

複素表現を用いた非線形不規則波浪の統計解析

北野利一*・中野晋**・大野嘉典***・間瀬 肇****

1. 研究の目的

海岸・港湾構造物に働く波力の算定や漂砂機構の解明のため、浅海域の特性を把握することは重要である。近年、浅海不規則波の研究は著しく発展し、波高分布や周期分布およびその結合分布、あるいは波の非対称性など詳細に分析されてきている。しかし、前提となる波高や非対称性についての定義が変わればその統計的特性も変わるものであり、適切な定義を与えているか否かの検討も必要である。

不規則波の統計量（例えば、波高）の解析を行う際、水位変動記録をゼロクロス法により、個々波に分割するのが通常のやり方である。しかし、この方法では高周波成分による小さい波高もカウントすることになり、これを一波として取り扱うべきか否かは定かでない。Pires-Silva and Medina (1994) は、水位変動 η とそれを複素表示した時の虚部の関数 ξ を用いて点 (η, ξ) の軌跡を解析することにより、ゼロクロス法で定義されてしまう無意味な波 (false wave) を取り除く波の定義法を提案し、深海域の不規則波の解析に適用した。

浅海域では浅水変形により波は上下非対称になるのみでなく、前後にも非対称となる。Kjeldsen and Myrhang (1984) は、波形の前傾度をゼロアップクロス時刻からクレスト時刻までの時間とクレスト時刻からゼロダウンクロス時刻までの時間の比で表現した。しかし、この定義は、個々の波の判定を行わなければならないというアルゴリズムの複雑性とパラメータの非対称性から不適切であるとし、合田 (1985) は、直接的かつ簡便であるという理由から、水位変動の時間微分 $\dot{\eta}$ の頻度分布から求められる skewness を atiltness と呼び、不規則波の前後非対称性の代表量として提案している。

本研究では、Pires-Silva and Medina (1994) の解析手法を一樣斜面上での不規則波データに応用し、従来のゼロダウンクロス法と比較しながら波の数の変化を検討する。また、浅海波の前後非対称性について、Pires-Silva

and Medina で用いられている ξ の統計量を用いることを提案し、合田 (1985) による $\dot{\eta}$ の skewness と比較検討することにより、合田による atiltness の欠点を明らかにし、 ξ を用いた前後非対称パラメータの優位性を明らかにする。

2. 解析手法および理論

2.1 複素表示による水位変動

水位変動 $\eta(t)$ を時間間隔 Δt でサンプリングを行い $2(N+1)$ 個のデータを得た時、水位変動 η は次のように Fourier 級数表示できる。

$$\eta(t) = \sum_{n=1-N}^N \{a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\} \quad \cdots \cdots (1)$$

ただし、水位の平均値 $E(\eta)$ をゼロにとる。 $\eta(t)$ が線形不規則波の場合、各 $(a_n, b_n)_{1 \leq n \leq N}$ は確率的に与えられ、

$$\left. \begin{aligned} E(a_n) &= E(b_n) = 0 \\ E(a_n b_n) &= 0 \\ E(a_n^2) &= E(b_n^2) = S(\omega_n) d\omega \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (2)$$

となる。ここで、 $S(\omega_n)$ は角周波数 ω_n のエネルギースペクトルである。式 (1) を別の形で、簡潔に表現すると次のようになる。

$$\eta(t) = \sum_{n=1-N}^N c_n \cos(\omega_n t - \epsilon_n) \quad \cdots \cdots (3)$$

係数 $(c_n)_{1 \leq n \leq N}$ については正值を確定的に与えるものとし、位相 $(\epsilon_n)_{1 \leq n \leq N}$ については確率的に $(0, 2\pi)$ の間を互いに独立かつ一様に分布するものとする。つまり、

$$c_n = S(\omega_n) d\omega \quad \cdots \cdots (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} E(\epsilon_i \epsilon_j) &= 0 \quad \text{for } i \neq j \\ \forall (\epsilon_n)_{n=1-N} &\in \text{Uniform}(0, 2\pi) \end{aligned} \right. \quad \cdots \cdots (5)$$

