

乱流モデルによる碎波点近傍の流れ場の数値計算

辻 本 剛 三*

1. はじめに

波動場では非回転領域と回転領域に流体場を分けて扱うことが可能であり、大部分の現象は非回転のポテンシャル流れで説明ができる。しかしながら、底面近傍や自由表面においては渦度を伴う流れ場が形成されるために、ポテンシャル流れで扱えない流れ場も存在し、そのような場では工学的にも興味深い現象が生じている。例えば海底面上に形成される砂漣上の流れや漂砂現象、海藻が繁茂する流れ場、潜堤のような海岸構造物上の波浪変形、さらに工学的に重要である碎波帯の流れなどでは渦度の発達した流れ場である。

これらの現象に対して著者(1990, 1995)は乱流モデルを用いて流れ場や浮遊砂の挙動に関する数値計算を実施している。その際に自由水面の減衰や変動が小さい、つまり波のエネルギー減衰が微小とし、ポテンシャル流れを計算領域の上端に与えて数値計算を行っている。地形変化のスケールが小さい砂漣上では比較的妥当な計算結果が得られている。しかしながら海藻が存在する場では水面形状の分裂や波高減衰が生じているために計算領域の上端でポテンシャル流れを用いることには限界がある。そのために底面から自由水面まで含めた乱流計算が必要であり、その際の問題として自由水面の移動とそこでの乱流量の見積もりである。

近年の計算機の発達により自由水面を考慮した研究はいくつか行われている。例えば Lemos(1992)はVOF法と2-方程式である $k-\varepsilon$ 乱流モデルを用いた数値計算、柴山ら(1994)は境界適合座標系BFCと0-方程式モデルによる碎波帯での流れや浮遊砂濃度の解析、滝川ら(1995)はBFCと格子生成法を用いて斜面上の碎波変形の解析を行っている。Lemosや柴山らは乱流モデルを用いている点で今後の発展性があるモデルである。BFCは自由水面での境界条件を精度よく与えられるが、自由水面が多価関数となる場では滝川らのように格子生成法に工夫が必要である。一方、VOF法は自由水面の形状が曖昧になり、境界条件の与え方に多少の疑問があるが巻き碎波のようなOVER HANGを生じるような水面形状に

対して適用が可能であり、近年の適用例はきわめて多い。

本研究では $k-\varepsilon$ 乱流モデルを用い、自由水面と底面地形形状を考慮した流れ場の数値計算手法の開発を目的とする。

2. 数値計算手法

2.1 座 標 系

図-1に示すような物理座標と計算座標を用いる。物理座標系 (x, y, z) と計算座標系 (ξ, η, τ) を(1)式で対応させる。

$$x = X(\xi, \eta, \tau), z = Z(\xi, \eta, \tau), t = T(\xi, \eta, \tau) \quad \cdots (1)$$

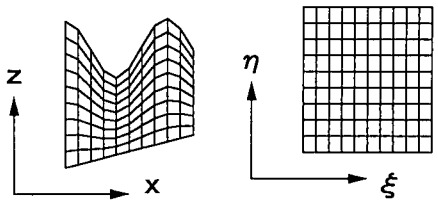


図-1 座標系

2.2 基礎方程式群

連続式、運動方程式、 k, ε の輸送方程式をデカルト座標系 (x, z) で表示する。

連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial wu}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2\nu_t \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - g \quad \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

k 方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial uk}{\partial x} + \frac{\partial wk}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right\} + P_r - \varepsilon \dots\dots\dots (5)$$

ε 方程式

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial w \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right\} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_r - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \dots\dots\dots (6)$$

$$P_t = \nu_t \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (8)$$

ここで, u, w : x, z 方向の流速, p : 圧力, ρ : 密度, k : 乱れエネルギー, ε : 乱れエネルギーの逸散率, ν , ν_t : 動粘性係数, 渦動粘性係数, g : 重力加速度であり, 乱流モデルの各係数は $C_\mu=0.09$, $C_{1\varepsilon}=1.44$, $C_{2\varepsilon}=1.92$, $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\varepsilon=1.3$ の標準的な値を与える。座標変換には次式で示す σ -座標系を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= \frac{z - \bar{z}(x)}{h(x, t) - \bar{z}(x)} \\ \tau &= t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで, h : 基準軸から水面までの距離, $\bar{z}$: 基準軸から底面までの距離である。(9)式を用いると基礎方程式群は以下のように与えられる。

