

非線形緩勾配方程式を用いた碎波判定法の適用性

有 川 太 郎*・磯 部 雅 彦**

1. はじめに

碎波直前までの波浪場を、理論上では精度良く解析できる強非線形・強分散性の方程式が、最近いくつか提案され、それらを用いて碎波の物理過程を明らかにする試みが、田島ら (1996)、灘岡ら (1996) によって行われた。それぞれ、碎波点を求めることについては実用上問題はないものの、碎波の物理過程を正確に記述するという点に関しては、それぞれ論理的な問題が残っている。

進行波の碎波条件は、波速・流速比が1となることであると考えられるが、田島らは合田 (1970) の経験公式との整合性のために、0.8としている。また灘岡らは、圧力勾配が負という条件で碎波点を求めているが、理論的には、碎波限界にある定形進行波の鉛直加速度が重力加速度の1/2となることと整合しない。その理由の一つとしては、それぞれ理論的には強非線形・強分散性の方程式を用いているものの、項数の不足をはじめとする、数値計算における解析精度の不十分さが考えられる。

そこで本研究では、田島らと同様に、磯部 (1994) の非線形緩勾配方程式を用いて鉛直断面2次元の数値計算を行うが、まずその計算精度に関して検討を行う。その上で、進行波および完全重複波の碎波限界が既存の実験結果と整合性を保って、理論的に定められることを示す。また、その結果を用いて、部分重複波の碎波限界についても考察する。

2. 数値計算方法

(1) 基礎方程式

基礎方程式には非線形緩勾配方程式 (磯部, 1994) を用いる。非線形緩勾配方程式では、速度ポテンシャルは鉛直分布を既知関数の級数で仮定し、重み係数の $f_a (\alpha = 1, \dots, N)$ を未知数として、式 (1) の様に表す。ただし、本研究では鉛直分布関数には、偶数次べき乗関数を用いた。

$$\phi = \sum_{a=1}^N Z_a(z; h) f_a(x, t) = \sum_{a=1}^N \left(1 + \frac{z}{h}\right)^{2(a-1)} f_a \quad \cdots (1)$$

このとき、級数の項数によって解析精度が支配される。

(2) 境界処理

これまで、非線形緩勾配方程式の沖側境界条件は、線形近似によって与えられていた (磯部 (1994))。ところが、これでは非線形性の強い波を入射させる時に、境界での誤差がその後の波浪場の解析に大きく影響することになる。そこで本研究では、石井ら (1993) の線境界入射法を用いることにした。

しかし、線境界法では入射点で直接値を代入するために、 η_{in} および ϕ_{in} つまり f_{ain} の入射データを求める必要がある。そこで、ストークス波やクノイド波よりも適用範囲の広い流れ関数法 (磯部 (1985)) から、Cauchy-Riemann の関係を用いて速度ポテンシャルを計算すると、

$$\phi_{in}(z, t) = - \sum_{m=1}^M B_m \cosh mk(h+z) \sin m\omega t \quad \cdots (2)$$

となる。ここで、 M は流れ関数法の近似項数を表す。そこで、ある時刻 t_j における水底から水面までを I 等分すると、その残差は、

$$E(t_j) = \sum_{i=1}^I [\phi_{in}(z_i, t_j) - f_{ain}(t_j) Z_a(z_i)]^2 \quad \cdots (3)$$

となる。ここで、 α に関して総和規約を適用した。そして最小二乗法を用いて、時刻 t_j における係数 f_{ain} を求めた。また η_{in} も流れ関数法より求めた。

エネルギー吸収帯を設けるときには、有川ら (1995) の様に減衰項を方程式に含めて計算する。最も沖側と岸側の境界では、ゾンマーフェルトの放射境界条件を用いた。

初期条件は、静水状態からはじめ、1周期目は滑らかに増加するウィンドウをかけ突然大きな値を代入しないようにする。また、以下本論文では、この1周期目にできる波を遷移波と呼ぶことにする。

(3) 計算方法

数値計算は、差分法で行い、また離散化にはCrank-Nicolsonの方法を用いた。また、このとき解くべき方程式は非線形連立方程式となるために、Newton-Raphson法を用いる。線境界法を用いても、解くべき行列はブロック3重対角行列となるために、トーマス法を用いて効率