である。しかし、 $\eta(t)$ が線形不規則波でない場合、すなわち、非線形不規則波である場合にはもはや式 (2) や式 (5) が成立しない。式 (5) の否定を考えると、

$$\exists (i, j): E(\epsilon_i \epsilon_j) \neq 0 \quad \text{for } i \neq j \quad \cdots \cdots (6)$$

あるいは、

$$\exists (\epsilon_n)_{n=1-N} \notin \text{Uniform}(0, 2\pi) \quad \cdots \cdots (7)$$

ということになる。しかし、位相変動の原因が離散化にあることを考えれば、いずれの成分に対しても一様性については成立せねばならない。結局、式 (6) は Fourier

* 正会員 工修 徳島大学助手 工学部建設工学科
 ** 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科
 *** 正会員 東亜建設工業
 **** 正会員 工博 京都大学助教授 防災研究所

級数表示における非線形不規則波の性質ということになる。ところで、ここでは意味を明確にせず平均の記号 E を使用しているが、サンプリングに伴う離散化が原因となる $\{\epsilon_n\}_{n=1 \sim N}$ や $\{a_n, b_n\}_{n=1 \sim N}$ の変動量についての平均 E^{dis} 、時間による平均 E^{time} 、さらにそれら2つによる平均 E は区別しなければならない。このことは後に計算する $E(\xi^2)$ について重要となる。

水位変動が式(3)と表示される時、その複素表示は、次のように定義される。

$$\eta(t) + i\xi(t) = \sum_{n=1 \sim N} c_n e^{i(\omega_n t - \epsilon_n)} \dots \dots \dots (8)$$

この虚部関数 $\xi(t)$ も実数値関数であり、

$$\xi(t) = \sum_{n=1 \sim N} c_n \sin(\omega_n t - \epsilon_n) \dots \dots \dots (9)$$

と表され、水位変動の関数 $\eta(t)$ の各成分について、

$$\begin{cases} \cos x \rightarrow \sin x \\ \sin x \rightarrow -\cos x \end{cases} \dots \dots \dots (10)$$

と置換したものである。なお、この置換は Hilbert 変換により得られる。線形不規則波の場合、

$$A(t) = \sqrt{\eta^2(t) + \xi^2(t)} \dots \dots \dots (11)$$

は包絡線関数を表わし、時々刻々の変動振幅を得るために用いられてきた(例えば、Longuet-Higgins, 1984; Hudspeth and Medina, 1988)。

以上、不規則波の線形性あるいは非線形性にかかわらず、水位変動は式(8)のように Fourier 級数により複素表示され、線形・非線形の違いは位相の独立・非独立に現われることを示した。以上の考察は、後の前後非対称波の分散値の計算で必要となる。

2.2 Pires-Silva and Medina (1995) の false wave

従来の実数水位変動値 η に新たに ξ という情報を付け加えることにより、不規則波から個々の波を取り出す際に、波らしい波の定義を試みる。具体的には、水位変動の複素表示 $\eta(t) + i\xi(t)$ を用いて、点 (η, ξ) を直交平面上で時間をパラメータとして軌跡を描いた一例を図-1に示す。この時、 η の正軸、 ξ の正軸、 η の負軸、 ξ の負軸の通過をもって波の一周期とカウントする。従って図-1の例で見るとおり、ゼロクロスでは3周期と数えられる波も新たな定義法では1周期となる。このように、たとえ時系列 η の波形がゼロクロスしていても、複素平面上で原点を囲むものでなければ1周期と認めないと定義する。すなわち、 $\eta(t) + i\xi(t)$ の性質として、大きな波高については大きな軌跡を描き、小さな波高については小さな軌跡を描くはずであり、軌跡が原点を囲まないものについては、一波に伴う変動と考えることができる定義である。なお、ここで取り上げた $\eta(t) + i\xi(t)$ の性質は、線形・非線形にかかわらず成立するので、深海域から浅

