

# 重ね合わせの原理に基づく津波数値解析方法

河 田 恵 昭\*・小 池 信 昭\*\*

## 1. 緒 言

これまでの地震津波の数値解析は、大きく分けて津波初期波形の決定と津波伝播計算という2つの過程に分けられる。したがって、この2つの過程をそれぞれ独立に処理することができれば、津波数値解析を応用する際にたいへん便利である。そこでここでは、津波の基礎方程式が海域の大部分のところで線形長波方程式で表されることに着目し、重ね合わせの原理を用いることによって、津波伝播計算を独立に処理する方法を提案した。この方法を用いれば、津波初期波形さえ何らかの方法で決定できれば、数値計算を実行することなく津波の伝播特性が求められる。したがって、地震の断層モデルを想定する必要はなく、津波初期波形を水位計や人工衛星によって計測して、これから津波の伝播特性を求めることも可能になる。また、この方法では地震の情報を必要としないため、マグニチュードは小さいが断層運動が大きい場合津波は大きくなるいわゆる津波地震の問題も解決できることになる。本研究は、重ね合わせの原理に基づく数値解析方法が従来の方法に比べてどの程度の誤差をもっているのか、そして本方法が実際に適用できるかどうかを明らかにすることを目的とする。

## 2. 重ね合わせの原理

基礎方程式が線形の場合、方程式を解いて得られた結果については重ね合わせの原理が適用できる。したがって、差分法による数値計算の場合、すべての差分格子のうち1つだけが単位パルス状の初期水位変動した場合の津波波形を計算して、同じことをすべての差分格子について計算しておく。そして、実際に断層パラメータから計算された初期水位変動に対応する格子に対しては、すでに得られている津波波形を定数倍し、初期水位変動がない格子に対しては0倍して、それらをすべて重ね合わせれば、実際に数値計算を行ったのと同じ津波波形が得られるはずである。差分格子状の任意の位置  $(I, J)$  における津波波形  $\eta(I, J)$  はつぎのように表される。

$$\eta(I, J) = \sum_i \sum_j \eta_0(i, j) \hat{\eta}_U(i, j) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\eta_0(i, j) : (i, j)$  における初期水位変動、 $\hat{\eta}_U(i, j) : (i, j)$  が単位パルス状の初期水位変動した場合の  $(I, J)$  における津波波形である。

この方法を適用すれば、どの差分格子にどれだけの初期水位変動があるのか（すなわち、 $\eta_0(i, j)$ ）がわかれば、津波波形は数値計算を実行することなく求められることになる。もちろん、有限要素法で解析する場合でも、各節点について重ね合わせの原理を適用すれば、本手法を適用できることは明らかである。したがって、津波の初期水位変動を何らかの方法で推定することができればよいのであって、地震の断層モデルを仮定する必要はない。つまり、本手法を用いれば、従来の解析法の一連のプロセスを、津波初期波形の決定と津波伝播計算という2つの過程に分けることができ、それぞれ独立に処理することができることになる。

## 3. 津波初期波形の決定

津波初期波形の決定の過程では、式(1)の  $\eta_0(i, j)$ 、すなわち  $(i, j)$  における初期水位変動を求める。

### 3.1 間 接 法

#### a) 食い違いの理論

Yamashita and Sato (1974) によって、断層運動が生じる弾性体としての地球と津波が伝播する流体としての海水の結合を、海底を剛体とみなして扱う非結合モデルでも同様な結果が得られることが示された。これにより、地震によって生じる鉛直地盤変動量をそのまま海水表面の水位変動量として扱うことが確立した。そして、相田(1974)の研究によって、断層モデルから求めた鉛直地盤変動量を津波初期波形として津波の伝播計算を行い、過去の津波の再現を行うという現在の津波数値計算のスタイルが確立した。地盤の鉛直変動量を断層運動から推定するには、静的パラメータから次式で表される Volterra の式で示された食い違いと変位の関係式を用いる。

$$u_i = \int_{\Sigma} \Delta u_j \left[ \delta_{jk} \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi_l} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \right) \right] \nu_k d\Sigma \dots\dots (2)$$

