

急流を伴う平面波動場の数値解析

——ブシネスク方程式と乱流モデルに基づいて——

林 雄一郎*・田 中 仁**

1. はじめに

非線形性を考慮した波浪場の計算は、波力・波の打ち上げの現象や波と構造物の干渉問題を考える上で重要である。既存の研究では角柱周りの回折波の計算を行うことにより、構造物近傍の非線形回折波として特徴的な水面変動が現れ、その挙動の解析にはブシネスク方程式に含まれる非線形項および分散項の効果が有用であることが報告されている(喜岡・長嶋, 1993)。しかし、ブシネスク方程式は非線形項の差分に加えて、分散項が3次以上の高次微分を含むため、高精度の差分近似を行う必要がある。そのため計算格子を十分小さくとる必要があり、1次元の波浪変形の計算には頻繁に用いられているが、平面波浪場の計算に用いた例は少ない。また再現計算において構造物隅角部で流速が過大評価される傾向があり(富沢・今村・首藤, 1990)、これを解消するために渦動粘性係数を便宜的に経験定数を用いて与えている例がある(片山・佐藤, 1993)が、本研究では水深平均化した乱流モデルを導入し、普遍的な渦動粘性係数を空間的に与えるを試みる。検証データとして水理実験装置による急流部を有する孤立波の実験結果を用い、急流部前後の水位および流速の分布特性について、数値計算と比較を行った。なお、モデルを非定常問題に適用するに先立ち、急流部を過ぎる定常流れの代表的な例である河口流出流を対象とする数値計算を行った。

2. 基礎方程式と計算対象の概要

2.1 基礎方程式

$x-y$ 平面が静水面に一致するように座標系を取り、ブシネスク方程式に水平拡散による運動量補正項を付加すると、支配方程式は次の連続の式(1)と水平二方向の運動量方程式(2)で与えられる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial L_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

$$\frac{DL_i}{Dt} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + f_i = D_i + B_i \quad (2)$$

ここで、 η : 水位、 L_i : 線流量、 x_i : 平面座標、 g : 重力加速度、 D : 全水深であり、また、式(2)中の各項は次式により与えられる。

$$L_i = U_i(h + \eta) \quad (3)$$

$$f_i = \frac{\tau_i}{\rho} = \frac{gn^2}{D^{7/3}} |L_i| L_i \quad (4)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u_i u_j}) \quad (5)$$

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial L_i}{\partial x_j} + \frac{\partial L_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k D \delta_{ij} \quad (6)$$

$$B_i = \frac{k^2}{3} \left(\frac{\partial^3 L_j}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \right) \quad (7)$$

ここで、 U_i : 水平流速、 h : 静水深、 τ_i : 底面せん断力、 n : マニングの粗度係数、 ρ : 流体密度、 $-\overline{u_i u_j}$: レイノルズ応力、 ν_t : 渦動粘性係数、 k : 乱流エネルギー、 δ_{ij} : クロネッカーのデルタである。

乱流量の輸送方程式は、乱流エネルギー k 、逸散率 ϵ を変数とした水深平均 $k-\epsilon$ モデル (Rastogi and Rodi, 1978) に準じ、さらに流線の曲がりを考慮した修正を行っている (Leschziner and Rodi, 1981)。

$$\frac{Dk}{Dt} = D_k + P_{kh} + P_{kv} - \epsilon \quad (8)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = D_\epsilon + P_h + P_{gv} - C_\epsilon \frac{\epsilon^2}{k} \quad (9)$$

$$\nu_t = C_{\mu h} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (10)$$

ここで、上式右辺の各項の表現については上記文献を参考されたい。

2.2 河口流出流の計算

表-1に示すように、2種の平面2次元 $k-\epsilon$ モデルの他に2種のモデルを用いて主に運動量の拡散について比較・検討を行い、各モデルの特性を考察した。Model 1は浅水方程式を用いたモデル、Model 2はModel 1に拡散項を付加し、水平拡散係数 K_h として次式 (Fischer, 1973) を用いたモデルである。