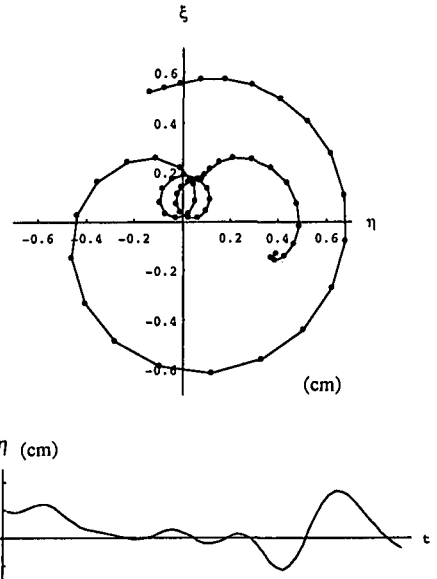


図-1 複素水位変動による個々波の定義の例

海域まで統一して用いることができる。

位相関数 $\theta(t)$ を用いると、水位変動の複素表示は

$$\eta(t) + i\xi(t) = A(t) e^{i\theta(t)} \dots \dots \dots (12)$$

となる。不規則波の場合、位相関数 $\theta(t)$ は当然、時間の一次関数ではなく変動している (Kitano and Mase, 1997)。そこで上記のような orbital な波を定義するためには、

$$\theta(t_{j,k}) = 2\pi j \dots \dots \dots (13)$$

を満たす時刻 $\{t_{j,k}\}_{k \geq 1}$ のうち、最もはやい時刻を t_j と定義し、不規則波を区間 (t_j, t_{j+1}) で分割することにより、個々の波を取り出すことになる。このことは結局、位相関数 $\theta(t)$ は後戻りを許さないことを意味する。

Pires-Silva and Medina (1995) の研究では、ポルトガル西岸沖の水深 90 m の深海域の波の周期と有義波高について検討しており、また Gimenes et al. (1995) の研究では、false wave の出現確率や noise 除去の効果について、線形不規則波のシミュレーションにより検討している。本研究の一つの目標として、新たな定義法を用いて不規則波の統計解析を行い、一様斜面上に入射した不規則波の浅水変形に伴う波の数および有義波高の変化について調べる。

2.3 ξの意味

前節で検討した点 (η, ξ) の軌跡について、波の非線形性による性質を検討しておく。単色波(規則波)の場合は、複素平面上で等速に円を描く。上下非対称な Stokes 波の場合、もはや円にはならず底に平くなったキャベ

ツ形の軌跡を描き、速度も一様でない。また、前後非対称な波の場合、軌跡は Stokes 波の軌跡を 90 度回転させたようなものになる。図-2 に代表的な波形とその軌跡をのせる。以上により、上下非対称な波と前後非対称な波は η と ξ の役割が入れ替わったものと考えられ、上下非対称性の程度を η の分布形の skewness として表現すると同様、前後非対称性の程度を ξ の分布形の skewness として表現できる可能性があることがわかる。

次にそれらの統計的大きさについて検討する。まず、 $\eta(t)$ の分散値は、以下のように表わせる。

$$\begin{aligned} E(\eta^2) = & \frac{1}{2} \sum_n c_n^2 \{ 1 + E^{\text{time}}(\cos 2\omega_n t) E^{\text{dis}}(\cos 2\varepsilon_n) \\ & + E^{\text{time}}(\sin 2\omega_n t) E^{\text{dis}}(\sin 2\varepsilon_n) \} \\ & + \sum_{i \neq j} c_i c_j \{ E^{\text{time}}(\cos \omega_+ + \cos \omega_-) E^{\text{dis}}(c.c.) \\ & + E^{\text{time}}(\cos \omega_+ - \cos \omega_-) E^{\text{dis}}(s.s.) \\ & + E^{\text{time}}(\sin \omega_+ + \sin \omega_-) E^{\text{dis}}(s.c.) \\ & - E^{\text{time}}(\sin \omega_+ - \sin \omega_-) E^{\text{dis}}(c.s.) \} \dots\dots (14) \end{aligned}$$