\* フェロー 工博 京都大学教授 防災研究所巨大災害研究センター

\*\* 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科

ここに、 $\nu_k$ : 法線  $k$  の方向余弦、 $\lambda, \mu$ : ラメの係数、 $\Delta u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ : 食い違い量、 $u_i(x_1, x_2, x_3)$ : 変位である。

この関係式には媒質のポアソン比を  $1/4$  に仮定した Mansinha and Smylie (1971) により提案された解析解が広く利用されている。他に任意のポアソン比を仮定できる Sato and Matsu'ura (1973) や Okada (1985) の理論もある。

### 3.2 直接法

現在のところ、津波初期波形を直接観測する方法はない。しかしながら、津波水位計や人工衛星による観測などの方法によって、今後それが実現する可能性がある。

## 4. 津波伝播計算

津波伝播計算の過程では、式 (1) の  $\hat{\eta}_U(i, j)$ , すなわち  $(i, j)$  が単位パルス状の初期水位変動した場合の  $(I, J)$  における津波波形を求める。

### 4.1 基礎方程式

#### a) 近地津波

津波は、鉛直方向の加速度を無視した長波理論式で記述できる。通常、近地津波の数値解析では、対象とする計算領域の水深によって非線形長波理論と線形長波理論を使い分けている。水深の大きい波源域から水深が 50 m 程度のところまでは浅水理論における非線形項と海底摩擦項を無視した線形長波理論を用いることができる。線形長波理論式はつぎのように表される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

ここに、 $(x, y)$ : 水平の直交する 2 方向の座標、 $t$ : 時間、 $\eta$ : 水位変動、 $(M, N)$ :  $(x, y)$  方向の流量フラックス、 $h$ : 静水深、 $g$ : 重力加速度である。

#### b) 遠地津波

太平洋を伝播する津波を扱うには、近地津波で通常用いられる直交座標系に代わって球面座標系(地球座標系)を採用する必要がある。また、後藤ら (1988) によると、遠地津波の場合はコリオリ力と波数分散性を無視することはできなく、コリオリ力を考慮した線形 Boussinesq 方程式を用いる必要がある。しかしながら、後藤ら (1988) は、数値計算の打ち切り誤差に起因する数値分散性と物理分散効果が同程度となる条件を用いれば、比較的簡単な計算ですむ線形長波理論を用いても、実用上問題のない結果が得られることを明らかにしている。したがって、ここでも線形長波理論を用いることにし、それをつぎに表す。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial M}{\partial \lambda} + \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \theta} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{gh}{R \cos \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = fN \quad (7)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{gh}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -fM \quad (8)$$

ここに、 $(\lambda, \theta)$ : 経度、緯度、 $t$ : 時間、 $\eta$ : 水位変動、 $(M, N)$ :  $(\lambda, \theta)$  方向の流量フラックス、 $h$ : 静水深、 $g$ : 重力加速度、 $f$ : コリオリ係数、 $R$ : 地球の半径である。

### 4.2 差分式

#### a) 近地津波

空間方向の離散化には水位と流量フラックスの計算点を半メッシュずつずらしたスタッガードメッシュを採用し、時間方向の離散化にはリーブフロッグ法を用いることにすると、式 (3)~(5) の差分式は以下になる。

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^{k+1} = & \eta_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (M_{i+1/2,j}^{k+1/2} - M_{i-1/2,j}^{k+1/2}) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} (N_{i,j+1/2}^{k+1/2} - N_{i,j-1/2}^{k+1/2}) \quad (9) \end{aligned}$$

$$M_{i+1/2,j}^{k+3/2} = M_{i+1/2,j}^{k+1/2} - gh_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}) \quad (10)$$

$$N_{i,j+1/2}^{k+3/2} = N_{i,j+1/2}^{k+1/2} - gh_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta y} (\eta_{i,j+1}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}) \quad (11)$$