$$\nu_t = K_h = 0.6 DU_* \quad (11)$$

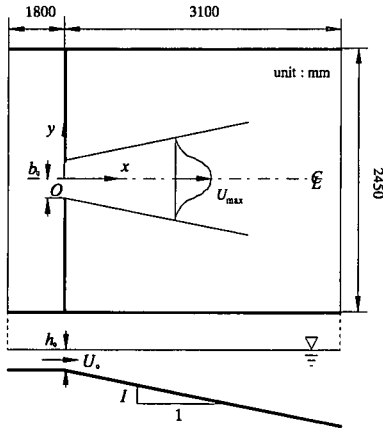
ここで、 U_* : 摩擦速度であり、係数 0.6 は実河川に対してチューニングされたものである。Model 3は水深平均化した $k-\epsilon$ モデルをそのまま用いたもので、さらにModel 4は修正 $k-\epsilon$ 型モデル (Leschziner and Rodi,

* 正会員 工修 建設省北陸地方建設局 黒部工事事務所

** 正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻

表一 本研究で用いたモデル

Model	支配方程式
Model 1	浅水方程式
Model 2	浅水方程式+拡散項 ($K_h=0.6DU_h$)
Model 3	水深平均 $k-\varepsilon$ モデル
Model 4	修正水深平均 $k-\varepsilon$ モデル



図一 河口部流れの計算領域

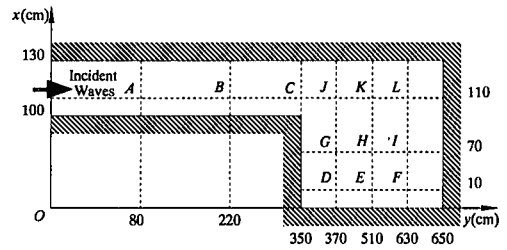
1981)である。この修正は、元来 $k-\varepsilon$ モデルが剛な面と流体のせん断から構成される壁面乱流を想定して式中の各係数を決定したもので、噴流のような自由乱流とは別種に分類されることによるものである。それ故に流線の曲がりを考慮した生産項あるいは逸散項の補正を行うことでその効果を取り入れようとするものである。

計算領域は図一のとおりで、元来 Tidal Jet を想定したもので仕切板が河口狭窄部を模擬したものである。ここでは、2つのケースについて計算を行った。一つは運動量水平拡散効果が顕著に現れる様に海浜部勾配 $I=0$ 、河口部水深 $h_0=3$ (cm)、河口流出速度 $U_0=20$ (cm/s) の条件下で数値模擬実験を行った。次にもう一つのケースとして、実験値との比較を行いその再現性について考察を行った。比較対象実験として Ozsoy (1977) の行った実験データを用い、流量を図一の上流端で与え、仕切板に向かって縮流した流れは、その後噴流の性質を持って下流端に向かって流下する。図一中の諸量として、 $I=0.015$ 、 $h_0=4.5$ (cm)、 $U_0=9.0$ (cm/s) を設定し、実験値と比較を行った。いずれのケースも数値計算には水位と流量の格子点を半分ずつずらした差分格子を用いて陽的に数値積分を行い、収束解を求める。

今回用いた正方空間格子間隔 $\Delta x=5$ (cm)、時間格子間隔 $\Delta t=0.01$ (s) は十分に C.F.L 条件を満たす。

2.3 急拡部を過ぎる孤立波の計算

計算は富澤 (1990) の実験を対象として行われた。造



図二 急拡部を過ぎる孤立波の計算領域

波水槽の平面形状を図二に示す。

流れ場の支配方程式には、前節に示した Model 4 を用いる。ブシネスク方程式は、長波の方程式に分散項を導入したものであるため、深海条件では波の分散特性を精度良く記述できなくなる恐れがある。このため、補正係数を導入して、深海域と浅海域での分散性を統一した形で合理的に表現できる方程式系も提案されており (Madsen et al., 1991)、その適用条件も検討されているが、実験水槽の形状より、導入を見送った。

分散項を含めた数値計算では通常、離散化に伴う誤差と分散項のオーダーが同程度であるため、格子間隔が大きな時には3次の修正項を加える必要がある (Madsen et al., 1991) が、本研究では、格子幅は十分小さく取ることとし、Madsen et al. (1991) の研究を参考に空間格子幅は波長の $1/25$ 程度、時間ステップは周期の $1/30$ 程度を目安とし、 $\Delta x=5$ (cm)、 $\Delta t=0.01$ (s) とした。離散化の際には、水位と流量の格子点を半分ずつずらした差分格子を用い、ADI 法を用いて数値積分した。

