

造波水路内の波峯分裂のメカニズムについて

合 田 良 実*・賀 川 真 有**

1. ま え が き

造波水路で非線形性の強い波を発生させると、波峯が分裂して二次波峯が出現する。二次波峯の存在は Morison と Crook (1953) が最初に報告し、その後、合田 (1961, 1967) は二次波峯の進行速度が主峯よりも遅いために二次波峯が主峯に追い付かれ、やがてその背後に再び出現する再帰現象を示すことを詳しく報告し、再帰間隔の推定図表を提示した。また波形のフーリエ解析を行なうと、主峯に吸収される地点では基本周波数成分の振幅が最大、高調波成分の振幅が最小であり、二次波峯が主峯の中間に出現する地点では前者が最小、後者が最大となる。各周波数成分の間であたかもエネルギーの授受が起きているかのようであるが、その原因は不明であった。

二次波峯の出現は、造波板を正弦波形で運動させるためにストークス波で表現されるような高調波成分とのミスマッチによるものである。Fontanet (1961) は二次オーダーの造波理論を導き、このことを明示した。二次波峯は水路内の波形の恒常性を損なうため、それを発生させないための工夫が Buhr Hansen・Svendsen (1974) と Hulsbergen (1974) によって提案された。

波峯の分裂現象は波が潜堤や矩形ステップの上に進行するときにも顕著に現われる。波の分裂による波形の変化は、非線形波動方程式の数値解析によって再現され、そのことが数値計算法の妥当性の一つの証明とされてきた (たとえば大山・灘岡 (1992), 榊山 (1992) など)。

しかしながら、二次波峯の移動に伴う各周波数成分の振幅の再帰的变化の原因については不明のままであった。Madsen・Sørensen (1993) は成分波間の resonance による 3 次干渉によるエネルギー授受を示唆したものの、定量的な吟味は行なっていない。本論文は、正弦運動を行なうピストン型造波板による発生波の 3 次オーダー解を摂動法によって求め、各成分波間の非線形干渉を計算することによって波峯の分裂現象のメカニズムを明らかにするものである。

2. 理論解析とその結果

(1) 水路内の波形の表示式

造波水路内には、まず造波板によって発生する波 η_C がある。この波は、基本周波数成分に拘束されたストークス波の 2 倍・3 倍周波数成分を随伴するが、造波板はそのような周波数の運動を行なっていない。そのため造波板位置で拘束波の水平速度成分を打ち消すような自由波 η_F が必然的に励起される。この発生波 η_C と自由波 η_F の間の 3 次オーダーの非線形干渉の結果として干渉波 η_T が励起される。これらの波形は次のように表される。

$$\eta(x, t) = \eta_C(x, t) + \eta_F(x, t) + \eta_T(x, t) \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに、各成分波は 1 次発生波の振幅 a の摂動展開として以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \eta_C(x, t) = & (a + a_{C1}) \cos(k_1 x - \omega t) \\ & + a_{C2} \cos(2k_1 x - 2\omega t) \\ & + a_{C3} \cos(3k_1 x - 3\omega t) \cdots \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_F(x, t) = & a_{F2} \cos(k_2 x - 2\omega t + \alpha_{F2}) \\ & + a_{F3} \cos(k_3 x - 3\omega t + \alpha_{F3}) \cdots \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_T(x, t) = & a_{T1} \cos[(k_2 - k_1)x - \omega t + \alpha_{T2}] \\ & + a_{T3} \cos[(k_2 + k_1)x - 3\omega t + \alpha_{T2}] \\ & \cdots \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

ここに、 k_1, k_2, k_3 は次式で与えられる波数である。ただし、水深は h 、重力加速度は g である。

$$m^2 \omega^2 = g k_m \tanh k_m h \quad : \quad m = 1, 2, 3 \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

式 (2) 以下の振幅 a_{C1} 等については合田 (1997) が次のように求めている。

$$\left. \begin{aligned} a_{C1} &= \frac{1}{16} k_1^2 a^2 (3c_1^4 + 8c_1^2 - 9) \\ a_{C2} &= \frac{1}{4} k_1 a^3 (3c_1^3 - c_1) \\ a_{C3} &= \frac{3}{64} k_1^3 a^3 (9c_1^6 - 3c_1^4 + 3c_1^2 - 1) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (6)$$

$$c_1 = \coth k_1 h$$

$$a_{F2} = k_2 a^2 b_{F2} \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{F3} &\approx \frac{1}{6} k_3^2 a^3 \beta_{F3} \sinh k_3 h \\ a_{F3} &\approx \pi \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (8)$$

