

強分散性非線形平面波浪場に対する多層モデルの提案

金 山 進*

1. はじめに

平面波浪場の計算手法には近年ますます高い精度が要求されつつあり、重み付残差法や変分原理に基づいて流速、圧力あるいは速度ポテンシャルなどの変量を複数成分連成させた高精度の波動モデルがいくつか提案されている(灘岡・中川(1993), 後野(1994), 磯部(1994)). これらはいずれも対象とする波浪場に相応しい鉛直分布形状を用いて少ないモード数で高い精度を得ることが可能である。しかし、基本モードとして全水深で連続な関数を用いているため、平面波浪モデルとしての性格上当然のことともいえるが、没水鉛直壁や没水平板型の境界条件を取り込むことが不可能であり、進行波と著しく鉛直分布形状が異なる散乱モードの表現は困難である。

本研究では、鉛直方向に連続な基本モードを用いずに各深度の流速自体を多成分の構成要素とする多層モデルによる非線形分散平面波浪場解析方法を提案するとともにその基本的適用性について検討した。

2. 基礎方程式

多層モデルの基礎方程式は、静水深 h を N 層に分割(静水面直下を第1層, 最下層を第 N 層とする)し、鉛直方向に積分された連続式(1)および渦無しの条件に基づいて変形されたオイラーの方程式(2)を各層の平均水平流速 u_n を用いて表示することによって得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \int_{-h}^{\eta} u dz = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (u_s \cdot u_s + w_s^2) + g \nabla \eta \\ = - \nabla \int_z^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz' \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、 η は水位、 u は水平2方向の流速ベクトル、 w は鉛直流速、 g は重力加速度、 z は静水面を0とし上向きにとった鉛直座標、添え字 s は水表面 $z = \eta$ での値であることを意味し、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平方向の微分演算子である。

(1) 流速鉛直分布の表示

まず、鉛直流速 w は層毎に傾きを変える線形の鉛直分布を有するものと仮定し、連続の条件を用いて以下のよう

$$w(z) = - \sum_{i=n+1}^N d_i \nabla \cdot u_i - (h_n + z) \nabla \cdot u_n - u_b \cdot \nabla h \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 z は第 n 層に属するものとし、 $w(z)$ は鉛直流速、 d_n は層厚、 h_n は第 n 層下端までの深さ、 u_n は水平流速の層内鉛直平均値であり、 u_b は海底での水平流速である。

水平流速 u は式(3)を用いて渦無しの条件を海底から深度 z まで積分して以下のように表示される。

$$\begin{aligned} u(z) = u_n + \frac{1}{6} (d_n^2 - 3(h_n + z)^2) \nabla (\nabla \cdot u_n) \\ + \frac{1}{2} (d_n - 2(h_n + z)) \left[\sum_{i=n+1}^N \nabla (d_i \nabla \cdot u_i) \right. \\ \left. + \nabla h_n \nabla u_n + \nabla (u_b \cdot \nabla h) \right] \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

(2) 連続式

上記の表現で連続式(1)を書き換えると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla (d_i u_i) + \nabla (\eta u_1) \\ - \nabla \left[\frac{1}{2} \eta (d_1 + \eta) \left\{ \sum_{i=1}^N \nabla (d_i \nabla \cdot u_i) + \nabla (u_b \cdot \nabla h) \right\} \right] \\ + \frac{1}{6} \nabla [\eta (d_1^2 - \eta^2) \nabla (\nabla \cdot u_1)] = 0 \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

(3) 運動方程式

同様にオイラーの方程式(2)を書き換え、各層で鉛直平均すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (u_s \cdot u_s + w_s^2) + g \nabla \eta \\ = \nabla \left[\eta \sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\eta^2 \nabla \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + \eta \frac{\partial u_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right] + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^N \nabla \left(d_i d_j \nabla \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \nabla \left(d_i^2 \nabla \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \sum_{i=n+1}^N \frac{1}{2} d_n \nabla \left(d_i \nabla \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=n+1}^N (\nabla h_{n-1}) d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \left(d_n^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \right) \\
& - \frac{1}{6} d_n^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} d_n (\nabla h_n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \left(d_i \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right) + \frac{1}{2} d_n \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right) \\
& - (\nabla h_{n-1}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right) \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

