

波群の反射と長周期波

寛 田 博 章*・水 口 優**

1. はじめに

海岸構造物の設計や港内副振動、越波などの海岸工学の問題に対し波群性長周期波を考慮することは重要である。そのため、近年盛んに研究され、その発生因や性質についてはかなりわかりつつある。上記のような工学的問題に対し波群性長周期波を評価する際、さまざまな要因による波群の変形を考慮しなければならないが、その一つに波群の反射が挙げられる。喜岡 (1996) らは、波群が鉛直壁に入射した場合の長周期波の挙動について、2成分合成波を用いた Boussinesq 方程式の数値シミュレーションにより議論を行っている。しかし、実験は行われておらず、その妥当性の検討は行われていない。

本論文では、波群が鉛直壁に入射した時の長周期波の挙動を解明することと、その定量的評価を解析的に行うことを目的とする。radiation stress の概念を用い、時系列的にこの問題を扱う。さらに、実験と Boussinesq 方程式の数値シミュレーションを行い検討する。本論文では現象を単純化するため、寛田・水口 (1996) と同様に単一波群を用いた。なお、部分反射の場合についても解析的に扱う。

2. 理論的解析

2.1 重複波群の radiation stress

水深は一様水深で、入射、および反射波群は変調せず伝播し、波群が反射する際、位相はずれないものとする。鉛直壁は $x=0$ にあるものとする。重複波群の水位変動を、

$$\eta = A_i(x - C_0 t) \cos(kx - \omega t) + A_r(x + C_0 t) \cdot \cos(kx + \omega t) \quad (1)$$

とする。 k , ω , C_0 は基本波の波数、角周波数、群速度、 A_i , $A_r (=K_r A_i)$ は入射波群、反射波群の包絡関数を表わす。 K_r は基本波の反射率を表わす。(1) 式に対応する包絡波形 A_p は、

$$A_p = A_i^2(x - C_0 t) + A_i^2(x + C_0 t) + 2A_i(x - C_0 t)A_r(x + C_0 t)\cos(2kx) \quad (2)$$

となる。ここで、 h は水深を表わす。 x 軸に垂直な面に対し、 x 方向に働く radiation stress は次式で定義される (Longuet-Higgins・Stewart, 1964)。

$$S_{xx} = \int_{-h}^0 \rho(\bar{u}^2 - \bar{w}^2) dz + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \quad (3)$$

ρ は密度、 g は重力加速度を表わす。(3) 式に (1) 式、および (1) 式に対応する水平流速と鉛直流速を代入すると

$$S_{xx} = \int_{-h}^0 \rho[(\bar{u}_i + \bar{u}_r)^2 - (\bar{w}_i + \bar{w}_r)^2] dz + \frac{1}{2} \rho g (\bar{\eta}_i + \bar{\eta}_r)^2 \quad (4)$$

となる。若干の計算の後、 A_i^2 , A_r^2 , $A_i A_r$ の項に分けて整理すると重複波群の radiation stress は

$$S_{xx} = S_{xxi} + S_{xxr} + S_{xxir} \quad (5)$$

$$S_{xxi} = \left(n - \frac{1}{4}\right) \rho g A_i^2 (x - C_0 t) \quad (6)$$

$$S_{xxr} = \left(n - \frac{1}{4}\right) \rho g A_r^2 (x + C_0 t) \quad (7)$$

$$S_{xxir} = -\frac{1}{2} A_i (x - C_0 t) A_r (x + C_0 t) \cos 2kx \quad (8)$$

となる。 S_{xxi} , S_{xxr} , S_{xxir} は、入射波群、反射波群、および入射波群と反射波群の重ね合わせの結果として発生する成分の radiation stress を表わす。 n は群速度と基本波の波速の比である。

2.2 長周期波の解

長周期波の解を求める。支配方程式には以下の強制項付きの線形長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_{xx}}{\rho} \right) \quad (10)$$