連続式

$$\frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \right\} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

ξ 方向の運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U u}{\partial \xi} + \frac{\partial W u}{\partial \eta} \right\} &= -\frac{1}{J\rho} \left\{ X_\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} - X_\eta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right\} \\ &+ (\nu + \nu_t) \Delta u + \frac{2}{J^2} \left\{ Z_\eta \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \right\} \left\{ X_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - X_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\} \\ &+ \frac{1}{J^2} \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} \right\} \\ &\cdot \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + Z_\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

η 方向の運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U w}{\partial \xi} + \frac{\partial W w}{\partial \eta} \right\} &= -\frac{1}{J\rho} \left\{ X_\xi \frac{\partial p}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial p}{\partial \xi} \right\} \\ &+ (\nu + \nu_t) \Delta w + \frac{1}{J^2} \left\{ Z_\eta \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \right\} \\ &\cdot \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} + Z_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\} \\ &+ \frac{2}{J^2} \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} \right\} \left\{ X_\xi \frac{\partial w}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\} - g \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

k 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U k}{\partial \xi} + \frac{\partial W k}{\partial \eta} \right\} \\ = \left\{ \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right\} \Delta k + \frac{1}{J^2 \sigma_k} \left\{ Z_\eta \frac{\partial k}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial k}{\partial \eta} \right\} \\ \cdot \left\{ Z_\eta \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \right\} + \frac{1}{J^2 \sigma_k} \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial k}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial k}{\partial \xi} \right\} \\ \cdot \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} \right\} + P_r - \varepsilon \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ε 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U \varepsilon}{\partial \xi} + \frac{\partial W \varepsilon}{\partial \eta} \right\} \\ = \left\{ \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right\} \Delta \varepsilon + \frac{1}{J^2 \sigma_\varepsilon} \left\{ Z_\eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right\} \\ \cdot \left\{ Z_\eta \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \right\} + \frac{1}{J^2 \sigma_\varepsilon} \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right\} \\ \cdot \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} \right\} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_r - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_r = \frac{2\nu_t}{J^2} \left\{ \left(Z_\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(X_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \\ + \frac{\nu_t}{J^2} \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} - X_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + Z_\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} - Z_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\}^2 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで, U, W : 反変速度成分, J : ヤコビアン, $X_\eta, Z_\eta, X_\varepsilon, Z_\varepsilon$: メトリック, Δ : ナブラであり, 以下のようになら与えられる。

$$J = X_\xi Z_\eta - X_\eta Z_\xi \dots\dots\dots (16)$$

$$X_\xi = J\eta_x, X_\eta = -J\xi_x, Z_\xi = -J\eta_z, Z_\eta = J\xi_z \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} U &= (u - \dot{X})Z_\eta - (w - \dot{Z})X_\eta \\ W &= (w - \dot{Z})X_\xi - (u - \dot{X})Z_\xi \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{J} \left\{ Z_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Z_\eta}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{Z_\varepsilon}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right. \\ &\quad \left. - Z_\varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{Z_\eta}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{Z_\varepsilon}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{J} \left\{ X_\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{X_\xi}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{X_\eta}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right. \\ &\quad \left. - X_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{X_\xi}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{X_\eta}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここで, $\dot{X}, \dot{Z}$: 格子の移動速度である。

2.3 境界条件について

沖側境界条件は流速に関しては数値造波境界, k, ε の乱流諸量はゼロを与えた。岸側境界条件は流速に関しては (20) 式の Sommerfeld の放射条件, k, ε については勾配がゼロとした。

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + C \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここで, $\vec{V}$: 流速成分 (u, w), C : 位相速度である。底面境界条件は流速に関しては no slip 条件, k, ε には壁関数を適用した。水面での運動学的条件を (21) 式で与えた。