ここに、上、下添字は時間と空間メッシュ番号を表す。

#### b) 遠地津波

近地津波の場合と同様に、スタッガードメッシュとリーブフロッグ法を用いることにすると、式 (6)~(8) の差分式は以下になる。

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^{k+1} = & \eta_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{R \cos \theta_j \Delta \lambda} (M_{i+1/2,j}^{k+1/2} - M_{i-1/2,j}^{k+1/2}) \\ & - \frac{\Delta t}{R \Delta \theta} (N_{i,j+1/2}^{k+1/2} - N_{i,j-1/2}^{k+1/2}) \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{i+1/2,j}^{k+3/2} = & M_{i+1/2,j}^{k+1/2} - \frac{gh_{i+1/2,j} \Delta t}{R \cos \theta_j \Delta \lambda} (\eta_{i+1,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}) \\ & + f(N_{i,j+1/2}^{k+1/2} + N_{i+1,j+1/2}^{k+1/2} + N_{i,j-1/2}^{k+1/2} \\ & + N_{i+1,j-1/2}^{k+1/2}) / 4.0 \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{i,j+1/2}^{k+3/2} = & N_{i,j+1/2}^{k+1/2} - \frac{gh_{i,j+1/2} \Delta t}{R \Delta \theta} (\eta_{i,j+1}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}) \\ & - f(M_{i-1/2,j}^{k+1/2} + M_{i-1/2,j+1}^{k+1/2} + M_{i+1/2,j}^{k+1/2} \\ & + M_{i+1/2,j+1}^{k+1/2}) / 4.0 \quad (14) \end{aligned}$$

### 4.3 初期条件

従来の津波数値計算の初期条件としては、地震の断層パラメータから Mansinha and Smylie (1971) の方法を用いて計算した海底地盤変動量の鉛直成分を、そのまま海面上の水位変動として与え、津波の初期波形としていた。本手法の場合は、すべての差分格子のうち 1 つだけ

に単位パルス状の初期水位変動を与える。

#### 4.4 境界条件

陸地との境界では、津波が完全反射するものとして、境界面に垂直な流量フラックスを0とする。また、計算領域と接する外海との境界では、日野（1985）の無反射境界条件を用いることにする。

### 5. 本手法の誤差解析

ここでは、重ね合わせの原理による数値解析方法が従来の方法に比べてどの程度の誤差をもつのかを調べるために、遠地津波のケーススタディとして1960年チリ地震津波における三陸、近地津波のケーススタディとして1944年の東南海道地震津波における尾鷲を例にとり、両手法によって計算される津波波形を比較した。

#### 5.1 遠地津波

##### a) 従来の方法

河田ら（1997）の方法によって実施した。また、初期条件を求める際に必要となる断層パラメータは、今村ら（1990）と同様に、Kanamori and Cipar (1974), Kanamori and Anderson (1975) から引用した。

##### b) 本手法

遠地津波を数値解析する場合、太平洋全域モデルを用いることになるが、メッシュ数が非常に多いので、重ね合わせの原理を適用する場合には初期水位変動のあるすべてのメッシュからの津波波形を重ね合わせるよりも、閾値を設定してその値以下のメッシュは無視することにし、新しい手法と従来の方法との誤差を調べてその信頼性を明らかにする方が適切である。初期水位変動の絶対値を $h$ 、その最大値を $h_{\max}$ において、閾値 $h/h_{\max}$ に対応する $h$ よりも小さい水位変動を無視して、重ね合わせの原理より津波波形を求めた結果と従来の方法との誤差を図-1に表す。この図より、初期水位変動のあるすべてのメッシュのうち、その絶対値の最大値の1/10以下のものを無視して重ねあわせの原理を適用しても、誤差は5%以内におさえられることがわかる。

また、1つのメッシュが単位パルス状の初期水位変動したときに計算される津波波形 $\eta_u(i, j)$ にはほとんど差がないため、それらの重ね合わせとして求められる津波波形の誤差は、初期水位変動 $\eta_0(i, j)$ の誤差とほぼ等しくなると考えられる。そこで $h$ の総和を $S_0$ とし、 $h/h_{\max}$ が0から0.1までの $h$ の総和を $S_{0.1}$ のようににおいて、 $S_x/S_0$ およびその累積値を計算した。この累積値がそれに対応する閾値以下の水位変動を無視した場合の初期水位変動の誤差とみなせる。初期水位変動の $S_x/S_0$ とその累積値を図-2に示す。図-1の括弧内の誤差と図-2の累積値を比較すると、その値はほぼ等しいことがわかる。したがって、解の重ね合わせとして求められる津波波形の誤