ただし、水表面における流速 $\mathbf{u}_s$ は式 (4) を $z=\eta$ で外挿して

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_s &= \mathbf{u}_1 + \frac{1}{6} d_1^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) - \frac{1}{2} \eta^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) \\
& - \left(\frac{1}{2} d_1 + \eta \right) \left[\sum_{i=1}^N \nabla (d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right] \dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

で与え、鉛直流速 w_s は水表面での運動学的条件 (8) によって与える。

$$w_s = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \eta \dots\dots\dots (8)$$

水位 η と N 層の平均流速 $\{\mathbf{u}_n\}$ に海底流速 $\mathbf{u}_b$ を加えた $N+2$ 個の未知数に対して連続式 (5) と N 本の運動方程式 (6) では $N+1$ 個の条件式しか与えられないが、水平流速の鉛直分布を表す式 (4) において $n=N$, $z=-h$ として与えられる海底流速が $\mathbf{u}_b$ に等しいことを表す式 (9) が $N+2$ 個めの条件となる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_b &= \mathbf{u}_N + \frac{1}{6} d_N^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_N) \\
& + \frac{1}{2} d_N [\nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) + (\nabla h) \nabla \cdot \mathbf{u}_N] \dots\dots\dots (9)
\end{aligned}$$

(4) 没水平板型の境界条件について

没水平板型の境界は以下のようにして取り扱うことができる。第 nB 層の下端、すなわち $z=-h_{nB}$ の深度に水平板があるものとする

$$w(-h_{nB})=0 \dots\dots\dots (10)$$

なる条件が付加されるが、平板直下の圧力 p_B を新たな未知数とすることで条件式と未知数の数が一致する。

平板よりも上層に対しては運動方程式 (6) はそのまま適用されるが、下層に対してはオイラーの方程式 (2) の右辺を

$$-\nabla \left[\frac{p_B}{\rho} + \int_z^{-h_{nB}} \frac{\partial w}{\partial t} dz' - g\eta \right] \dots\dots\dots (11)$$

に置き換えた次式を用いることになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}_B \cdot \mathbf{u}_B) + \nabla \left(\frac{p_B}{\rho} \right) \\
& = \sum_{i=nB+1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^N \nabla \left(d_i d_j \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} \right) \\
& - \sum_{i=nB+1}^{n-1} \frac{1}{2} \nabla \left(d_i^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right) + \sum_{i=n+1}^N \frac{1}{2} d_n \nabla \left(d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=n+1}^N (\nabla h_{n-1}) d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \left(d_n^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \right) \\
& - \frac{1}{6} d_n^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} d_n (\nabla h_n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \nabla \left(d_i \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right) + \frac{1}{2} d_n \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right) \\
& - (\nabla h_{n-1}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right) \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

ここで $\mathbf{u}_B$ は平板直下での水平流速であり、式 (4) で $n=nB$, $z=-h_{nB}$ として与えられる。

平板端部における通常点との連結に際しては、隣接する通常点での p_B を以下のように表して式 (12) の圧力勾配項を与えればよい。

$$\begin{aligned}
\frac{p_B}{\rho} &= -\eta \sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\eta^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \right) \\
& - \eta \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h - \sum_{i=1}^{nB} \sum_{j=i+1}^N \nabla \left(d_i d_j \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} \right) \\
& - \sum_{i=1}^{nB} \left\{ \frac{1}{2} d_i^2 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right) + d_i \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right\} + g(\eta + h_{nB}) \\
& + \frac{1}{2} [\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2 - \mathbf{u}_B \cdot \mathbf{u}_B - w_B^2] \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