ただし、 $c.c.$ 等については以下のように表わせるものである。

$$\begin{cases} c.c. = \cos(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_j) \\ s.s. = \sin(\varepsilon_i) \sin(\varepsilon_j) \\ s.c. = \sin(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_j) \\ c.s. = \cos(\varepsilon_i) \sin(\varepsilon_j) \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

$$\omega_{\pm} = (\omega_i + \omega_j) t \dots\dots\dots (16)$$

非線形不規則波であっても個々の周波数については

$$E^{\text{time}}(\cos \omega_{\pm}) = E^{\text{time}}(\sin \omega_{\pm}) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

であるので、式 (14) は

$$E(\eta^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1-N} c_n^2 \dots\dots\dots (18)$$

となる。つまり、非線形不規則波の場合でも $E(\eta^2)$ はスペクトル面積に等しい。このことは同様に、 $E(\xi^2)$ にも言え、結局

$$E(\eta^2) = E(\xi^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1-N} c_n^2 \dots\dots\dots (19)$$

となり、 $\eta(t)$ と $\xi(t)$ の分散 (ちらばり) は同じであることがわかる。以上により、 η の準 Gauss 過程の取扱い可能な条件下では、 $\xi(t)$ も準 Gauss 過程の取扱いが可能であることが示唆される。

2.4 本研究で用いるデータ

本研究で用いたデータは、波群特性の違いによる不規則波の浅海域での諸特性の違いを調べるために、間瀬ら (1986) が行った実験結果の一部である。実験の詳細な説明は省略するが、1/20 勾配の一樣斜面上のピーク周波数が 0.6 Hz の Pierson-Moskowitz 型のスペクトルをもつ不規則波の沖波地点を含めた計 10 地点における水位の時系列データである。サンプリング間隔は 0.04 秒であり、データ数は 16,384 個でピーク周波数の 0.5 倍以下および 5 倍以上の成分を除去して解析した。

3. 解析結果とその考察

3.1 浅水変形に伴う波の特性量の変化

浅水変形に伴う波の数の変化を図-3 に示す。ゼロダウンクロス法では、沖からある深さの地点までは波の数は徐々に増大し、その後汀線に向かって減少していく。これに対し、今回用いた $\eta(t) + i\xi(t)$ による定義法では、波の数は極浅海域を除いてほぼ一定になるという結果を得た。このことにより、砕波による乱れをゼロダウンクロスでは一波とカウントするのに対して、 $\eta(t) + i\xi(t)$ による定義法では、小さな砕波による乱れは一波とカウントせず、false wave として切り捨てていることがわかる。ただ、砕波の程度が大きく、砕波により波が消滅していく極浅海域では、 $\eta(t) + i\xi(t)$ による定義法でも波の数は減少する。このように、今回提案する水位変動の複素表現を用いた波の定義法は、浅水域の波というものを適切にとらえた定義法であると考えられる。