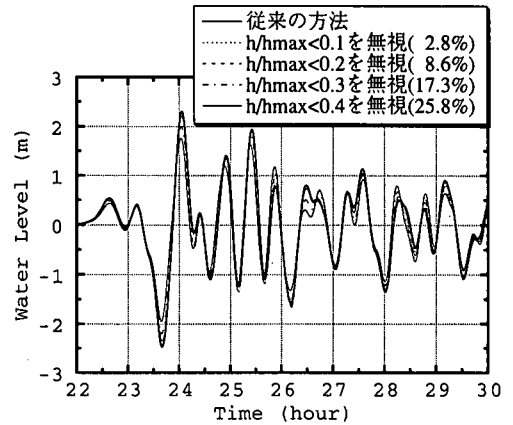


図-1 津波波形の比較と誤差（括弧内が誤差値）

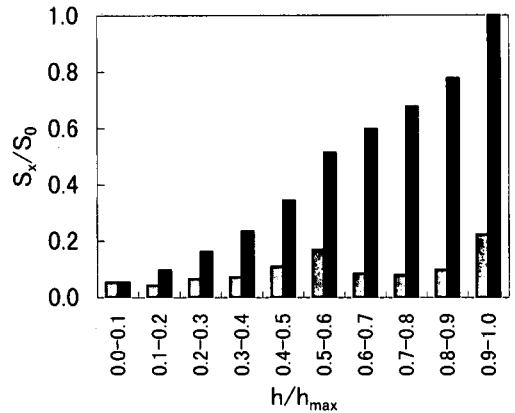


図-2 初期水位変動の  $S_x/S_0$  (左) と累積値 (右)

差は、初期水位変動の誤差とほぼ等しいといえる。

#### 5.2 近地津波

##### a) 従来の方法

近地津波の数値解析では、国土地理院の3次メッシュの大きさ、すなわち  $\Delta x = 1/80$  (deg),  $\Delta y = 1/120$  (deg) で、計算領域として北緯32度から北緯35度20分、東経134度から東経139度で囲まれる  $400 \times 400$  メッシュ分の長方形領域を取ることにする。また、計算時間間隔は  $\Delta t = 2$  sec とする。そして、初期条件を求める際に必要となる断層パラメータは、相田（1979）のモデルを用いた。

##### b) 本手法

上で設定した計算領域で本手法を適用しようとする、 $400 \times 400 = 16,000$  メッシュ分の計算が必要となる（ただし、陸地の部分のメッシュは計算する必要がないので、実際はそれよりも少なくすむ）。そこで、津波伝播計算の計算メッシュとしては上と同じ3次メッシュの大きさを使用するが、初期水位変動としては2次メッシュ（3次メッシュの100倍の大きさ）の大きさと与えること

にすれば計算時間は1/100で済むことになる。ここでは、初期水位変動を2次メッシュで与えて重ね合わせの原理を適用した場合の結果を従来の方法と比較して、その適用性を考察することにする。

まず、重ね合わせの原理を適用する前に、2次メッシュ1個分に相当する3次メッシュ100個がすべて単位水位変動した場合の津波波形を計算しておく。これが式(1)の $\bar{\eta}_u(i, j)$ にあたる。つぎに、初期水位変動を断層パラメータから3次メッシュの大きさと計算しておいて、その100個分の平均をとって2次メッシュでの初期水位変動とした。そして、式(1)を適用すれば、本手法での津波波形が求められる。図-3に3次メッシュの津波初期水位変動を、図-4に2次メッシュの津波初期水位変動を、図-5に本手法で求めた津波波形と従来の方法の比較を表す。

図-5より、本手法が従来の方法の代わりとして十分適用できることがわかる。さらに、初期水位変動を2次メッシュの大きさと与えても、3次メッシュで与えたときとほぼ同じ精度で計算できることがわかる。これは、津波伝播計算の初期条件を断層モデル以外の方法で与えることを考えた場合、2次メッシュの分解能で十分津波の予測ができることを示している。

6. 本手法の適用例

6.1 津波逆伝播図の作成

陸上のある地点へ津波がどのくらいの時間で到達するかを評価するには、逆伝播図が用いられる。津波は海の水深に比べて波長が十分長いので、その伝播速度が水深 $h$ で決まり、

