子間隔を増やしても誤差を低下させることは難しいことが分かる。これは、島

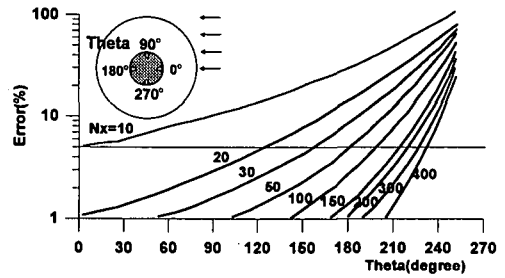


図-4 波向線の到達誤差

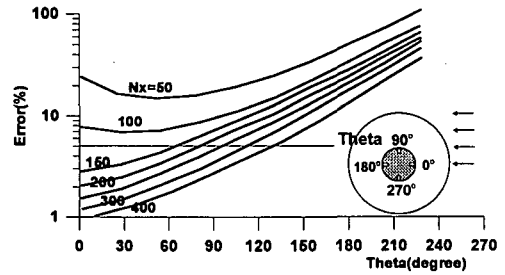


図-5 屈折係数の誤差

への入射角度が大きくなると屈折率が増加し、進入するにつれて累積誤差が増加し易くなるためである。今、汀線位置が240度より小さい場合に、誤差を5%以内に抑えるためには、150個程の格子が必要であることが分かる。

(2) 屈折係数の精度

津波波高には、波向線間隔の変化で表される屈折係数が効く。波向線到達位置の精度と同様に、理論解に対する誤差を調べると図-5 のようになる。同じ離散化間隔をとっても、波向線到達位置と比べて誤差が大きいたことが分かる。特に θ が150度以上の場合には400分割しても誤差が10%以上になる。この理由として、島の背面では屈折係数が小さくなり相対誤差が大きくなること、次に、島へ到達する際に生じる波向線の位置の誤差よりも、隣での波向線入射角の違いによる相対位置の違いの方が大きいことが考えられる。従って、佐山ら (1986) が行ったような、波向線到達位置 (軌跡) だけでは、波高の評価が十分出来ないことが分かる。

3. 任意形状の島周りの場合

3.1 写像関数を用いた拡張

実際の島の形状は、図-1 にあるような円錐形であるとは限らない。任意の形状を対象とすると、Arthur (1946) が示したような解析解を得ることは出来なくなる。理論解が存在しない限り、計算格子間隔を変化させてその差を議論しても精度の評価にはならない。そこで、離散化はしても解の精度が高い差分式を扱う必要が出て

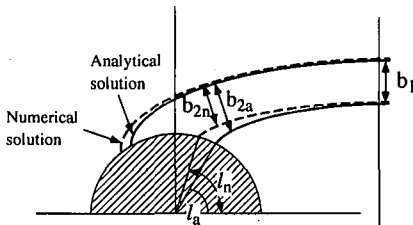


図-3 計算条件及び誤差の定義

くる。(2)式の中では、最も屈折精度に影響するのは波速を通じて表現されている水深勾配の項であるので、これを離散化をせずに解析的に扱えば、差分式はに関する一階微分だけになり、高精度な数値計算が可能となる。こうして得られる解を解析近似解と呼ぶ事とする。

今、地形分布に解析関数を導入して、水深勾配を解析的に表現する。ただし、複雑な地形を解析関数で表示するには工夫が必要であり、ここでは対象地形に1次写像を施し、海岸線の曲率を任意に変化させる方法をとる。例えば、楕円形のお底地形は

$$h(x, y) = ax^2 + by^2 \dots \dots \dots (3)$$

で与えることが出来るが、ここで、変数 x を変換し y 方向に島を曲げると (4) 式のように変形される。

$$h(x, y) = a(x-c)^2 + by^2 + c \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 a, b, c, d はの関数として変化する係数である。 y 軸方向の曲げは、式 (4) 中で $(x-c)$ となっている係数 c を関数 $c = (c \cos y, \sin y, \tan y)$ のように、 y の三角関数とすれば表現できる。ここで、 $\cos$ 関数は x 軸に対称な曲げを、 $\tan$ および $\sin$ 関数は非対称な曲げを作り出すものである。以上の操作で、任意の島及び周辺の海底地形分布を変形することが可能である。さらに、海底勾配の変化に対応するため、 $d = d(x, y)$ として与える。下に凸や逆に上に凸のお底地形を作るには、ここでも三角関数を用いればよい。