$\bar{\eta}$, $\bar{u}$ は長周期波の水位と断面平均流速を表す。(9), (10) 式から $\bar{u}$ を消去すると次式のような強制項付きの波動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} - g h \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{S_{xx}}{\rho} \right) \quad (11)$$

(11) 式は次式で表わされる強制解をもつ (Longuet-Higgins・Stewart, 1962, 以下略して LHS 解)。

* 学生会員 工修 中央大学大学院 土木工学専攻

** 正会員 工博 中央大学 理工学部土木工学科

$$\eta_* = -\frac{S_{xx}(x - C_g t)}{\rho(gh - C_g^2)} \quad (12)$$

入射波と反射波の拘束波は (12) 式から求まる。すなわち、(6)、(7) 式を (12) に代入すると、

$$\eta_{*,i} = -\left(n - \frac{1}{4}\right) g \frac{A_i^2(x - C_g t)}{gh - C_g^2} \quad (13)$$

$$\eta_{*,r} = -\left(n - \frac{1}{4}\right) g \frac{A_r^2(x + C_g t)}{gh - C_g^2} \quad (14)$$

入射波群と反射波群の重ね合わせによって発生する成分については進行波ではなく定在波であるため準定常であるとみなし、(11) 式から非定常項を無視して解を求める。その解は、

$$\begin{aligned} \eta_{*,ir} &= -\frac{S_{xx}(x, t)}{\rho gh} \\ &= \frac{1}{2h} A_i(x - C_g t) A_r(x + C_g t) \cos 2kx \quad (15) \end{aligned}$$

となる。(15) 式より、入射波群と反射波群の重ね合わせの結果として発生する定在波成分は基本波の半波長で変動する。鉛直壁でその振幅は最大となり、入射拘束長周期波と符号が逆になる。トータル拘束長周期波は、(13)、(14)、(15) の線形和として、

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \eta_{*,i} + \eta_{*,r} + \eta_{*,ir} \\ &= -\left(n - \frac{1}{4}\right) g \frac{A_i^2(x - C_g t) + A_r^2(x + C_g t)}{gh - C_g^2} \\ &\quad + \frac{1}{2h} A_i(x - C_g t) A_r(x + C_g t) \cos 2kx \quad (16) \end{aligned}$$

となる。

図-1 は、完全反射 ($K_r=1$) の場合の鉛直壁 ($x=0$) における定在波解 (15) 式の振幅の絶対値と LHS 解 (13) 式の振幅の絶対値を相対水深 kh の関数として表したものである。 $kh > 1.58$ の場合、定在波解の振幅は LHS 解より大きくなるが、 $kh < 1.58$ の場合はその逆となる。特に浅海域では、定在波解の振幅は LHS 解に比べ非常に小さい。

完全反射の場合の鉛直壁における拘束長周期波の水平流速について考える。定在波成分は鉛直壁で腹となるため、その水平流速 $u_{*,ir}$ は 0 となる。鉛直壁におけるトータルの水平流速は、

$$\bar{u} = u_{*,i} + u_{*,r} + u_{*,ir} = \frac{C_g}{h} \eta_{*,i} - \frac{C_g}{h} \eta_{*,r} = 0 \quad (17)$$

となる。これより、完全反射の場合には自由長周期波は発生しない。部分反射の場合には $\bar{u} \neq 0$ となり、自由長周期波が発生すると予想される。部分反射の場合の発生自由波については 4. で議論を行う。

3. Boussinesq 方程式の数値シミュレーション

Boussinesq 方程式は、寛田・水口と同様に以下のよう

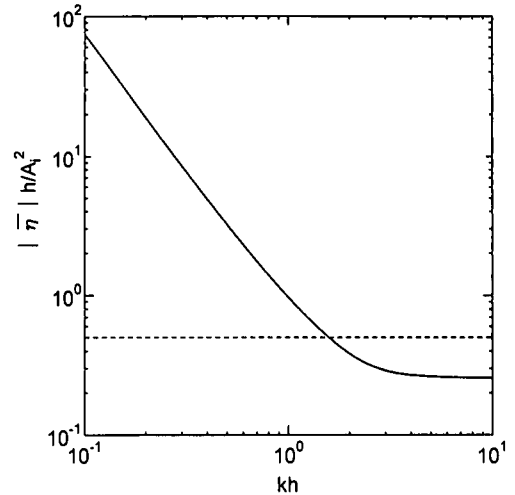


図-1 LHS 解と定在波解の振幅 (完全反射)