3. 基礎方程式の諸性質

1次元水平床の条件下での基礎方程式の分散関係および非線形性に対する精度を検証するため、Nwogu(1994)に倣って、基礎方程式に対してストークス流の擬動を施して得られる解をストークス波理論のものと比較する。ただし、Nwogu (1994) は非線形特性の検討に際して周波数の異なる2成分の波の2次干渉波を取り扱っているのに対して、ここでは単一成分波の2次波を対象とする。

水位 η および流速 $\mathbf{u}_n$ を微小量 ε のべき関数として以下のように表現する。

$$\eta = \sum_{p=1}^{\infty} \eta^{(p)} \cos p\psi, \quad \mathbf{u}_n = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p \mathbf{u}_n^{(p)} \cos p\psi \dots\dots\dots (14)$$

また、位相速度も現象の大きさに応じて変化することを考慮し、偏角 ψ は以下のように与える。

$$\psi = kx - \omega t = kx - \left(\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \omega_q \right) t \dots\dots\dots (15)$$

式 (10) および式 (11) を水平床1次元の多層連成波動方程式に代入し、 ε のべき数毎に整理する。

(1) 線形分散関係

ε のオーダーからは、連続式より式 (16) が、運動方程式より式 (17) が得られる。

$$\omega_0 \eta^{(1)} + k \sum_{i=1}^N d_i \mathbf{u}_i^{(1)} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned}
\omega_0 \mathbf{u}_n^{(1)} - gk\eta^{(1)} + k^2 \omega_0 \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^N d_i d_j \right) \right. \\
\left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \right] \mathbf{u}_i^{(1)} + \frac{1}{3} d_n^2 \mathbf{u}_n^{(1)} \dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

同次型の代数関係式である式 (16), 式 (17) が自明でない解を持つ条件から決定される線形の周波数 ω_0 と波数 k との関係は線形の分散関係に他ならず, $u_n^{(1)}$ は微小振幅波理論の流速鉛直分布に対応するものである。なお, 式 (16), 式 (30) は水平流速の鉛直分布を与える式 (4) において層の継ぎ目で流速が連続となる条件と一致することは容易に確認できる。

図-1 は, 多層モデルの線形分散関係を微小振幅波理論と比較したものであるが, 相対水深のかなり大きな範囲において層数 N の増加とともに理論値に漸近しており, 本モデルが広い周波数帯に適用できるものであることが確認される。なお, モデルの精度は層数が同じでも分割方法によって異なり, 上層ほど細かく分割したほうが等分割よりも良好な線形分散特性を示すが, ここでは第 n 層が第 1 層の n 倍の厚さとなるように分割している。

(2) 2次の非線形干渉

ε^2 のオーダーについて整理し, $\sin \psi$ の係数をまとめると式 (15) の ω_1 が 0 であることを示す関係式が得られるが, これはストークス理論において 2 次近似までは分散関係式が線形のもと同じであることに対応する。 $\sin 2\psi$ の係数を整理すると, 連続式と運動方程式からそれぞれ式 (18) および式 (19) が得られる。ただし, 既に $\omega_1 = 0$ の条件を用いている。

$$\begin{aligned} \omega_0 \eta^{(2)} - k \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(2)} \\ = \frac{1}{2} k \left[\left(1 - \frac{1}{6} d_1^2 k^2 \right) u_1^{(1)} + \frac{1}{2} d_1 k^2 \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(1)} \right] \eta^{(1)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 u_n^{(2)} + 4k^2 \omega_0 \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(2)} - g k \eta^{(2)} \\ = \frac{1}{4} k \left[\left(1 - \frac{1}{6} d_1^2 k^2 \right) u_1^{(1)} + \frac{1}{2} d_1 k^2 \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(1)} \right]^2 \\ - \frac{1}{4} k^3 \left(\sum_{i=1}^N d_i u_i^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{2} k^2 \omega_0 \eta^{(1)} \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(1)} \end{aligned} \quad (19)$$