有義波高および平均波高の変化を図-4 に示す。ゼロ

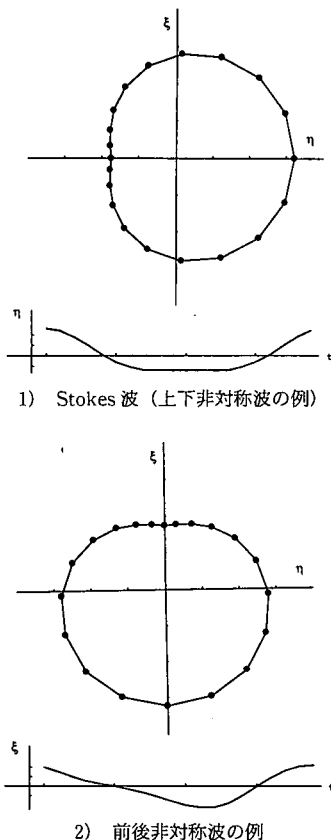


図-2 非線形規則波の軌跡

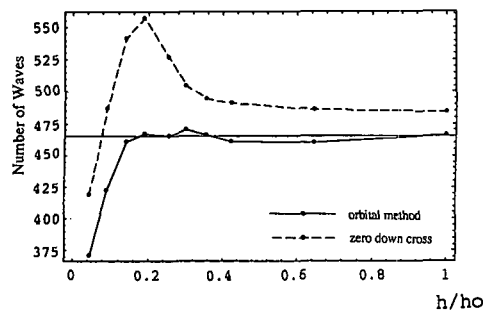


図-3 波の数の変化

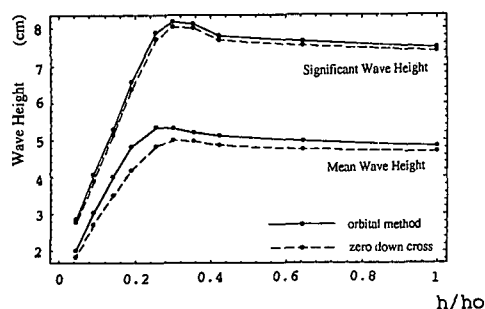
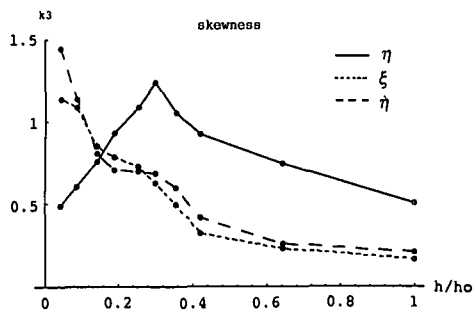
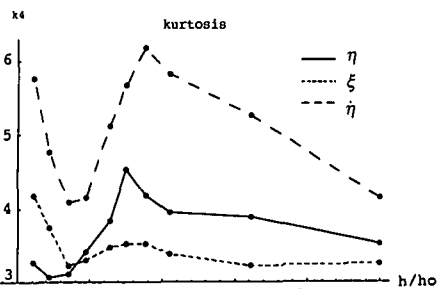


図-4 有義波高および平均波高の変化



1) skewness の変化



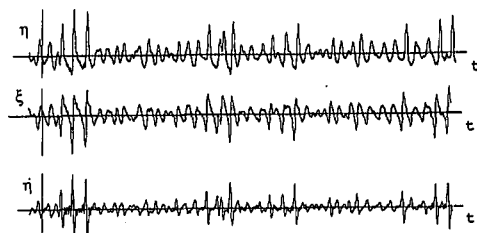
2) kurtosis の変化

図-5 η, ξ および η̇ の skewness と kurtosis

ダウンクロス法では false wave という小さな変動も波とカウントしているため、その代表波高は過小評価されているのではないかと予想される。有義波高に関しては、 $\eta(t) + i\xi(t)$ の定義法によるものに比較して、ゼロダウンクロス法によるものは若干小さい値をとるが、ほとんど同じである。これは有義波高の定義による効果であり、大きな波高のみについて平均をとるために、ゼロダウンクロス法の欠点を修正され、両定義に違いは現れていない。しかし、平均波高については、ゼロダウンクロス法によるものと $\eta(t) + i\xi(t)$ によるものの両者を比較すればその差は明らかに認められ、ゼロダウンクロス法による波高が若干過小評価されていることが確認される。これは先に述べた予想どおりの結果となった。

3.2 波の前後非対称性について

合田による前傾度は、 η の分布を基に定義される。図-5に、浅水変化による ξ および η 、そして参考のため η の skewness と kurtosis の変化を示す。水深が浅くなるにつれて波形の上下非対称性が強くなり、 η の skewness は徐々に大きくなる。 ξ および η の skewness をみると、水深減少につれて増大しており、波は前後非対称性が強くなることがわかる。ところが、kurtosis については正規分布のそれが3であることに比べ、 η のそれは大きな値をとっており、 η の skewness と kurtosis を用いた Gram-Charlier 分布と実測の頻度分布はかけ

図-6 η̇ のパルス化した波形の例 ($h/ho=0.36$)