また、空間差分には2次以上の精度を持ったスキームを使用し、数値粘性と流れの拡散を表す2階の拡散項と区別が付くような形になっている。すなわち、1次精度の上流差分法では、打ち切り誤差が粘性の働きをすることにより、実際の粘性を覆い隠してしまい、実は低いレイノルズ数の流れを計算していることになりかねない。本研究では、上流差分あるいはそれに準じた差分スキームが必要とされる場合、次式のような3次精度のスキームを使用した。

$$f \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \begin{cases} f_i(2\phi_{i+1} + 3\phi_i - 6\phi_{i-1} + \phi_{i-2})/6\Delta x & (f_i > 0) \\ f_i(-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} - 3\phi_i - 2\phi_{i-1})/6\Delta x & (f_i < 0) \end{cases} \quad (12)$$

この場合、誤差が $(\Delta x)^3$ のオーダーで精度がよいだけでなく、誤差の主要項は、4階の微係数を含んだ拡散項になっており、4階の拡散項は、流れの拡散を表す2階の拡散項と区別が付き、しかも2階に比べ高波数成分を有効に拡散することができる。

検証データとしては富澤 (1990)、富澤ら (1990) を用

いた。富澤ら (1990) の計算では入射境界条件として、実験から得た波形を入射させたが、本研究ではこれに代わり孤立波の第 1 次近似を与えた。

3. 計算結果

3.1 河口流出流の計算結果

水平拡散効果が顕著なケースに対して行われた各モデルの計算結果から流関数の等値線を図-3 に示す。図は y 軸が正のみだが、実際は x 軸を対象軸として左右対称になる全領域を計算対象としている。各モデルの流線の広がりや定性的な比較にとどまるが、それぞれ差異が見られ興味深い。Model 1 では開口部から流線はほぼ直線のままで、ほとんど運動量が横断方向に輸送されない。Model 3 は一般に渦動粘性係数 ν_t が過大評価されるので、水平拡散効果が大きく、流線の広がりも大きい。Model 4 は Model 3 と比較して流線の広がりは抑えられ、補正の効果が現れている。Model 2 と Model 4 では全く異なる拡散係数を用いているのにも係わらず中心軸上近傍では流線の幅が同じ様な傾向をしており後にさらに検討を行う。

次に Ozsoy (1977) の実験結果に基づく Tidal Jet を想定した計算結果について考察する。図-4 に中心軸上の流速分布を示す。流軸方向には開口幅で、流速は開口部

流速で無次元化している。図-3 から予想されるように Model 1 は水平拡散効果が過小評価されるので、中心軸上の運動量は過大評価される。一方、Model 3 は逆に実験値と比較して過小評価となる。ここでも Model 2 と Model 4 の差異はほとんど見受けられない。

運動量の広がりを半値幅として比較した図が図-5 である。図中の理論曲線は Ozsoy (1977) が導いた式である。式中には河口前面の勾配、底面摩擦の効果、水平拡散効果に相当するせん断力項は含まれるが、水位変動は考慮していない。また、式中の水平拡散項はその大きさの評価に連行係数という経験係数を用いており、普遍的に扱える式とは言えない。したがって計算値と一致することを目的とするのではなく、どの程度計算と差異があるかを考察する。Model 1 と Model 3 はそれぞれ図-3 について考察したことが直接的に現れている。また Model 2 と Model 4 の広がり角はほぼ等しいが、理論曲線と比べると広がり角がやや大きい。

Model 2 と Model 4 の流況は水平拡散係数の定義が異なるのにも係わらずほぼ等しかった。Model 2 と Model 4 の拡散係数の空間分布は図-6 の様である。水平拡散係数 K_h の空間分布は図-6 上図の様になり、最大値が中心軸上に分布する形態となる。一方、Model 4 の ν_t の分布は急流部から双頭の最大値分布が流下方向に向かって延びており、全く異なる形態となる。 K_h は U_i に依存し、すなわち各場での流速の絶対値に比例するのに対し、 ν_t は $\partial U_i / \partial x_j$ が大きくなれば流れの回転成分が大きいところで最大値を取るためである。(11) 式中の係数 0.6 は経験係数で普遍性はないが、実験等で適切にチューニングされた値で流れ場の再現性は良いのに対し、修正 $k-\varepsilon$ モ