* 学生会員 修(工) 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻

** フェロー 工 博 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻

よく計算できる。

また、空間および時間差分間隔の関係は、Courant の条件より、

$$\Delta x = C \Delta t \quad \dots\dots\dots (4)$$

とした。ここで、 C は流れ関数法から得られる最も沖側の水深の波速とする。

3. 計算精度

(1) 計算精度の評価方法

ここでは、級数の項数と差分間隔による精度の違いを明らかにする。そのために、水平床での規則波進行波(周期 8 s)を対象に計算を行い、場が定常になったとみなせた時に、誤差および残差を計算し評価した。沖側と岸側には放射境界条件のみを用い、そのときの波速は流れ関数法から計算される値を用いた。

誤差および残差は、次の 4 つで評価し、磯部(1985)にならって無次元化を行い、1 波の二乗平均をとった。

1. 厳密解(流れ関数法)の波形との誤差：

$$E_R = \left[\frac{\eta - \eta_a}{H} \right]_{\text{rms}}$$

2. 底面から水表面まで積分した連続式の残差：

$$E_I = \left[\frac{T}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) dz \right]_{\text{rms}}$$

3. 運動学的境界条件の残差：

$$E_K = \left[\frac{1}{U_0} \left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right]_{\text{rms}}$$

4. 力学的境界条件の残差：

$$E_D = \left[\frac{1}{gH} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + g\eta \right\} \right]_{\text{rms}}$$

ここで、 η_a は厳密解、 H は波高、 h は静水深、 T は周期、 g は重力加速度、および $U_0 = \pi H / (T \tanh(k_s h))$ で k_s は微小振幅波理論による波数を表す。また 2. では、非線形緩勾配方程式が積分方程式から得られるために、連続式に関しても積分値で評価した。

(2) 結果および考察

非線形緩勾配方程式では、緩勾配の仮定を用いなければ、力学的境界条件は厳密に満たされることがわかっており、また、計算結果からも 10^{-4} より小さい値をとったので、図には含めなかった。

図-1 では、差分間隔は波長の 50 分割とし項数を変えた場合の精度の違いを示している。また、図-2 は、項数を 2 項にし、差分間隔を波長の 50, 100, 200 分割とした場合の結果である。両方の図とも 2% の等残差線を表す。図-1 より、項数を多くとることにより、 E_I , E_K といった、速度場に関する精度が良くなることがわかる。しかし、 E_R で表される波形の精度は、浅い水深 ($h/L_0 \geq 0.1$ 程度) では、項数の影響を受けないことがわかる。よって、

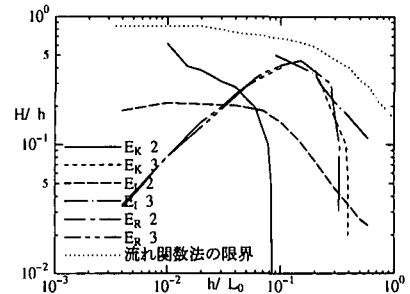


図-1 項数の違いによる精度

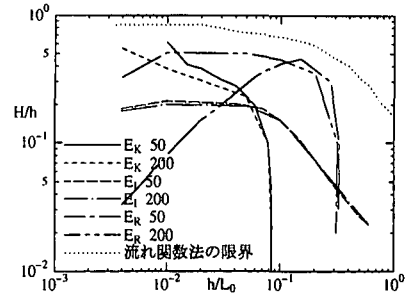


図-2 差分間隔の違いによる精度

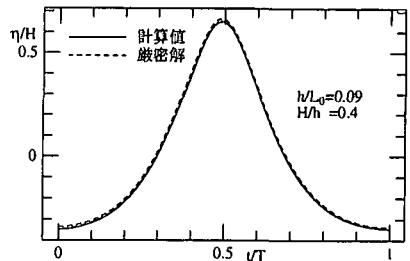


図-3 時系列波形 1

項数を 2 項で計算することは、非線形性の強い領域では速度のみの精度が悪くなるということが言える。図-2 から、差分間隔を細かくすると、長波領域における波形の精度のみが有意に良くなることがわかる。

図-3 は、 $h/L_0 = 0.09$, $H/h = 0.4$ での、時系列波形である。項数は 3 項、差分間隔は波長の 200 分割とした。誤差は、すべて 2% 以内となった。

碎波限界付近まで等残差線が描かれていないのだが、その理由は、大波高の場合に岸側境界での透過性境界条件の誤差が大きくなり、時間が経過するにつれその点で発散することと、初期条件を静水にしているため、遷移波の影響で計算が発散することのためである。そこで、遷移時間をできる限り短くし、計算領域をできる限り広くとり、波が境界に達する前に計算をやめたときの、時系列の波形が図-4 である。この方法により、 $h/L_0 = 0.01$ において、 $H/h = 0.8$ という相対波高まで計算できた。