以上の方法を、北海道奥尻島周辺に適用すると、図-6 のようになり、水深の関数は

$$\begin{aligned} h(x, y) = & 0.3 \left\{ \left[\frac{x}{L} h_0 + 0.15 \left(100 \frac{y}{L} - 20 \right) \tan 30^\circ \right] \right. \\ & \times 1.3 \cos \left[0.9 \left(100 \frac{y}{L} - 20 \right) \right] \Bigg\}^2 \\ & + 0.1 \left[\left(100 \frac{y}{L} + 30 \right) \frac{h_0}{100} \right]^2 + \left| 30 \frac{x}{L} \right| \cos \left(90 \frac{x}{L} \right), \\ & h_0 = 20 \text{ m}, L = 1000 \text{ m} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

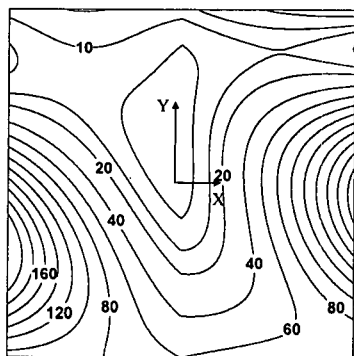


図-6 水深関数による奥尻島周辺の地形

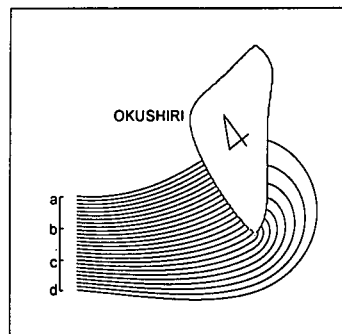


図-7 奥尻島周辺での津波の屈折

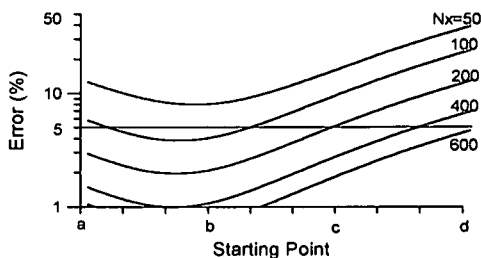


図-8 奥尻島周辺での屈折計算誤差

で与えられる。

3.2 数値解との比較

解析近似解による結果の一例を図-7に示す。入射角が25度で島の下部へ伝播する例である。この海底地形は奥尻島を念頭に置き、島南部に、現地では奥尻海脚と呼ばれる、浅瀬が突き出すように続いている。北海道南西沖地震津波を想定して、津波が左側から回り込むものと設定している。

解析近似解の結果と、数値計算の結果を図-8に比較して示す。縦軸は波向線の長さに関して解析近似解に対する離散解の相対誤差を、横軸は波向線の出発位置を示している。島を回り込む量が少ない a 付近の波向線の誤差は小さく、島の裏に回り込むような d の誤差は大きいことが分かる。このように波向線と島の位置関係により屈折が変わり誤差も変化するから、その評価は一律には決められない。ただし、対象とする場所と波向きを決めれば、本手法により所要の精度を満足するために必要な分割数 (格子間隔) を本方法で求めることが出来る。

4. 一様勾配上での屈折計算の精度

4.1 佐山ら (1986) の方法の拡張

図-9にあるような一様斜面上に、ある角度で入射した津波は屈折現象により波向きを変化しながら汀線へ到達する。このような場合に、斜面を有限格子に分割すると、一つの格子上では水深が一定となるため屈折が起こり難