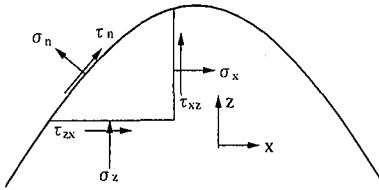


図-2 自由水面での応力条件

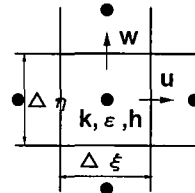


図-3 スタッガード格子

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (21)$$

応力条件としては図-2 に示すように、自由水面における法線応力及び接線応力を σ_n , τ_n とすると

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + 2\tau_{xz} n_x n_z + \sigma_z n_z^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\tau_n = \sigma_x m_x n_z + \tau_{xz} (m_x n_z + m_z n_x) + \sigma_z m_z n_x \quad \dots\dots\dots (23)$$

となり、ここで σ_x , σ_z , τ_{xz} : デカルト座標系における応力成分, n_x , n_z : 法線方向の単位ベクトルの x , z 成分, m_x , m_z : 接線方向の単位ベクトルの x , z 成分である。これらは表面張力を無視し、レイノルズ応力を考慮すると (24) 式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\rho(\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_z &= -p + 2\rho(\nu + \nu_t) \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \rho(\nu + \nu_t) \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\ n_x &= \frac{-h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}, \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \\ m_x &= n_z, \quad m_z = -n_x \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

自由水面と大気側の法線応力と接線応力の釣り合い等により

$$p = 2\rho(\nu + \nu_t) \left\{ n_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_z^2 \frac{\partial w}{\partial z} - n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x n_z + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (n_x^2 - n_z^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。水平流速は (26) 式、鉛直流速 Chen・Street (1970) にならって外挿して算出した。 k , ϵ に関しては充分な知見がないので (27) 式で与え、自由水面の形状は (21) 式の運動学的条件より算出した。

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

2.4 計算手法

方程式系の差分には図-3 に示すように計算空間 (ξ , η) を等間隔に分割したスタッガード格子を用いる。移流項の扱いは重要であり、ここでは 1 次の風上差分と

QUICK 法を併用した。仮の圧力場をレイノルズ方程式に用い、オイラー陽解法で仮定流速場と水面形状を算出する。SMAC 法を用いて仮定流速場が連続式を満足するように速度場と圧力場の補正を行う。得られた速度場より水面形状, k , ϵ を算出する。 k , ϵ 方程式は Lemons と同様に半陰解法で生成項を計算している。時間刻み Δt はクーラント数を満足させるために $\Delta t = T/100$, 水平方向には 100~200 分割、鉛直方向 30 分割した。

3. 実験方法

2 次元造波水路に 1/10 勾配の斜面を 2.6 m に設置し、水面形状を波高計により測定した。表-1 に実験条件を示す。

表-1 実験条件

ケース	H (cm)	h_0 (cm)	T (sec)
1	6.8	35	1.72
2	14.0	35	1.04
3	13.1	35	2.09
4	8.2	35	0.86

ここで、 H : 入射波高, h_0 : 水平床での水深である。

4. 数値計算の結果

4.1 波浪変形について

ケース 2 の計算結果と実験結果を水面形状で比較を図-4 に示す。図中の“●”は実験値、“↓”は目視による碎波点の位置を示している。非線形の強い碎波点近傍の水面形状を比較的良好に再現している。

4.2 水面形・流速場・渦度・乱流諸量・渦動粘性係数

図-5 にケース 2 の各位相における水面形、流速場、乱れエネルギー、その逸散率、渦動粘性係数、渦度の計算結果の分布を示す。

$t/T = 3.66$ 位相では、水深の減少に伴い水面形状が非線形性を帯び前傾になり始める。乱れエネルギーは波②が碎波点に接近するに伴い、その前面に集中し始める。その位置では乱れの逸散が生じていないために渦動粘性係