計算時間は、格子点数の 2 乗に比例し、項数の 3 乗に比

例した。これらの結果より、本研究では、項数を3項にとり格子間隔を波長の200分割とすることで、碎波点付近の解析を精度良く計算することができるとし、以降の計算はすべてその条件で行った。

4. 碎波判定

(1) 進行波について

a) 碎波判定方法 碎波は波峰付近の最大水粒子速度が、波速を追い越したときに起こる現象と考えられる。よって、流速・波速比(γ_c)が1.0を越えた点を碎波点と定義した(式(5))。

$$\gamma_c \equiv \frac{u_m}{C} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、波速は、各時間ステップにおいて放物線近似した波峰点の進行速度と定義した。また、 u_m は放物線近似から求めた最大速度とした。

b) 計算方法 1/10, 1/20, 1/30, および 1/50 の一様勾配斜面で図-5 の様な領域で計算を行った。対象は規則波(周期8s)とする(重複波についても対象の波は同じである)。また、岸側水深は遷移波を碎波せずに通過させるために必要な水深とし、具体的には、合田の碎波指標から碎波水深を予想し、その水深の0.6倍とした。そして、2波目が碎波する点を求めた。

c) 結果および考察 図-6 および図-7 は碎波直前の波形とそのときの残差をあらわしたものである。このときの残差は1波でのrms値ではなく、各地点での時々刻々の残差であるので区別して小文字で示した。計算結果全体から見ると、 e_D は全体的に小さく最大でも10%であったが、 e_K は勾配が1/10の時に最も大きく、最大60%となった。また沖波波形勾配が大きいほど誤差も

大きくなった。しかし、碎波判定には計算結果をそのまま用いることにした。

図-8~図-11 は、得られた結果と合田の指標との比較である。図-8, 図-9 から、1/10の斜面勾配における実験式との差が $h_B/L_0=0.02$ より小さい水深で大きくなることがわかる。これは、偶数次べき乗関数では水底の鉛直速度が0になってしまうということが、原因のひとつと考えられる。しかし、碎波の実験データのばらつきも勾配が急になるほど大きくなっているため、計算精度の悪さだけの問題ではないと考えられる。

図-11 から碎波水深は、合田の結果とほぼ一致していることがわかる。また、勾配1/20における実験データとの比較をしたものが、図-12であるが、これを見ると、計算結果が実験データの上限をとっていることがわかり、これは理想的な状態を計算していることから妥当な結果ということがいえる。さらに、図-13は γ_c を0.8としたときおよび、0.9としたときとの比較である。 γ_c により、碎波点は大きくは変化していないが、これは碎波直前の γ_c の増加が急激であるためであり、必ずしも γ_c を1としなくても碎波点が決定的であるという、実用的には便利な性質を有している。なお、 γ_c を0.8としたとき、合田の指標と碎波水深を比較すると最大で35%の差が生じた。

また、最大水平方向水粒子速度の位置は、波峰点の位置よりすべて前方であり、最大は $0.9\Delta x$ 前方であり、ほぼ波峰と一致することが認められた。さらに、碎波点での