* フェロー 工 師 横浜国立大学教授 大学院工学研究科

** 横浜国立大学大学院 工学研究科

$$a_{T1} = \frac{1}{2} k_2^2 a^3 b_{F2} \left(1 - \frac{k_1}{k_2} \right) \times \frac{(2c_2 + c_1) \coth(k_2 - k_1)h + 2c_2 c_1 - 3}{\coth(k_2 - k_1)h - 4c_2 + c_1} \quad \dots\dots (9)$$

$$a_{T3} = \frac{1}{2} k_2^2 a^3 b_{F2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \times \frac{3(2c_2 + c_1) \coth(k_2 + k_1)h + 2c_2 c_1 - 7}{9 \coth(k_2 + k_1)h - 4c_2 - c_1} \quad \dots\dots (10)$$

ここに、 $c_2 = \coth k_2 h$ である。

上記の式中の係数 b_{F2} , a_{F2} , β_{F3} , β_{FC} , β_{F3} は以下による。

$$b_{F2} = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_{FC}^2 + \beta_{F3}^2} \sinh k_2 h \quad \dots\dots (11)$$

$$a_{F2} = \tan^{-1}(\beta_{FC}/\beta_{F3})$$

$$\beta_{FS} = -12 \frac{D_0 D_1 \cosh D_2}{(2D_2 + \sinh 2D_2)(D_2^2 - 4D_1^2) \sinh^2 D_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n D_0 (D_n \beta_1 - D_1 \beta_2)(4D_0^2 - 2D_1^2 + D_2^2 + 2D_n^2)}{(2D_2 + \sinh 2D_2)[(D_1^2 + D_2^2 + D_n^2)^2 - 4D_1^2 D_2^2]} \times \cosh D_1 \cosh D_2 \cos D_n \quad \dots\dots (12)$$

$$\beta_{FC} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n D_0 (D_1 \beta_1 + D_n \beta_2)(4D_0^2 - 2D_1^2 + D_2^2 + 2D_n^2)}{(2D_2 + \sinh 2D_2)[(D_1^2 + D_2^2 + D_n^2)^2 - 4D_1^2 D_2^2]} \times \cosh D_1 \cosh D_2 \cos D_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A_m A_n \beta_1 D_0 (D_m + D_n)[(D_m - D_n)^2 + 4D_0^2]}{D_m D_n (2D_2 + \sinh 2D_2)[(D_m + D_n)^2 + D_2^2]} \times \cosh D_2 \cos D_m \cos D_n \quad \dots\dots (13)$$

$$\beta_{F3} = 6 \frac{D_1^2}{D_3} \frac{\beta_{33}}{(2D_3 + \sinh 2D_3)} \times \left[\frac{\sinh(D_3 + 3D_1)}{D_3 + D_1} + \frac{\sinh(D_3 - 3D_1)}{D_3 - D_1} \right] \quad \dots\dots (14)$$

$$\beta_{33} = \frac{1}{33C_1^3} (c_1^5 + 3)(9c_1^5 - 22c_1^3 + 13C_1) \quad \dots\dots (15)$$

ここに、

$$\beta_1 = \frac{-6 + (\coth^2 k_1 h - \cot^2 \lambda_n h)}{4 \cosh k_1 h \cos \lambda_n h}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sinh k_1 h \sin \lambda_n h}$$

$$\beta_4 = \left[\cot^2 \lambda_n h - (\cot \lambda_m h \cot \lambda_n h + 3)/2 \right] / \left[(\cot \lambda_m h + \cot \lambda_n h) \sin(\lambda_m + \lambda_n) h - 4 \cos(\lambda_m + \lambda_n) h \right] \quad \dots\dots (16)$$

$$A_n = \frac{k_1 (2k_1 h + \sinh 2k_1 h) \sin 2\lambda_n h}{\lambda_n (2\lambda_n h + \sinh 2\lambda_n h) \sinh 2k_1 h} \quad \dots\dots (17)$$

なお A_m は A_n と同形式であり、いずれも進行波に対する造波板近傍の減衰定常波の振幅の比率を表す。また λ_n は減衰定常波の波数であり、次式の解で与えられる。

$$\omega^2 = -g\lambda_n \tan \lambda_n h : n=1, 2, 3, \dots \quad \dots\dots (18)$$