$\eta^{(2)}$ と $\{u_n^{(2)}\}$ の $N+1$ 個の未知数に対する $N+1$ 個の条件式が与えられており代数的にこれらの値を求めることができる。

式 (18), 式 (19) から求められる $\eta^{(2)}$ を用いて多層モデルによるストークスの 2 次近似波形 η は以下のように表せる。ただし, H は波高である。

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \psi + \frac{H^2}{4(\eta^{(1)})^2} \cos 2\psi \quad (20)$$

一方, ストークス波理論による 2 次近似波形は式 (21) のように与えられるので, これを式 (20) と比較することによって多層モデルの 2 次の非線形性の精度を検証することができる。

$$\begin{aligned} \eta = \frac{H}{2} \cos \psi + \frac{H^2}{16} k \frac{\cosh kh (\cosh 2kh + 2)}{(\sinh kh)^3} \\ \cdot \cos 2\psi \quad (21) \end{aligned}$$

図-2 は, $\eta^{(1)}/h = 0.1$ の条件下で両式の右辺第 2 項 $\cos 2\psi$ の係数を比較したものであり, 横軸には kh , 縦軸は, 多層モデル (細線) では

$$\frac{\eta^{(2)}}{k(\eta^{(1)})^2} \quad (22)$$

理論解 (太線) では

$$\frac{\cosh kh (\cosh 2kh + 2)}{4(\sinh kh)^3} \quad (23)$$

をとっている。

比較のために示した Peregrine (1967) の Boussinesq 方程式と Nwogu (1994) の修正 Boussinesq 方程式に対

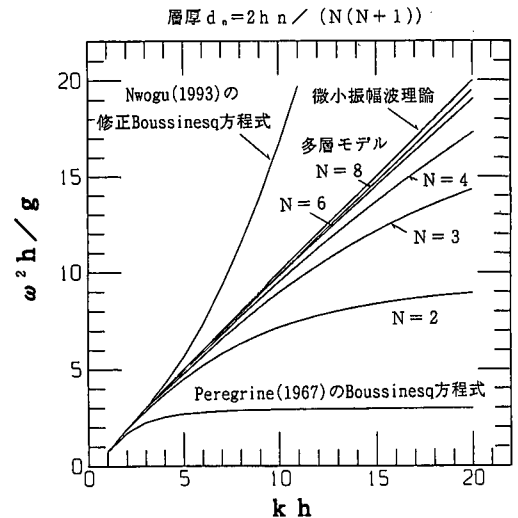


図-1 線形分散関係

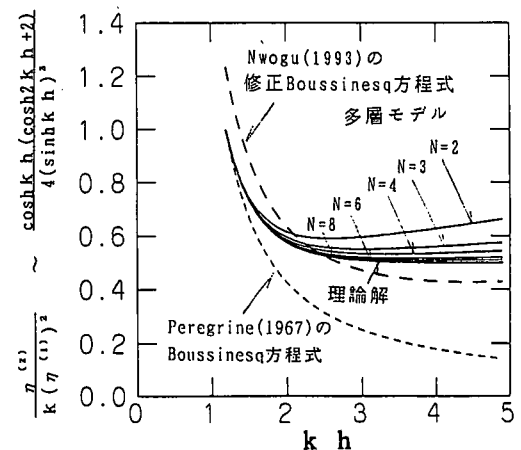


図-2 2次の非線形干渉

する結果は高波数域で不整合がみられるのに対して、多層モデルの結果は層数の増加とともに理論解に漸近しており、2次の非線形干渉までは正しく評価できることがわかる。

4. 数値計算

(1) 1次元で検証計算結果

1次元での検証計算として、磯部(1994)と同様、大山ら(1993)が鉛直2次元の強非線形ポテンシャルモデルに対する検証データとして採用した潜堤による規則波の変形の問題を扱った。