な基本的な連続式と運動方程式を用いた。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) \quad (19)$$

Q は線流量、 $D=(h+\eta)$ は全水深を表す。計算はスタックガード・リーブフロッグ法で行い、沖側境界で流量を線形理論で与えた。岸側境界は完全反射 ($Q=0$) とした。

4. 実験の概要と実験結果

4.1 実験の概要

実験はピストン型造波装置を有する、長さ 40 m、幅 0.3 m の断面 2 次元水槽で行った。図-2 は、実験水槽を表す。水深は一様水深とし、造波板から 15.0 m の地点に鉛直壁を設置し、完全反射の実験を行った。造波波群については次式で表わされる単一波群を用いた。

$$\eta(t) = \begin{cases} A(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) & 0 < t < T_g \\ 0 & t < 0, t > T_g \end{cases} \quad (20)$$

ただし、包絡関数 $A(t)$ は、

$$A(t) = (a_{\max}/2) \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_g} t\right) \right\} \quad (21)$$

とした。ここで、 $a_{\max}$ は包絡波の最大振幅、 T は基本波の周期、 T_g は波群の継続時間を表わす。波群の造波について、単純に造波すると自由長周期波が発生する。この波が発生すると現象が複雑になる。そこで、寛田・水口と同様に以下の関係式を用いて自由長周期波の発生を抑え、拘束長周期波のみ造波した。

$$\frac{d\xi}{dt} = u(X, t) \equiv u(0, t) = u_R(0, t) + u_L(0, t) \quad (22)$$

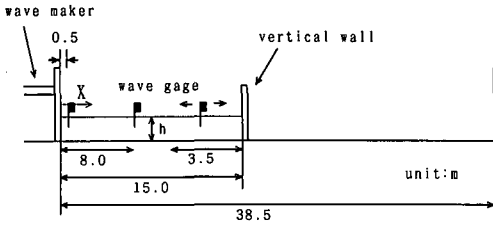


図-2 実験装置図

表-1 実験条件

	$a_{\max}$ (cm)	T (s)	T_p (s)	h (cm)	kh
case 1	0.5	1.0	12.0	10.0	0.68
case 2	0.5	1.2	14.4	10.0	0.56

ここで,

$$u_L(0, t) = \frac{C_g}{h} \eta_*(t) \dots \dots \dots (23)$$

ξ は造波板の変位, u_p と u_L は基本波と拘束長周期波の水平流速を表わす. 造波する波群の条件を表-1 に示す. 造波板から 0.5 m, 8.0 m の地点に波高計(新容量式波高計, 正豊工学製)を固定し, 11.5 m の地点から 15.0 m までの区間については 0.1 m 間隔で波高計を移動させ計測を行った. データのサンプリング周波数は 50 Hz とした.

4.2 実験結果

図-3 の実線は, case 1 の実験により得られた水位の時系列データである. 破線は Boussinesq 方程式の数値シミュレーション, 点線は $|A_p|$ を表わす ($K_r=1$). 波群は壁で反射し, 重複している. なお, 波群の振幅は伝播に伴い徐々に小さくなっている. 理論包絡波形 $|A_p|$ と Boussinesq 方程式の数値シミュレーションとの比較から, 水槽壁での摩擦が主要な原因であると考えられる.

図-3 の実験データに数値ローパスフィルターを施し, 長周期成分を取り出したものが, 図-4 である. 太実線は実験値, 点線は定在波成分を考慮した $\bar{\eta} (= \eta_i + \eta_r + \eta_{ir})$, 細実線は入射拘束長周期波と反射拘束長周期波の線形和 $\eta_i + \eta_r$, 破線は Boussinesq 方程式の数値シミュレーションを表す. 反射成分を見ると, 実験値と 2 つの解はよく一致している. また, 自由長周期波は発生していないとも言える. 鉛直壁 ($X=15$ m) における実験値は, 定在波成分も考慮した $\bar{\eta}$ とよく一致している.