数は比較的大きな値を有する。壁面近傍では乱れエネルギーとその逸散がほぼ同じ位相で発生するために、渦動粘性係数はそれほど大きな値をとらない。波の峰には時計回りの渦度、峰の前面には反時計回りの渦度が各々発達している。

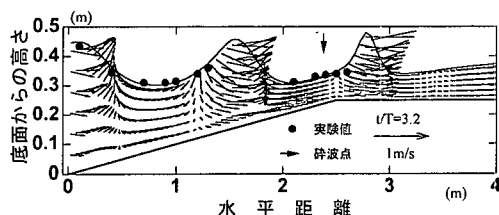


図-4 水面形状の比較

位相 $t/T=3.96$ では、波②の波高の減衰が見られる。波の峰前面に集中していた乱れエネルギーは、水面から入り込んだ内部において高い値を有する。波①からの乱れエネルギーが後方移動し、波③では静水面付近から発生した乱れエネルギーが発達し、波の峰前面に波②と同様に集中し始める。また波②からの乱れエネルギーの一部が波③に影響を及ぼしてしている。波②はこの位相において碎波点を通過しているため、乱れエネルギーの逸散が著しく多い、しかしながら波③では逸散がほとんど生じないために渦動粘性係数が大きくなっている。

碎波近傍の渦動粘性係数を柴山ら(1994)は代数式(28)式で与えている。

$$\nu_t = f_v \sqrt{gh} (\zeta - z_b) \dots \dots \dots (28)$$

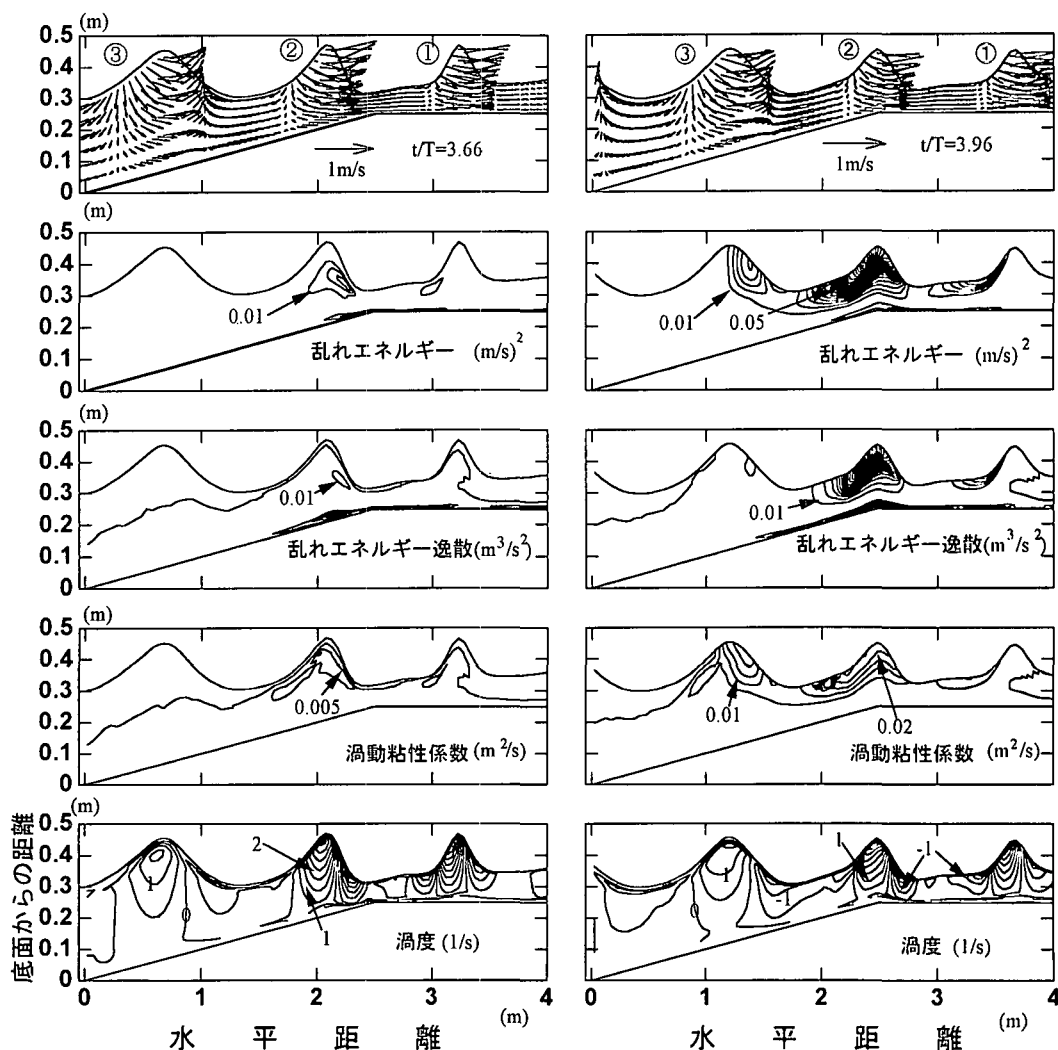


図-5 水面形・流速ベクトル・乱れ・逸散量・渦動粘性係数・渦度

ここで, f_b : 定数 ($=0.125$), h : 静水深, z : 底面からの水面の位置, z_b : 底面の位置である. (28) 式と数値計算で得られ値はほぼ同程度の $0.026 \text{ m}^2/\text{sec}$ である.

5. ま と め

海岸構造物や斜面上のような任意地形上の乱流構造を数値的に明らかにするための第一段階として, 自由水面の影響を取り込んでレイノルズ方程式, $k-\epsilon$ 方程式を一般曲線座標系で表示した.

砕波点近傍の非線形性の強い水面形状は, 数値計算により比較的良好に再現できる. また, 計算された渦動粘性係数の値は, 柴山らが適用している代数式より得られる値とほぼ同程度である.

本数値計算では, 波の峰が砕波点の通過後において, 局所的に数値振動が発生し, さらには k, ϵ 量に関して負の値が発生し計算が困難となる. これらに関して村上ら (1988) は k, ϵ 方程式において完全陰解法で安定性を高めることを提案しており, また Zijlema (1996) は移流項の高精度化の必要性を述べている. 今後は流速場及び乱れ成分の実験値との比較, 計算の安定化を検討する予定である.