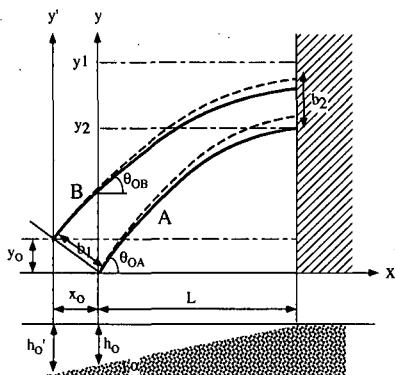


図-9 一樣斜面勾配での津波屈折計算条件

くなり、沿岸への到達位置が変化する。この点に注目して、佐山ら (1986) は屈折計算精度の評価を行った。

本研究では、図-9 中にあるように、やや佐山らと異なる条件で波向線間隔の変化を追跡する。対象とする斜面上の y 軸に到達する以前において、既に同一でない入射角を持つ二本の波向線を取り上げる。その y 座標をそれぞれ y_1, y_2 とすると、Snell の法則を用いて、連続的な斜面上 (勾配 α) の汀線での位置を表す解析解は、

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{h_0}{\alpha \sin^2 \theta_{OA}} \{ \theta_{OA} - \sin^{-1} \{ \beta_A \sin \theta_{OA} \} \\ &\quad - \frac{h_0}{\alpha \sin \theta_{OA}} (\cos \theta_{OA} - \beta_A \sqrt{1 - \beta_A^2 \sin^2 \theta_{OA}}) \\ y_2 &= \frac{h_0}{\alpha \sin^2 \theta_{OB}} \{ \theta_{OB} - \sin^{-1} \{ \beta_B \sin \theta_{OB} \} \\ &\quad - \frac{h_0}{\alpha \sin \theta_{OB}} (\cos \theta_{OB} - \beta_B \sqrt{1 - \beta_B^2 \sin^2 \theta_{OB}}) + y_0 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

$$\theta_{OB} = \sin^{-1} \left(\sin \theta_{OA} \sqrt{\frac{h_0}{h_0}} \right), \quad y_0 = b_1 \cos \theta_{OA},$$

$$\beta_A = \sqrt{1 - \alpha \frac{x}{h_0}}, \quad \beta_B = \sqrt{1 - \alpha \frac{x}{h_0}}$$

で与えられる。波向線の位置 (h_A)、間隔 (b_1) および θ_{OA} を仮定すると y_1, y_2 を求めることができる。一方、斜面がある間隔で分割 (離散化) すると、その数値 (離散) 解は、 y_1 の場合に

$$y_1(N) = \frac{L}{2N} \tan \theta_{OA} + \frac{L}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \cdot \tan \left(\sin^{-1} \left\{ \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \sin \theta_{OA} \right\} \right) \dots\dots\dots (7)$$

となり、ここで、 N は L の分割数である。

4.2 波向線軌跡と屈折係数の精度

一樣斜面上での屈折係数の解析解に対する数値解の誤差を、入射角度と分割数に対してまとめると図-10 になる。佐山ら (1986) が得た波向線軌跡の誤差と比べると、

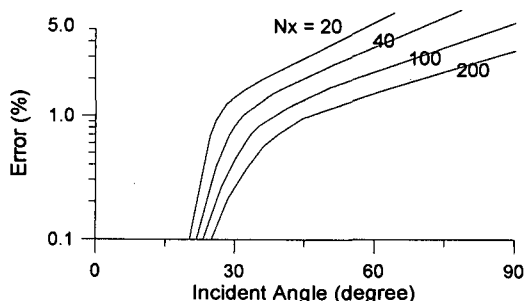


図-10 一樣斜面での津波屈折計算誤差

同じ角度と分割数の場合には、屈折係数の誤差は若干小さくなる事が分かる。例えば、入射角 60 度で 20 分割すると、波向線軌跡の誤差が 5 % であるのに対し、屈折係数の誤差は 3 % 程である。