また、 D_0 等は以下の略記号である。

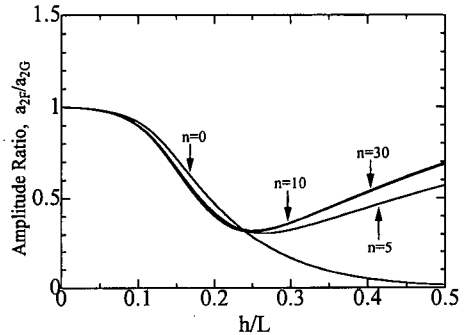
$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \omega^2 h/g, & D_1 &= k_1 h, & D_2 &= k_2 h \\ D_3 &= k_3 h, & D_m &= \lambda_m h, & D_n &= \lambda_n h \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (19)$$

以上で求めた自由波 η_C の 2 次項は、造波板から離れて進行する 2 倍周波数成分を補償する成分のみでなく、造波板近傍の減衰定常波に起因する成分を合わせた解である。ただし、自由波 η_C の 3 次項である a_{F3} と a_{F3} の解は発生波 η_C の 3 倍周波数成分を補償する成分のみを求めたもので、減衰定常波に起因する成分は計算していない。

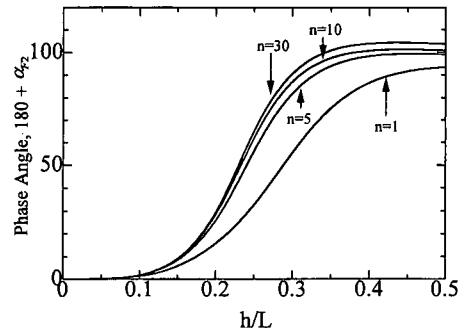
なおここに示した理論解は、2 次運動の水平速度が 0 という境界条件を造波板の中立位置 $x=0$ で与えて導いたものである。五洋建設(株)の関本恒浩博士は著者宛の書簡の中で、この境界条件は造波板の各瞬時の位置で与えるべきであることを指摘しておられる。そのような変更を行うと、 β_{FC} の解に影響が出ると予想されるが、詳細については未検討である。

(2) 成分波の振幅・位相の計算

以上の諸式に基づいて波形を計算する際には、式(12)、(13)の級数の項数が問題になる。図—1, 2 は、2 倍周波数の自由波と拘束波の振幅比 a_{F2}/a_{C2} および位相 a_{F2} を項数 n , m を変えて計算した結果である。この結果に基づき、本論文では $n=m=30$ ですべての計算を行なっ



図—1 2 倍周波数成分の振幅に及ぼす級数の項数の影響



図—2 2 倍周波数成分の位相 ($180^\circ + \alpha_{F2}$)

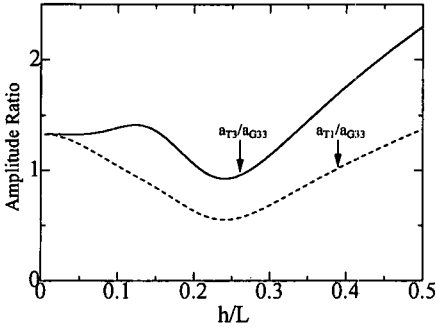


図-3 3次オーダーの干渉波の振幅

た。なお、位相 a_{F2} は $n=0$ のとき 180° となるので、図-2 には $n=1$ 以上について示してある。

また、図-3 は 3 倍周波数の干渉波と拘束波の振幅比 a_{T1}/a_{G3} と a_{T3}/a_{G3} を示す。なお図-2 から分かるように、水深波長比 h/L が小さいときは 2 倍周波数成分の自由波の位相は拘束波から約 180° ずれており、振幅の正負が逆転している。振幅比 a_{F2}/a_{G2} については Flick・Guza (1980) がやや異なる結果を示している。ただし、計算式を提示していないので差異の原因は不明である。

(3) フーリエ振幅の場所的变化

式 (1)~(4) の波形を同一周波数成分ごとにまとめると、次のような結果が得られる。

[基本周波数成分]

$$\begin{aligned} \eta(x, t; \omega) = & (a + a_{G1} - a_{T1})\cos(k_1x - \omega t) \\ & + a_{T1}\cos\left[\left(\frac{k_2}{2} - k_1\right)x + a_{F2}/2\right] \\ & \times \cos\left[k_2x/2 - \omega t + a_{F2}/2\right] \cdots \cdots (20) \end{aligned}$$