離れたものとなった。これは、浅海域で水位変動 η の谷は平坦になり、周期に占める谷の時間が増大することにより、小さな値をとる η の区分での頻度が非常に高くなるのが原因である。すなわち、 η の波形はパルス化(図-6)してしまい、もはや Gauss 過程としては扱えなくなるためだと考えられる。従って、 η の分布を基に定義される前傾度は、準 Gauss 過程とみなせる深海域から上下・前後非対称性の強い浅海域までを統一的に表現しうるパラメータとして適切ではないと思われる。他方、 ξ については skewness および kurtosis とも妥当な値をとり、実測分布は skewness と kurtosis を用いた Gram-Charlier 分布との一致もよく(図-7)、深海域から浅海域までを統一して前後非対称性を表現できた。また、式(19)から η および ξ の分散(ちらばり)が同じであることを

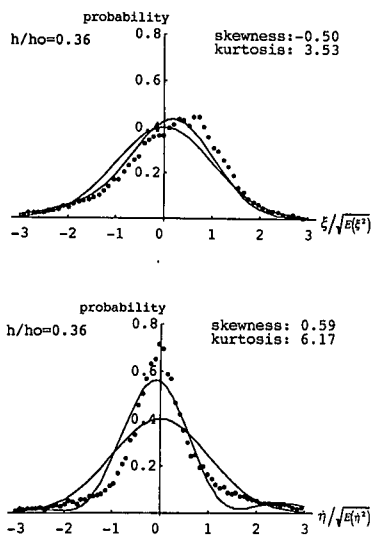


図-7 Gram-Charlier 分布との比較

踏まえると、 η および ξ の skewness の値を比較することは、同じちらばりの中での偏り度 (skewness) の比較という意味をもち、波の前後と上下の非対称性の比較が可能である。

4. 結 論

複素水位変動表示を用いる個々波の定義法や波の前後非対称性の指標について、その基礎となる理論を検討し、深海域から浅海域の条件までの一連の水位変動データに適用した。本研究の主要な結論は以下のとおりである。

(1) 浅海変形に伴う波の特性量の変化

ゼロダウクロス法で個々波を定義すると、波の数は砕波帯付近で増加した後、汀線に向けて減少する。一方、複素水位変動表示を用いて個々波を定義すると、極浅海

域を除いて波の数はほぼ一定になる。このことにより、波を適切に定義するためには、複素水位変動表示を用いた波の定義法を用いるのが良い。

(2) 波の前後非対称性指標

波形の前後非対称性の増大に伴って (上下非対称性が強くなるにつれて)、 η の分布は Gauss 分布から非常にかけ離れたものになる。合田 (1985) による η を用いた前後非対称性の指標は信頼性が低くなる。それに対し、 ξ の分布は式 (19) から η の分布と同じ分散値をとるので、準 Gauss 分布とみなすことができ、水深毎の前後非対称性の比較や上下非対称性との比較も可能である。

参 考 文 献

- 間瀬 肇・松本明男・松本和伸・岩垣雄一 (1986): 波群特性が異なる不規則波の浅水・砕波変形特性, 第 33 回海岸工学講演会論文集, pp. 169-173.
- 合田良実 (1985): 波浪の統計的性質に関する二, 三の数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第 24 巻, pp. 65-102.
- Pires-Silva, A. A. and J. R. Medina (1994): False waves in wave records, Jour. Ocean Engrg., Vol. 21, pp. 765-770.
- Gimenes, M. H., Sanchez-Carratala, C. R. and J. R. Medina (1994): Analysis of false waves in numerical sea simulations, Jour. Ocean Engrg., Vol. 21, pp. 751-764.
- Hudspeth, R. T. and J. R. Medina (1988): Wave group analysis by the Hilbert transform, Proc. 17th Conf. Coastal Engrg., ASCE, pp. 884-898.
- Kitano, T. and H. Mase (1997): New theoretical aspects of statistical properties of narrow-banded random waves, Jour. Ocean Engrg. (to be appeared).
- Longuet-Higgins, M. S. (1984): Statistical properties of wave groups in a random sea state, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A, Vol. 312, pp. 219-250.
- Myrhang, D. and S. P. Kjeldsen (1986): Parametric modelling of joint probability density distributions for steepness and asymmetry in deep water waves, Jour. Applied Ocean Res., Vol. 6, pp. 207-220.