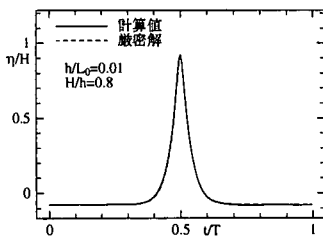


図-4 時系列波形 2

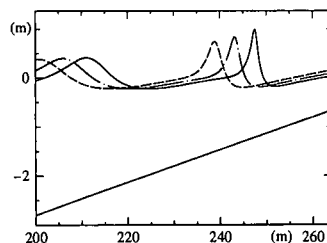


図-6 碎波直前の波形

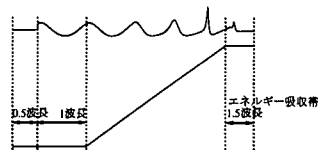


図-5 進行波の計算領域

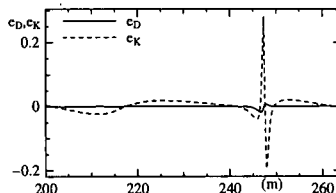


図-7 碎波直前の誤差

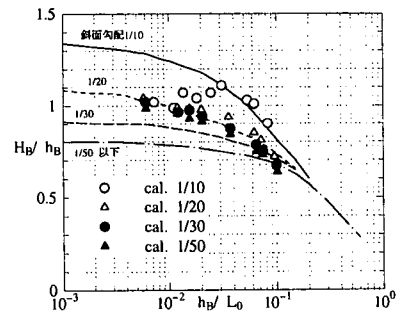


図-8 H_B/h_B と h_B/L_0 との関係

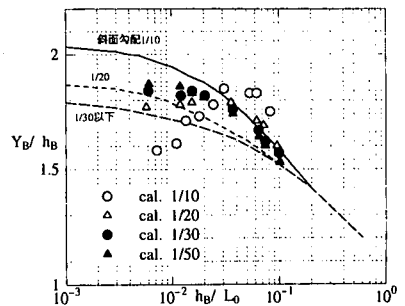


図-9 Y_B/h_B と h_B/L_0 との関係

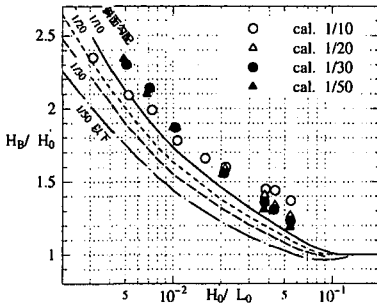


図-10 H_B/H_0 と H_0/L_0 との関係

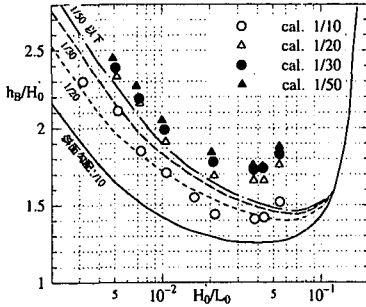


図-11 h_B/H_0 と H_0/L_0 との関係

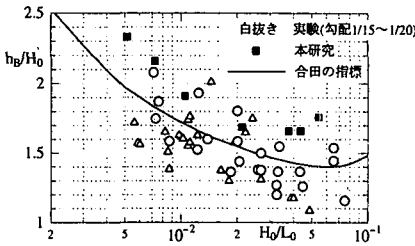


図-12 実験データとの比較

加速度比 (式 (6)) は、0.2 から 0.5 となった。

(2) 完全重複波について

a) 判定方法 完全重複波では、水面が腹の位置で最高水位に達したとき、水粒子の運動が上昇から下降にかわるが、このとき水粒子の下向きの加速度が最大となる。この最大加速度が重力加速度を越えたとき、完全重複波では碎波すると考えられる。これを、加速度比 (γ_a) として定義すると、

$$\gamma_a \equiv -\frac{Dw_s}{g} \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで、 w_s は表面での鉛直方向速度を表し、

$$\frac{Dw_s}{Dt} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{z=\eta} \dots\dots\dots (7)$$

である。

b) 計算方法 図-14 の様に、一様水深で両側から

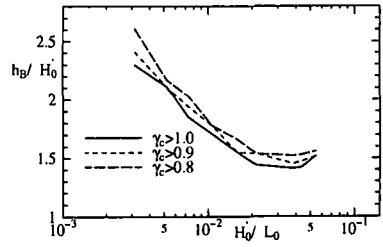


図-13 波速・流速比による違い



図-14 完全重複波の計算領域

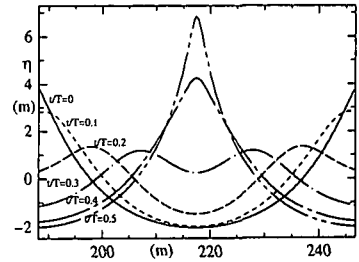


図-15 碎波直前の波形

同一の波を入射させ、加速度比を求め、1 を越えた時の波高を碎波波高とした。これも遷移波があるために2波目同士のぶつかりを調べた。

c) 結果および考察 図-15 および図-16 は、相対水深 (h/L_0) が 0.70 のときの碎波限界の波高のときの波形および誤差の評価である。誤差は全ケースでこれと同程度の大きさであった。図-17 は、Wiegel (1964) の指標と比較したものである。それを見ると、Wiegel の指標と良く一致していることがわかる。また、Wiegel の指標は実験データの上限を示しており、進行波と同じように考えると、完全重複波の碎波限界は加速度比が 1 を越えたときという考え方が妥当であることがわかる。