[2 倍周波数成分]

$$\begin{aligned} \eta(x, t; 2\omega) = & (a_{G2} - a_{F2})\cos(2k_1x - 2\omega t) \\ & + a_{F2}\cos\left[\left(\frac{k_2}{2} - k_1\right)x + a_{F2}/2\right] \\ & \times \cos\left[\left(\frac{k_2}{2} + k_1\right)x - 2\omega t + a_{F2}\right] \cdots \cdots (21) \end{aligned}$$

[3 倍周波数成分]

$$\begin{aligned} \eta(x, t; 3\omega) = & (a_{G3} - a_{T3} - a_{F3})\cos(3k_1x - 3\omega t) \\ & + a_{T3}\cos\left[\left(\frac{k_2}{2} - k_1\right)x + a_{F2}/2\right] \\ & \times \cos\left[\left(\frac{k_2}{2} + 2k_1\right)x - 3\omega t + a_{F2}/2\right] \\ & + a_{F3}\cos\left[\left(\frac{k_3}{2} - 3k_1\right)x/2 + a_{F3}/2\right] \\ & \times \cos\left[\left(\frac{k_3}{2} + 3k_1\right)x/2 - 3\omega t + a_{F3}/2\right] \\ & \cdots \cdots (22) \end{aligned}$$

この結果から明らかなように、1~3 倍周波数のいずれも一定振幅の進行波と、振幅が距離とともに周期的に変化するビート波の和で成り立っている。この振幅変調の波数は a_{F3} の項を除くといずれも $k_2/2 - k_1$ で共通である。この一定間隔での振幅変調の現象が二次波長の再帰現象である。ここで、固定測定点での波形のフーリエ解析を想定し、フーリエ振幅の絶対値を例えば 2 倍周波数成分について求めると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} |a_2|^2 = & (a_{G2} - a_{F2})^2 + 4a_{F2}\{(a_{G2} - a_{F2}) \\ & + a_{F2}\cos^2[(k_2/2 - k_1)x + a_{F2}/2]\} \cdots \cdots (23) \end{aligned}$$

すなわち、 $[(k_2/2 - k_1)x + a_{F2}/2]$ が $n\pi$ の位置で $|a_2|$ が最大、 $(n+1/2)\pi$ の位置で最小となる。したがって、フーリエ振幅の再帰間隔が次式で与えられる。

$$\lambda = \pi / (k_2/2 - k_1) \cdots \cdots (24)$$

ここに、 k_1 は有限振幅波の波数であり、3 次オーダーでは次式で算定される。

$$k_1 = k_1 \left[1 - k_1^2 a^2 \frac{9c_1^4 - 10c_1^2 + 9}{8[1 + k_1 h (c_1 - \tanh k_1 h)]} \right] \cdots (25)$$

以上のように、二次波長あるいは波長の分裂現象は発生波、自由波、干渉波の重畳によるビートの見かけの現象であり、エネルギーの授受を伴っているものではない。

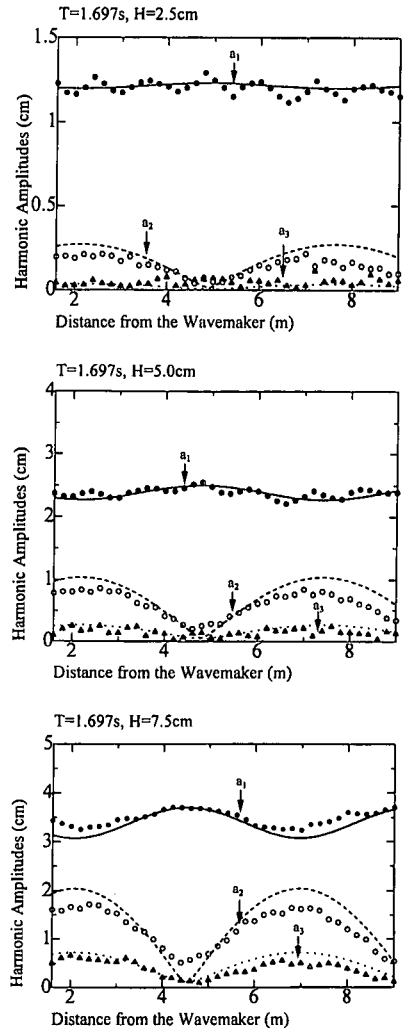


図-4 フーリエ振幅の場所的变化の実験値と理論値の比較 ($h=0.25$ m, $T=1.697$ s, $h/L=0.10$)