図-4 の長周期成分の時系列データを空間波形に変換し検討を行う. 図-5 は長周期波の振幅がほぼ最大となる $t=25$ (s) の鉛直壁付近における長周期成分の空間波形である. 実験値には長波長の成分の他に短波長で変動する成分も存在する. 実験値と, $\bar{\eta}$ および $\eta_i + \eta_r$ との比

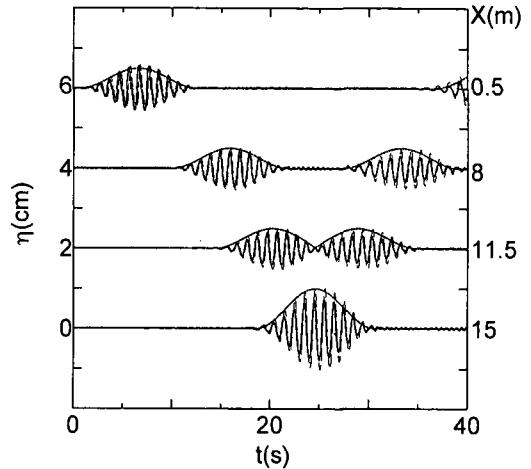


図-3 水位の時系列データ (完全反射, case 1)

実験: 実験値, 点線: 理論包絡波形 $|A_p|$, 破線: Boussinesq 方程式の数値シミュレーション

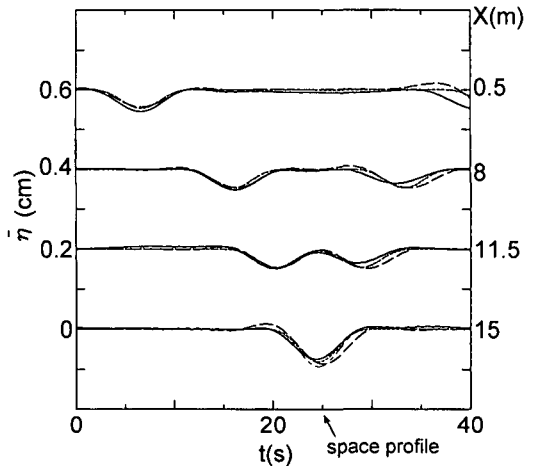


図-4 長周期成分の時系列データ (完全反射, case 1)

太実線: 実験値, 点線: $\bar{\eta} (= \eta_i + \eta_r + \eta_{ir})$, 一点鎖線: $\eta_i + \eta_r$, 破線: Boussinesq 方程式の数値シミュレーション

較から, この長周期で短波長の成分は入射波群と反射波群の重ね合わせの結果として発生する定在波成分と考えられる. しかし, この定在波の振幅は, 条件が浅海域であるため, 入射波群と反射波群にともなう拘束波の振幅のそれぞれの和に比べ非常に小さい. 定量的には, 実験値は (16) 式 $\bar{\eta}$, 数値シミュレーション値と良く一致する.

4. 部分反射した場合の発生自由長周期波

波群が消波構造物などにより部分反射した場合を想定する. 厳密には対象とする消波構造物層内の流体運動を

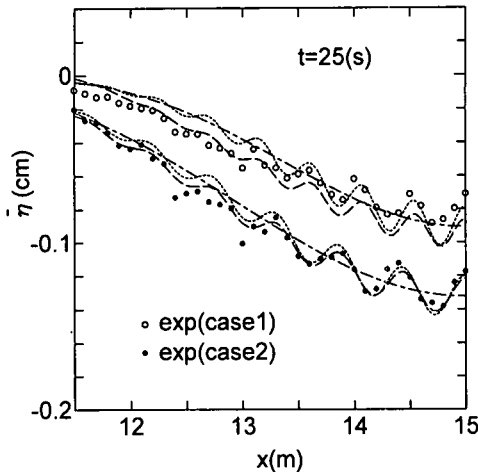


図-5 長周期成分の空間波形 (完全反射)