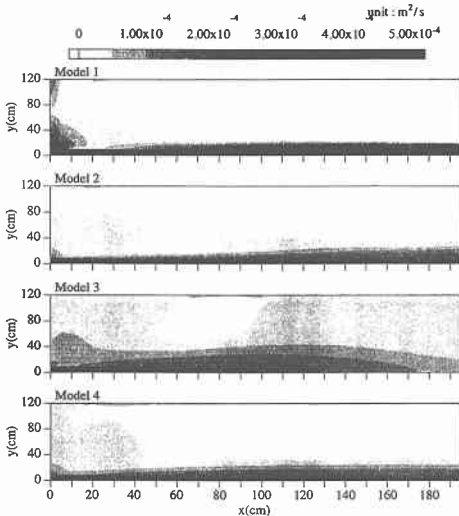


図-3 河口前面での流線の広がり

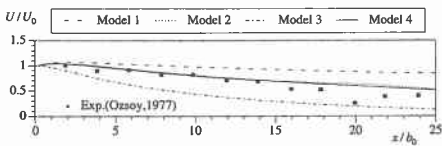


図-4 中心軸流速分布

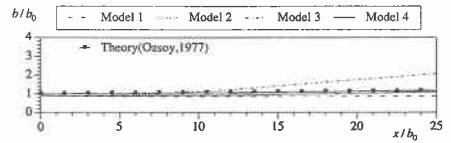


図-5 半値幅の広がり

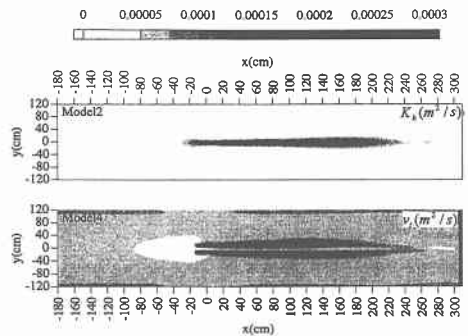


図-6 水平拡散係数の空間分布

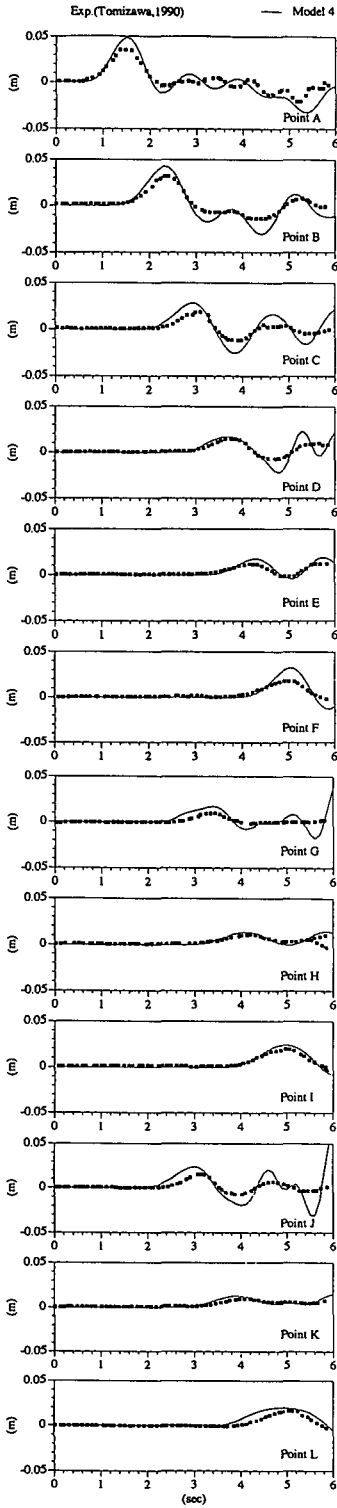


図-7 水位の経時変化

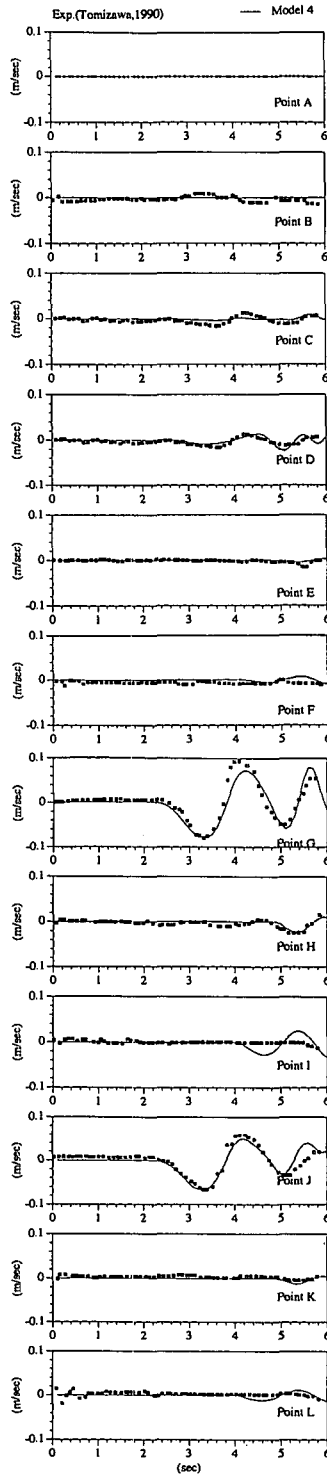


図-8 x 方向流速の経時変化

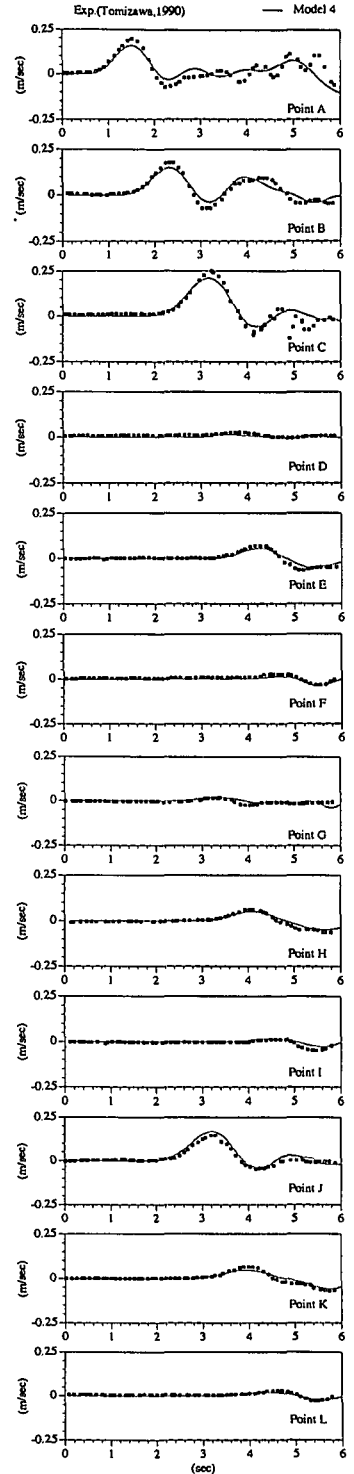


図-9 y 方向流速の経時変化

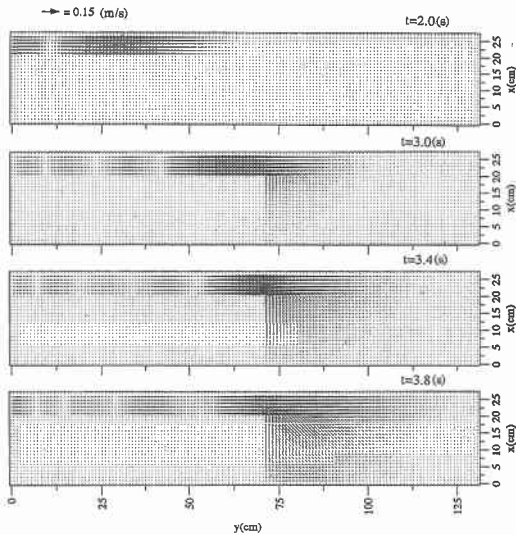


図-10 流速の空間分布

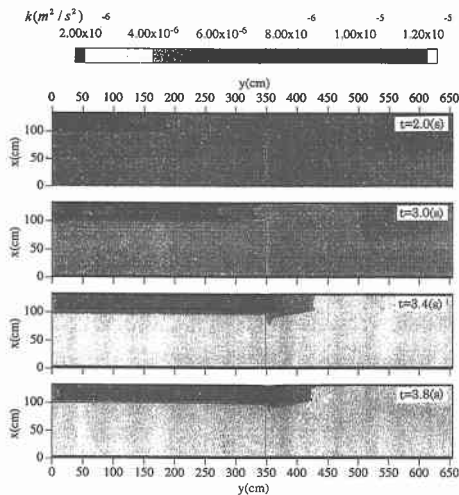


図-11 乱流エネルギーの空間分布

デルは解くべき式は増えるが、応用例は広くより現実に近い流れ場を予想できると言える。

3.2 急拡部を過ぎる孤立波の計算結果

実験値との比較を行う測点として図-2のような合計12点を設定し、図-7の水位、図-8の x 方向流速、図-9の y 方向流速の項目に関して時間波形の検証を行う。まず測点Cは急拡前の1次元伝播問題であり、進行方向の流速成分に当たる y 方向流速は、十分再現することができ、急拡への入射条件として適切であることを確認した。急拡後の測点G, Jは、波伝播直角方向に相当する x 方向流速に、広がりを示す特徴的な流況が観測されている測