3. 水理実験による検証

実験には長さ 17.0 m, 幅 0.6 m の造波水路を使用した。水深 $h=0.25$ m の Case 1 では $h/L=0.20, 0.15, 0.12, 0.10$ となるように周期を 0.971 s, 1.207 s, 1.445 s, 1.697 s と設定した。水深 $h=0.15$ m の Case 2 では $h/L=0.09, 0.08, 0.07$ となるように周期を 1.445 s, 1.609 s, 1.821 s に定めた。波高は $H/h=0.1, 0.2, 0.3$ を目標値として造波した。波高計は 12 台を同時に使用し, あらかじめ予測した二次波峯の再帰間隔内に 20 点以上の測定点が入るように, 波高計を移動した。

波形記録は波が安定するのを待ち, サンプル周波数を 10 Hz としてデータ数 3000 個をデジタル記録した。このデータのうち 2048 個について FFT 法を用いて

解析し, フーリエ振幅を算出した。図-4 は, Case 1 の $h/L=0.10$ の条件で波高水深比を 3 通りに変えたときの結果である。また, 図-5 は Case 1, 図-6 は Case 2 についていずれも $H/h \approx 0.3$ の場合の実験値と理論値の比較である。理論で振幅を求める際には, 波数 k_1 は式(5)の微小振幅波理論で算定している。いずれも基本, 2 倍, 3 倍周波数成分の振幅 a_1, a_2, a_3 の実験値を ●, ○, ▲ の記号, 理論値を実線, 破線, 点線で示してある。横軸は造波板からの距離であり, 各理論曲線の原点は実験値に合わせて定めている。

なお, a_{F3} の項は他に比べて小さいと考えられたので, 計算を省略している。この項の再帰間隔は, 若干の試算例によれば式(24)の λ の $1/4$ 程度である。Chapalain ほか (1992) の実験結果では, a_{F3} によると見られるフー

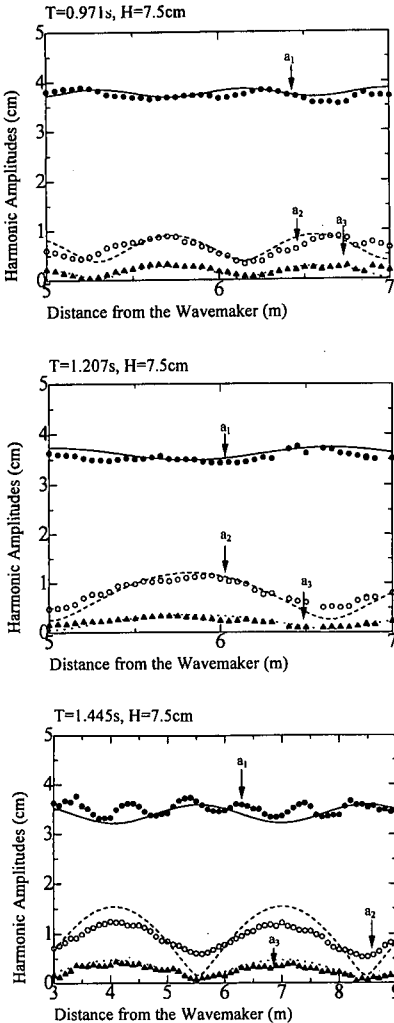


図-5 フーリエ振幅の場所的変化の実験値と理論値の比較 ($h=0.25$ m, $H/h \approx 0.3$; $h/L=0.20, 0.15, 0.12$)

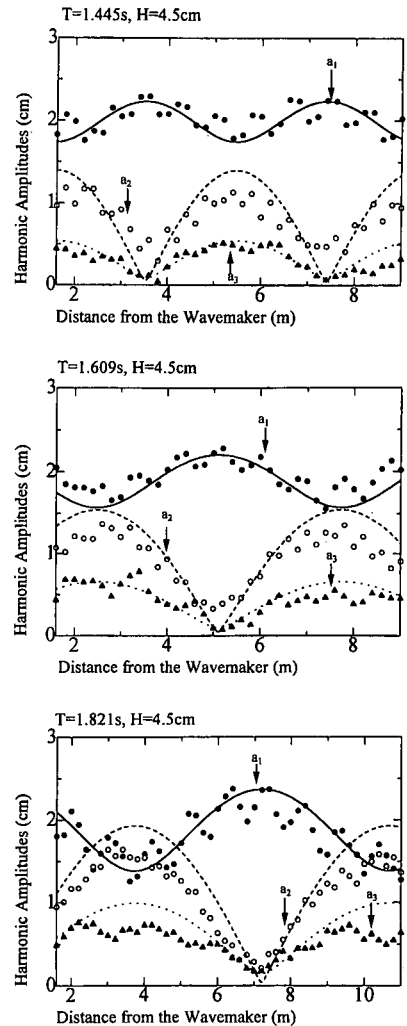


図-6 フーリエ振幅の場所的変化の実験値と理論値の比較 ($h=0.15$ m, $H/h \approx 0.3$; $h/L=0.09, 0.08, 0.07$)