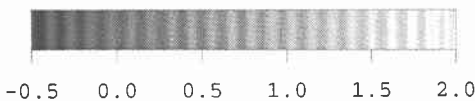
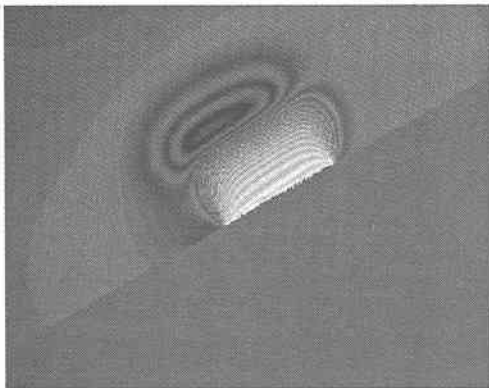


図-3 3次メッシュの津波初期水位変動 (単位:m)

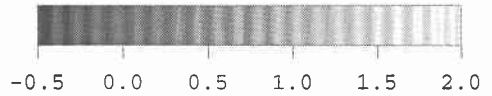
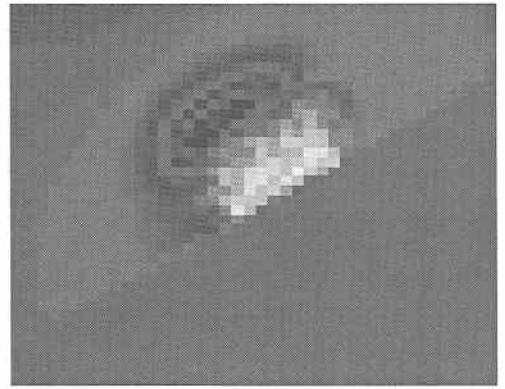


図-4 2次メッシュの津波初期水位変動 (単位:m)

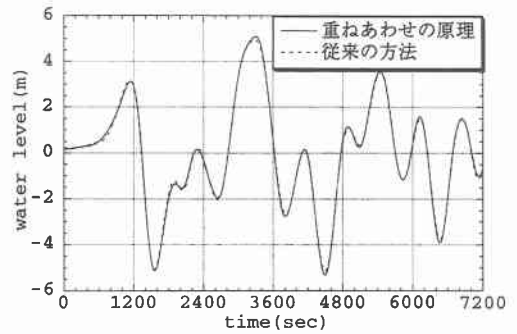


図-5 本手法と従来の方法の比較

$$v=\sqrt{gh} \dots\dots\dots(15)$$

で与えられる。ここに、 $v$ :津波の伝播速度、 $g$ :重力加速度である。逆伝播図は、水深分布図を基にホイヘンス(Huygens)の原理で作成される。

一方、式(1)よりある地点における津波波形 $\eta(I, J)$ は、海上の各メッシュ $(i, j)$ からの寄与の単なる重ね合わせであるから、メッシュ $(i, j)$ を波源とする津波の到達時間は、 $(i, j)$ が単位パルス状の初期水位変動した場合の $(I, J)$ における津波波形 $\bar{\eta}_u(i, j)$ を調べればわかることになる。そして、各メッシュ $(i, j)$ について求められた津波の到達時間の等時曲線を描けば、逆伝播図が作成できることになり、陸上のある地点へ津波がどのくらいの時間で到達するかわかる。図-6に三重県尾鷲市の津波の逆伝播図を示す。

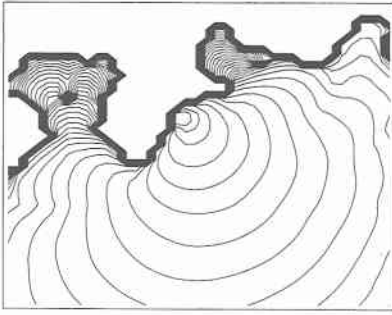


図-6 三重県尾鷲市の津波の逆伝播図

## 6.2 津波波源域の危険度

前節と同様に、メッシュ  $(i, j)$  からの津波波形  $\hat{\eta}_u(i, j)$  の最大水位を求めれば、陸上のある地点  $(I, J)$  にとって津波の高さが大きくなる危険性の高い海上の地域  $(i, j)$  がわかることになる。すなわち、地震によってこの地域の地盤が鉛直方向に大きく変動すれば、それらの重ね合わせとして求まる実際の津波波形の変動も大きくなると考えられる。 $(I, J)$  を三重県尾鷲市としたときの、メッシュ  $(i, j)$  からの津波波形  $\hat{\eta}_u(i, j)$  の最大水位の分布を図-7に示す。