点であり、計算値は実験で観測された値とほぼ一致し、本計算法の妥当性を明らかになった。運動量の広がりには主に場所的な圧力勾配によって行われると推察する。

図-10は流速区間分布の経時変化を示したものであり、これに対応する乱れエネルギーの分布を図-11に図示した。図-11によれば $t=3.8$ sにおいて隅角部に k の最大値が見られる。このような乱流特性の空間分布の詳細な情報は、物質拡散問題を扱う際にきわめて有効であると予想される。

4. おわりに

ブシネスク方程式を用いて急拡部を通過する孤立波を対象にし、水位・流速の再現計算、運動量拡散について評価を行った。主峰の広がり等、既存の実験と良好な一致を示すことによって本計算法の妥当性を明らかにした。また流れ場に対応した乱流量の空間分布が得られ、物質輸送問題への拡張性が示された。今後、これらの方面での応用計算を実施する予定である。

謝辞：本研究を行うにあたり、東北大学工学部・今村文彦助教授から貴重な実験データの提供を受けるとともに、様々な助言を頂いた。また、本研究に対して文部省科学研究費（基盤研究（B））、代表：東北大学・澤本正樹教授の補助を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 片山裕之・佐藤慎司 (1993): Boussinesq 方程式を用いた不規則波の浅水・碎波変形の計算法, 海岸工学講演会論文集, 第40巻, pp. 16-20.
- 喜岡 渉・長嶋禎泰 (1993): Boussinesq 方程式による構造物近傍の非線形平面波の解析, 海岸工学講演会論文集, 第40巻, pp. 596-600.
- 富澤 大 (1990): 浅海での津波の変形に関する水理及び数値実験, 東北大学大学院工学研究科修士論文, 118 p.
- 富沢 大・今村文彦・首藤伸夫 (1990): 急拡部を通過する津波の水理特性, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 131-135.
- Fischer, H. B. (1973): Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open channel flow, Annual Review of Fluid Mech. Vol. 5, pp. 59-78.
- Leschziner, M. A. and W. Rodi (1981): Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulence model variations, J. Fluids Eng., Transactions, ASME, Vol. 103, pp. 352-360.
- Madsen, P. A., R. Murray and O. R. Sorensen (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 371-388.
- Ozsoy, E. (1977): Flow and Mass Transport in the Vicinity of Tidal Inlets, Technical Report UFL/COEL, TR-036, 206 p.
- Rastogi, A. K. and W. Rodi, (1978): Prediction of heat and mass transfer in open channels, J. Hydraulics Division, ASCE, Vol. 104, No. HY3, March, pp. 379-420.