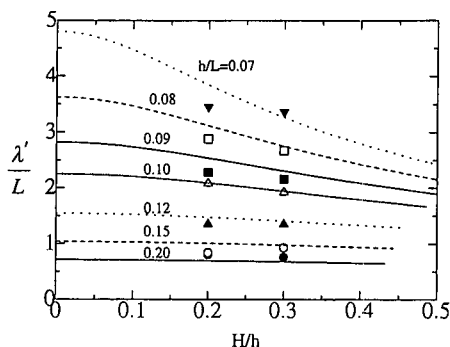


図-7 二次波峯の再帰間隔 λ'/L の理論値と実験値の比較

リエ振幅の小さな変動が認められる。

図に見られるように、理論は実験結果とかなりよく一致している。実験値の細かな変動は造波水路端の消波斜面からの反射で部分重複波が形成されたためである。また、図-4の $T=0.971$ s, 1.207 s のケースを除き、全般的に理論値が実験値よりも過大な傾向が見られる。これは水深波長比 h/L が小さくて波の非線形性が強いいため、3次オーダーの摂動解では精度が不足したためと考えられる。

さらに、図-4~6のようなフーリエ振幅の場所的变化からその再帰間隔を読み取り、式(24)の理論値と比較した結果が図-7である。実験では水路長の制約のために再帰間隔を正確に計測できなかったが、理論値とはほぼ合致している。この再帰間隔からも理論解析の妥当性は検証されたといえる。

4. む す び

造波水路内の二次波峯の現象は、造波板による非線形発生波によって励起される高次自由波ならびにその発生

波との非線形干渉波の重畳効果によるものであることが理論解析および実験によって確認された。したがって、成分波間の resonance によるエネルギーの授受は生じていないと結論される。潜堤等による波峯の分裂も類似の現象と考えられるので、現在検討途上である。

参 考 文 献

- 大山 巧・灘岡和夫 (1992): 潜堤を通過する非線形波列の分裂現象の解析, 土木学会論文集, No. 450/II-20, pp. 31-40.
- 合田良実 (1961): 造波水路内における二次波峯の移動現象について, 運輸技術港湾工部防波堤研資料 No. 8, 22 p.
- 合田良実 (1997): 造波水路内の非線形波浪成分とその相互干渉について, 横浜国立大学水理研究室資料 No. 96-1, 25 p.
- 柳山 勉 (1992): 潜堤による非線形波の分裂に関する数値解析, 海岸工学論文集, 第 39 巻, pp. 626-630.
- Buhr Hansen, J. and Ib A. Svendsen (1974): Laboratory generation of waves of constant forms, *Proc. 14th ICCE*, pp. 321-339.
- Chapalain, G., R. Cointe, and A. Temperville (1992): Observed and modeled resonantly interacting progressive water-waves, *Coastal Engrg.*, Vol. 16, pp. 267-300.
- Fontanet, P. (1961): Théorie de la génération de la houle cylindrique par un batteur plan, *La Houille Blanche*, Vol. 16, No. 1, pp. 3-31, No. 2, pp. 174-197.
- Flick, R. E. and R. T. Guza (1980): Paddle generated waves in laboratory channels, *J. Wtrwy., Prt., Coast., and Ocn. Div., Proc. ASCE*, Vol. 106, No. WW1, pp. 79-97.
- Goda, Y. (1967): Travelling secondary wave crests in wave channels, *Rept. Port and Harbour Res. Inst.*, No. 13, pp. 32-38.
- Hulsbergen, C. H. (1974): Origin, effect and suppression of secondary waves, *Proc. 14th ICCE*, pp. 392-411.
- Madsen, P. A. and O. R. Sørensen (1993): Bound waves and triad interaction in shallow water, *Ocean Engrg.*, Vol. 20, No. 4, pp. 359-388.
- Morison, J. R. and R. C. Croke (1953): The mechanics of deep water, shallow water, and breaking waves, *Beach Erosion Board, Tech. Memo.*, No. 40.