点線: $\eta(\eta_i + \eta_r + \eta_{tr})$, 一点鎖線: $\eta_i + \eta_r$, 破線: Boussinesq 方程式の数値シミュレーション

議論しなければならないが、現地の消波構造物は短い幅で急激にエネルギーを失うものが多い。そこで、本研究では鉛直壁でエネルギーが失われるものと仮定し、この問題を解析的に扱う。なお、消波構造物は、ほとんどが浅海域に設置される。浅海域では、LHS 解に比べ入射波群と反射波群の重ね合わせの結果として発生する定在波は非常に小さい。そこでこの成分は無視して考える。また、基本波の反射率 K_r と長周期波の反射率 K_{r*} は異なり、 $K_r < K_{r*}$ となることが予想される。本論文では長周期波の反射率 K_{r*} が非常に小さい場合を想定し、 $K_{r*} = 1$ と仮定する。

長周期波の水位変動は入射波群の部分反射によって発生する冲向きの自由長周期波の水位変動を未知関数 $f(x + Ct)$ とおくことで次式のように表せる。

$$\eta_* = \eta_{*i}(x - C_0t) + \eta_{*r}(x + C_0t) + f(x + Ct) \quad (24)$$

ここで、 $C(=\sqrt{gh})$ は長波の波速を表す。(24) 式に対応する水平流速は

$$u_* = \frac{C_D}{h} \eta_{*i} - \frac{C_D}{h} \eta_{*r} - \frac{C}{h} f \quad (25)$$

で表される。(25) 式に鉛直壁における運動学的境界条件 $u_* = 0$ を適用すると f は求まり、

$$f = \frac{C_D}{C} (\eta_{*i} - \eta_{*r}) \quad (26)$$

となる。(26) 式を (24) 式に代入すれば長周期波の解は求まる。図-6 は、反射拘束長周期波 η_{*r} と発生自由長周期波 f の振幅の絶対値を基本波の反射率 K_r の関数として表したものである。それぞれの値は入射拘束長周期波の振幅で無次元化した。反射率をある値に着目すれば kh が小さくなるに従い、発生自由長周期波の振幅は大きく

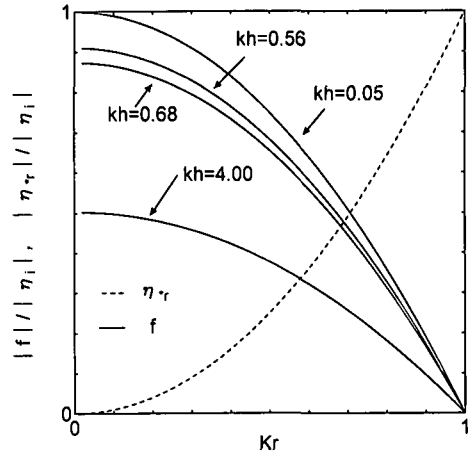


図-6 部分反射の場合の反射拘束長周期波と発生自由長周期の振幅

入射拘束波の振幅で無次元化している。

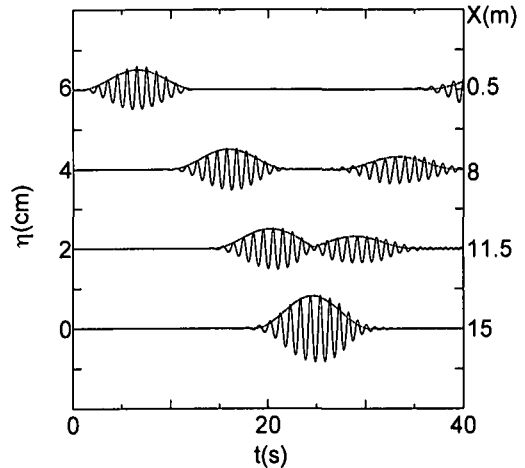


図-7 水位の時系列データ (部分反射)