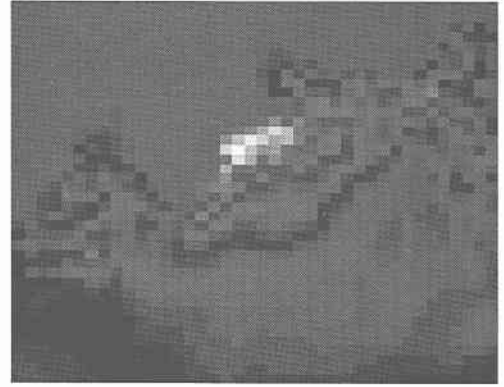


図-7 三重県尾鷲市にとって危険性の高い津波波源域 (単位: m)

## 7. 結 語

ここで提案した重ね合わせの原理に基づく津波数値解析方法は、結局のところ、津波伝播計算を地震から独立させて、海洋上の波の問題としてのみとらえたものである。この方法だと、地震の断層モデルを想定しなくても、津波の諸特性が評価できることになる。

本研究によって得られた結論をつぎに示す。

- 1) 初期水位変動のあるすべてのメッシュのうち、その絶対値の最大値の  $1/10$  以下のものを無視して重ね合わせの原理を適用しても、誤差は  $5\%$  以内におさえられる。
- 2) 解の重ね合わせとして求められる津波波形の誤差は、初期水位変動の誤差とほぼ等しい。
- 3) したがって、重ね合わせの原理に基づく津波数値解析方法は、従来の方法の代わりとして適用しても実用上問題ないといえる。

謝辞：本研究で用いた水深データは、日本海洋データセンター(JODC)に提供していただいた。ここに記して、謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 相田 勇 (1974): 地震の断層モデルによる津波の数値実験, 地震2, Vol. 27, pp. 141-154.  
 相田 勇 (1979): 1944年東南海地震津波の波源モデル, 東大地震研彙報, Vol. 54, pp. 329-341.

- 今村文彦・首藤伸夫・後藤智明 (1990): 遠地津波の数値計算に関する研究 その2, 地震2, 第43巻, pp. 389-402.  
 河田恵昭・小池信昭・島田富美男 (1994): 津波の伝播特性に基づく危険度評価について, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 1181-1185.  
 河田恵昭・小池信昭・井上雅夫・嘉戸重仁 (1997): 環太平洋沿岸域における津波リスクに関する研究, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 341-345.  
 後藤智明・今村文彦・首藤伸夫 (1988): 遠地津波の数値計算に関する研究 その1, 地震2, 第41巻, pp. 515-526.  
 日野幹雄 (1987): 開放境界における波の無反射透過条件の極めて簡単な計算スキームの提案, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 38, pp. 33-37.  
 Aida, I. (1969): Numerical experiments for tsunamis caused by moving deformation of the sea bottom, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 47, pp. 849-862.  
 Kanamori, H. and J. J. Cipar. (1974): Focal process of the great Chilean earthquake of May 22, 1960, Phys. Earth Planet. Interiors, 9, pp. 128-136.  
 Kanamori, H. and D. Anderson. (1975): Theoretical basis of some empirical relations in seismology, Bull. Seismol. Soc. Am., 65, pp. 1073-1095.  
 Mansinha, L. and D. E. Smylie (1971): The displacement fields of inclined faults, Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 61, No. 5, pp. 1433-1440.  
 Okada, Y. (1985): Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space, Bull. Seism. Soc. America, Vol. 75, pp. 1135-1154.  
 Sato, R. and M. Matsu'ura (1973): Strains and tilts on the surface of a semi-infinite medium, J. Phys. Earth, Vol. 23, pp. 113-125.  
 Yamashita, T. and R. Sato (1974): Generation of tsunami by a fault model, J. Phys. Earth, Vol. 22, pp. 415-440.