数値計算に際しては、水位と流速の定義点を空間方向にはスタガード、時間方向にはズレなしに配置し、時間・空間ともに中央差分を用いた。非線形項など時間微分の施されない項は2つの時間ステップにおける値の平均値で表示する予測子・修正子法とし、修正量の最大値が0.1%以下になった時点で時間ステップを進めた。

ここで取り扱った問題は、「海岸波動：土木学会編」において鉛直2次元の強非線形ポテンシャルモデルに対するテストケースとして採用されたものであり非線形性、

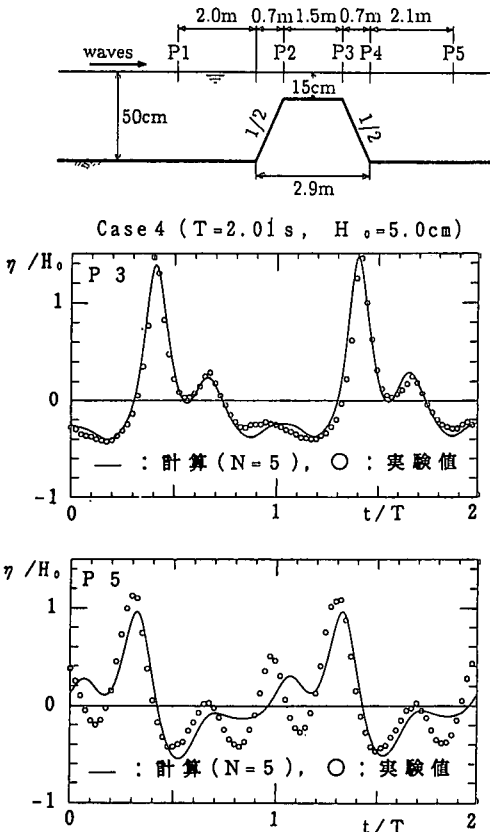


図-3 潜堤による規則波の変形の再現計算結果

分散性の表現にかなりの精度が要求されるが、図-3(層数5での結果)に示すように本モデルでも概ね良好な再現性が得られている。

(2) 平面2次元での試計算

平面2次元での試計算として平行等深線海岸に規則波が斜め入射した場合の波浪・流速場の算定を行った。

ただし、ここでは運動方程式として水深および層厚の空間勾配、静水面から水表面までの鉛直加速度の効果および圧力を表示する際の鉛直流速による非線形項を無視して簡略化した次式を用いた。