(3) 部分重複波について

a) 判定方法 これまでで、進行波の碎波は、波頂部の水平方向水粒子速度が波速を追い越したときに起きる現象であり、完全重複波の碎波は、波頂部での鉛直方向水粒子加速度が重力加速度より大きくなったときに起きる現象であることが確かめられた。そこで、部分重複波の碎波は、そのどちらか一方が満たされたときに起きると考えた。つまり、

$$\gamma_c \geq 1 \text{ or } \gamma_a \geq 1 \dots\dots\dots (8)$$

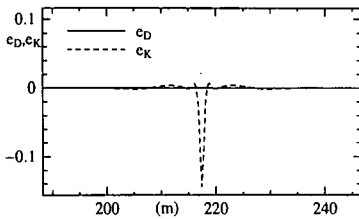


図-16 誤差

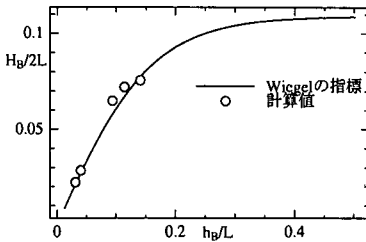


図-17 Wiegelの指標との比較

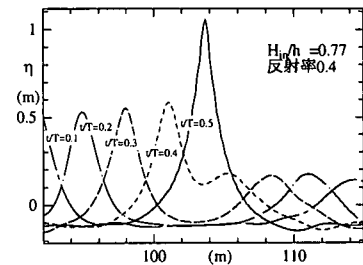


図-18 砕波直前の波形

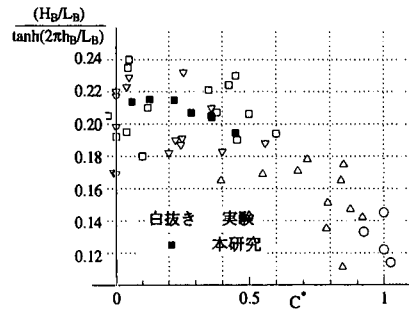


図-19 実験データとの比較

とする。

b) 計算方法 完全重複波の計算方法と同じく水平床で、両側から入射させる。ただし、片側の波の波高は、入射波の波高に反射率を乗じて求める。その際、波長も異なると考えられるので、流れ関数法で求めなおしたものを入射する。また、相対水深 (h/L_0) は 0.01 とした。

c) 結果および考察 図-18 は部分重複波における砕波直前の波形の 1 例である。図-19 が砕波判定の結果を、岩田ら (1983) の実験結果と比較したものである。 C^* は、波峰速度と波速の比であり、実際には数値計算から波峰速度を求め、入射波の波速で割った。これによると、実験結果の平均的な値をとっており、これまでのように上限をとっていない。これについては、今後検討するべきであるが、上述の方法によりほぼ砕波が判定できることが確かめられた。また、今回の実験の範囲では、すべて流速・波速比の方が先に砕波条件を満たしていた。つまり、部分重複波の砕波が進行波的な砕波をしていると考えることができる。残差については、完全重複波と同程度であり、砕波点での加速度比は、反射率 0.4 のときに 0.7、反射率 0.9 のときに 0.9 であった。

5. 結 語

本研究では、まず非線形緩勾配方程式の項数と解析精度の関係を明らかにした。そのうえで、精度良く砕波直前まで解析することにより、進行波は流速・波速比、完全重複波は加速度比を用いて、砕波の限界が既存の実験結果と整合性を保って、理論的に定められることを示し

た。さらに、部分重複波の砕波限界としては、流速・波速比または加速度比のどちらかが砕波条件を満たしたときと考え計算すると、今回の数値実験条件の範囲では、波速・流速比の方が先に 1 を越えることにより砕波することがわかった。

参 考 文 献

- 有川太郎 (1995): 非線形波の砕波変形シミュレーション, 第 50 回年次学術講演会講演概要集, 第 2 部 (B), pp. 786-787.
- 石井敏雅・磯部雅彦・渡辺 晃 (1993): 非定常緩勾配不規則波動方程式における境界条件の改良と実用化の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻 (1), pp. 31-35.
- 磯部雅彦 (1985): 有限振幅波の諸理論と適用範囲, 水工学シリーズ 85-B-1, pp. 1-25.
- 磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻 (1), pp. 1-5.
- 岩田好一朗・清野 博 (1983): 部分重複波の砕波限界に関する実験的研究, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 1-4.
- 合田良実 (1970): 砕波指標の整理について, 土木学会論文集報告集, 第 180 号, pp. 39-49.
- 田島芳満・磯部雅彦・渡辺 晃・横木祐宗 (1996): 非線形緩勾配方程式を用いた砕波限界に関する数値的研究, 海岸工学論文集, 第 43 巻 (1), pp. 66-70.
- 灘岡和夫・大野修史・栗原礼 (1996): 波動場の力学状態に基づく砕波過程の解析と砕波条件, 海岸工学論文集, 第 43 巻 (1), pp. 81-85.
- Wiegel, R. L. (1964): Oceanographical Engineering, Prentice Hall, p. 23.