しかるに、波高の誤差には軌跡の影響の方が大きいのかという一概には言えない。なぜなら、波高分布によりそれぞれの影響が違うことは容易に想像できるからである。津波波高の精度を評価するには、双方の誤差の関連性を調べなければならない。今、初期波形の沿岸方向波高分布を正規分布に仮定すると、理論解と数値解の差は次のように示される。

$$\begin{aligned} \frac{\eta_A - \eta_B}{Ap} &= \frac{Ap \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right)^2 \right] - \sqrt{\kappa} Ap \exp \left[- \left(\frac{x - \lambda x_0}{\sigma} \right)^2 \right]}{Ap} \\ &\cong (\sqrt{\kappa} - 1) \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\sigma} \right) \right\} - (\sqrt{\kappa} \lambda - 1) \left(\frac{x_0}{\sigma} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sqrt{\kappa} - 1) \left(\frac{x}{\sigma} \right)^2 - (\sqrt{\kappa} \lambda - 1) \left(\frac{x x_0}{\sigma^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sqrt{\kappa} \lambda^2 - 1) \left(\frac{x_0^2}{\sigma^2} \right) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 κ, λ はそれぞれ屈折係数、軌跡の誤差率を表す。

図-11 は、沿岸波高分布の模式図である。波向線軌跡は分布の発生範囲に対応し、屈折係数は波高の大きさに対応する。対象地域において波高分布の幅が狭くなる (σ が小さい) ほど、軌跡誤差の影響により、沿岸波高が大きく違うこととなる。

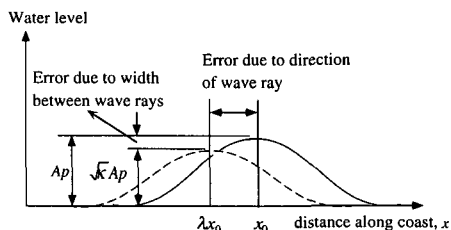


図-11 沿岸波高分布の模式図

5. おわりに

長波の屈折計算の精度を波向線方程式を基礎に、理論解、解析近似解と数値解（離散解）を比較することにより検討した。波向線の軌跡だけでなく、波向線間隔に依存する屈折係数も空間格子寸法の影響を大きく受けることが示された。地形を表現する解析関数を工夫することにより、精度検討の範囲を広げることが可能となった。最も大きな誤差を生ずるのは、島背後の波向線が大きく向きを変えて到達する場所であり、従来から指摘されている事と一致している。最後に、軌跡と屈折係数の影響を波高分布を考慮して調べた結果、波高分布の幅が狭くなるほど軌跡の誤差の影響で沿岸波高に大きな差が生ずることが示された。

参考文献

- 藤間功司・後藤智明 (1994): 円錐形の島に捕捉された長波の特性, 土木学会論文集, No. 497/II-28, pp. 101-110.
- 藤間功司・後藤智明・林建二郎・重村利幸・首藤伸夫 (1995): 伊豆・小笠原諸島での津波増幅特性, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 381-385.
- 丸山康樹・鹿島遼一 (1983): 波向線法による屈折計算法の検討, 電力中央研究報告, 40 p.
- 佐山順二・後藤智明・首藤伸夫 (1986): 屈折に関する津波数値計算の誤差, 第 33 回海岸工学講演会論文集, pp. 204-208.
- Arthur, R. S. (1946): Refraction of water waves by island and shoals with circular bottom contours, Trans. American Geophysical Union, Vol. 27, No. II, pp. 168-177.
- Liu, P. L.-F., Y.-S. Cho and K. Fujima (1994): Numerical solutions of three-dimensional run-up on a circular island, Proc. Int. Symp. on Waves-Physical and Numerical Modelling, pp. 1031-1040.
- Shuto, N. (1991): Numerical simulation of tsunamis-its present and near future, Natural Hazards, Vol. 4., pp. 171-191.