謝辞: 実験を行うに当たり本校元学生, 坂田圭弘, 出羽利行君の協力, 東京大学河原能久助教授より有益な助言を頂いた. また本研究の一部は文部省科学研究費補助

金, 基盤研究 C (代表者辻本剛三, 課題番号 0765506110) の補助を受けた. ここに記して謝意を表す.

参 考 文 献

- 滝川 清・山田文彦・有元光久・田淵幹修 (1991): 斜面上の砕波変形過程の内部特性とその数値解析, 海岸工学論文集, 第 38 巻, pp. 61-65.
- 辻本剛三・早川典生・市山 誠・福嶋祐介 (1990): 砂澁を有する海底面上の乱流構造に関する研究, 土木学会論文集, No. 423, pp. 141-150.
- 辻本剛三 (1995): 乱流モデルによる単純化された藻場上の流れと浮遊砂濃度特性について, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 451-455.
- 村上周三・加藤伸介・石田義洋 (1988): 一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その 1, 日本建築学会計画系論文報告集, 386 号, pp. 9-17.
- Chan, R. K. C. and R. L. Street (1970): A computer study of finite-amplitude waterwaves, Jour. Comp. Physics 6, pp. 68-94.
- Lemos C. M. (1992): A simple numerical technique for turbulent flows with free surfaces, Int. Jour. Num. Methods in Fluids, Vol. 15, pp. 127-146.
- Shibayama T. and N. T. Duy (1994): A 2-D vertical model for wave and current in the surf zone based on the turbulent flow equations, Coastal Engineering in Japan, Vol. 37, No. 1, pp. 41-65.
- Zijlema M. (1996): On the construction of a third-order accurate monotone convection scheme with application to turbulent flows in general domains, Int. Jour. Num. Methods in Fluids, Vol. 22, pp. 619-641.