実線: Boussinesq 方程式の数値シミュレーション, 点線: 理論包絡波形 $|A_0|$

なることがわかる。

Boussinesq 方程式の数値シミュレーションとの比較を行った。運動方程式は、(19) 式に運動量補正項を加えたモデルを用いた。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{D} \right)^2 + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{f_r}{D^2} Q|Q| \\ = \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 f_r は運動量損失係数を表す。入射波群の条件は、表-1 の case 1 と同じである。反射率が 0.6~0.7 程度になるように $f_r = 4.0$ とした。また、(27) 式の左辺第 4 項は、鉛直壁とその 20 cm 手前の区間で働くようにした。図-7 の実線は数値シミュレーションの水位時系列デー

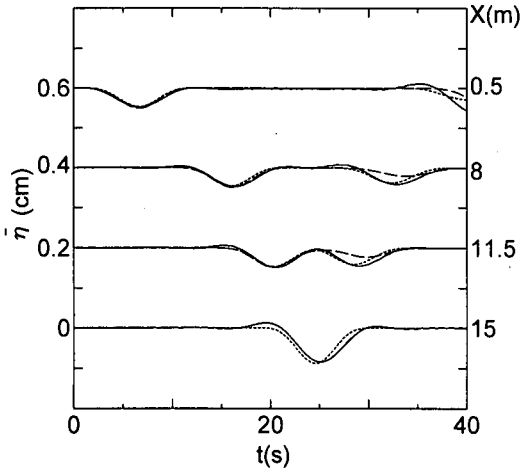


図-8 長周期成分の時系列データ (部分反射)

実験: 数値シミュレーション, 点線: (24)式, 破線: 数値シミュレーションの包絡波形より求めた LHS 解

タを表す。なお、理論包絡波形 (2) 式 (点線) の計算における反射率は、 $X=8.0$ m での数値シミュレーション値に対し List (1992) の手法を用いて包絡波形を取り出し、その最大振幅比から求めた ($K_r=0.63$)。

図-8 の実線は図-7 の数値シミュレーションの水位時系列データから長周期成分を取り出したものである。点線は発生自由長周期波を考慮した (24) 式, 破線は数値シミュレーションの水位時系列データより得られた包絡波形を用いて LHS 解 (13) 式を計算したものを表す ($X=15.0$ m は除く)。実線と破線の差が部分反射により発生した自由長周期波と考えられる。定量的評価について、(24) 式は数値シミュレーション値とよく一致している。

5. おわりに

波群とそれに伴う拘束長周期波が鉛直壁に入射した場合の長周期波の挙動を調べると共にこの現象を解析的に扱った。入射、および反射波群に伴う拘束長周期波だけでなく、喜岡らと同様、入射波群の重ね合わせの結果として発生する準定常成分も存在することが実験により確認できた。浅海域において、この成分は入射拘束波に比べ非常に小さい。また、完全反射の場合には、鉛直壁で自由波は発生しない。拘束長周期波の定量的評価について (16) 式は有効である。ただし、浅海域では入射拘束長周期波の線形和として扱っても十分である。部分反射の場合について Boussinesq 方程式の数値シミュレーションを行い、自由長周期波が発生することを確認した。理論式 (24) は数値シミュレーション結果とよく一致する。

今後の検討課題としては、この現象における長周期波の流速の検討、波群が部分反射した場合の理論の妥当性の確認を行うことである。

参考文献

- 喜岡 渉・山根 聡・青木伸一 (1996): 波群とそれに伴う長周期波の反射, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 166-170.
- 笈田博章・水口 優 (1996): 単一波群による長周期波, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 161-165.
- List, J. H. (1992): A model for the generation of two-dimensional surf beat, J. G. R., Vol. 97, C4, pp. 5623-5635.
- Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart (1962): Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to 'surf beats', JFM, Vol. 13, pp. 481-504.
- Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart (1964): Radiation stress in water waves; a physical discussion, with applications, Deep Sea Res., Vol. 11 pp. 529-569.