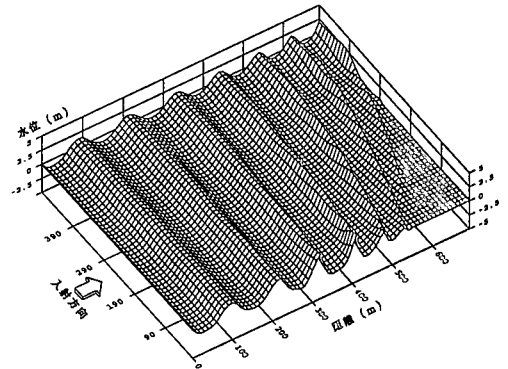


図-4 平面2次元3層モデルによる波浪場計算結果

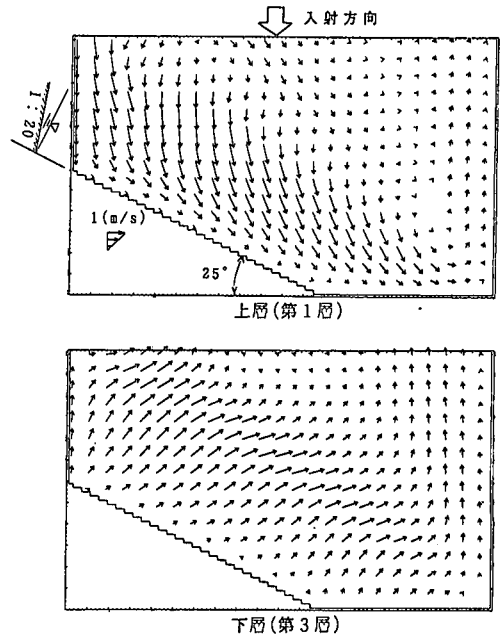


図-5 平面2次元3層モデルによる海浜流計算結果

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n + \frac{1}{d_n} \int_{-h_n}^{-h_{n-1}} w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz + g \nabla \eta \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^N d_i d_j \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} d_i^2 \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right) \\
&+ \sum_{i=n+1}^N \frac{1}{2} d_i d_n \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right) + \frac{1}{3} d_n^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \right) \\
&\dots\dots\dots (24)
\end{aligned}$$

ここで、左辺第3項は、式(3)、(4)より次のように表せる。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d_n} \int_{-h_n}^{-h_{n-1}} w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = \frac{1}{3} d_n^2 \nabla \mathbf{u}_n \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_n) \\
&+ \frac{1}{2} d_n \nabla (\nabla \mathbf{u}_n) \sum_{i=n+1}^N d_i \nabla \mathbf{u}_i \\
&+ \frac{1}{2} d_n \nabla \mathbf{u}_n \sum_{i=n+1}^N d_i \nabla (\nabla \mathbf{u}_i) \\
&+ \left(\sum_{i=n+1}^N d_i \nabla \mathbf{u}_i \right) \left(\sum_{i=n+1}^N d_i \nabla (\nabla \mathbf{u}_i) \right) \dots\dots\dots (25)
\end{aligned}$$

平面2次元での数値計算においては、水位は $\Delta t/2$ 毎に、 x 方向の流速と y 方向の流速は $\Delta t/2$ スラして Δt 間隔で交互に定義する ADI 法を採用した。非線形項は2つの時間ステップでの諸量の積の形で表現し、繰返し計算は行っていない。

砕波減衰の評価には片山・佐藤(1993)のモデルを用い、拡散項型の減衰が全層に作用するものとした。

図-4および図-5は海底勾配1/20の平行等深線海岸に規則波(沖端水深24mで波高3m, 周期10s)を斜め入射(25°)させた場合の平面2次元3層モデルによる計算結果であり、図-4は空間水位分布、図-5は上層(第1層)と下層(第2層)の平均流速場を描いたものである。砕波に伴う沿岸流と戻り流れが重合した様子が表現されている。

5. おわりに

強分散性非線形平面波浪場に対する任意層数の多層連

成波動モデルを提案し、その線形分散関係および2次の非線形干渉特性が層数の増加とともに理論値に漸近することを示した。また、1次元問題および若干の簡便化を伴うものの平面2次元問題に対する数値計算を行い、モデルの基礎的な適用性を示した。

多層モデルの特徴の一つである準3次元的な境界条件の取り扱いについては手法を示すにとどまったが、本モデルの実用化という課題とともに今後の目標とする。

謝辞: 本研究を行うに際し東北大学工学部の首藤伸夫教授、田中仁教授、東海大学工学部の後藤智明教授から貴重な御助言を頂いた。また、「浅海域における長周期波に関する研究会」の皆様からの貴重な御意見を参考とさせて頂いた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 磯部雅彦(1994): 非線形緩勾配方程式の提案, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 1-5.
- 大山 巧・喜岡 渉・多田彰秀(1993): 非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 11-15.
- 片山裕之・佐藤慎司(1993): Boussinesq 方程式を用いた不規則波の浅水砕波変形の計算法, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 16-20.
- 土木学会編(1994): 海岸波動, 一波・構造物・地盤の相互作用の解析法-1, 土木学会, 海岸工学委員会, 研究現況レビュー小委員会, 520 p.
- 灘岡和夫・中川康之(1993): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 6-10.
- 後野正雄(1994): 強非線形平面不規則波動場に対する連成振動方程式とその基礎的特性, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 16-20.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 119, No. 6, pp. 618-638.
- Peregrine, D.H. (1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 15, pp. 815-827.