

変調性進行波列の過渡状況有限振幅波理論

梅 山 元 彦*

1. 緒 言

任意水深の水路で造波されたストークス波列は伝播してゆくにつれて次第に不安定になる。この現象は以前からよく知られており、Benjaminら(1967)は主波の周期より若干大きい小さい周期をもつ擾乱が水路中で発生した場合に波列はゆっくりと変調してゆくことを見出した。また最近では、周期が若干異なった二波が干渉しながら進む二成分波列の不安定性についても規則波と似た変調現象があることが明らかになってきており、Stansberg(1995)は単一方向に進む有限振幅の包絡波形はゆっくりと変調してゆくが同一地点で時間を追うと非常に安定しているという事実を長水路実験によって見出した。本研究では、水深が一定の水路を波高と周期の異なる二つの進行波が相互干渉しながら伝播する場合の水面形について、有限振幅波理論を用いてその近似解を求め、水路内で周期と波高の異なる二成分波列を造波させて得られる実験結果と比較してみる。

2. 基本方程式と境界条件

理論展開の手法としては摂動法によって速度ポテンシャルと水面変動量を三次近似まで求めることにする。ただし、通常の摂動展開では、運動が定常になった状態での近似解を誘導しているのに対して、ここでは波の変調性を調べるのであるから、静穏な水域にストークス波が二波同時に同一方向に進行を始めた時から、運動が定常になるまでの間での状況を想定して解を求める。運動は二次元で、非回転であると仮定すると、水粒子の速度成分は速度ポテンシャルを用いて表現できる。

$$u(x, y, t) = \Phi_x \quad (1)$$

$$v(x, y, t) = \Phi_y \quad (2)$$

ここで、 $\Phi(x, y, t)$ は速度ポテンシャル、 u は水平速度成分、 v は鉛直速度成分、 x は水平座標、 y はMWLから上向きにとった鉛直座標である。また、流体を非圧縮性であるとする、速度ポテンシャルは次のラプラス方程式を満足しなければならない。

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (3)$$

自由表面における境界条件は以下の通りである。

$$g\eta + \Phi_t + (\Phi_x^2 + \Phi_y^2)/2 = 0 \quad \text{on } y = \eta \quad (4)$$

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y = 0 \quad \text{on } y = \eta \quad (5)$$

ここで、 $\eta = \eta(x, t)$ は $y=0$ から測られた水面の鉛直変位、 g は重力加速度、 t は時間である。次に、水底は一定で鉛直方向の水粒子の出入りはないので、水底での境界条件は次式で表せる。

$$\Phi_y = 0 \quad \text{on } y = -h \quad (6)$$

ここで、 h はMWLからの深さである。

3. 二成分波列の三次近似解

有限水深における非線形進行波の速度ポテンシャル、水面変動量および角速度は三次近似で表せるものとする、下記のようにベキ級数展開ができる。

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \varepsilon^3 \Phi^{(3)} / 2 + O(\varepsilon^4) \quad (7)$$

$$\eta = \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \varepsilon^3 \eta^{(3)} / 2 + O(\varepsilon^4) \quad (8)$$

$$\sigma = \sigma^{(0)} + \varepsilon \sigma^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma^{(2)} / 2 + O(\varepsilon^3) \quad (9)$$

ここで、 ε は任意の微小量、 σ は角速度、括弧内の添字は摂動解に関するオーダーを表しており、 $O(\quad)$ はオーダーシンボルである。

進行波の三次近似解は、展開式(7)～(9)を式(3)～(6)に代入し、各オーダーでの方程式に分け、それを順次解いてゆけば求まり、以下ようになる。

一次オーダー：

$$\Phi^{(1)} = \frac{\sigma^{(0)} \coth k(y+h)}{k^2 \sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (10)$$

$$\eta^{(1)} = (1/k) \cos(kx - \sigma t) \quad (11)$$

$$\sigma^{(0)} = \sqrt{gk \tanh kh} \quad (12)$$

二次オーダー：

$$\Phi^{(2)} = \frac{3\sigma^{(0)}(c^4 - 1)}{8k^2} \frac{\cosh 2k(y+h)}{\cosh 2kh} \sin 2(kx - \sigma t) \quad (13)$$

$$\eta^{(2)} = (1/4k)(3c^3 - c) \cos 2(kx - \sigma t) \quad (14)$$

$$\sigma^{(1)} = 0 \quad (15)$$

三次オーダー：

$$\phi^{(3)} = \sigma^{(0)} \frac{(c^2 + 3)(9c^5 - 22c^3 + 13c)}{32k^2} \cdot \frac{\cosh 3k(y+h)}{\cosh 3kh} \sin 3(kx - \sigma t) \quad (16)$$

$$\eta^{(3)} = (1/8k)(3c^4 + 8c^2 - 9)\cos(kx - \sigma t) + (3/32k)(9c^6 - 3c^4 + 3c^2 - 1)\cos 3(kx - \sigma t) \quad (17)$$

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(0)}(9c^4 - 10c^2 + 9)/8 \quad (18)$$

式中, $c = \coth kh$ である。

次に振幅と周期が異なる二成分の進行波 I と II によって生ずる波列の三次近似解を摂動法を用いて求めることにする。ただしここでは、波列の速度ポテンシャルと水面変動を下記のように表現できるものと仮定する。

$$\phi = \epsilon_1 \phi_I^{(1)} + \epsilon_1^2 \phi_I^{(2)} + \epsilon_1^3 \phi_I^{(3)}/2 + \lambda \epsilon_1 \phi_{II}^{(1)} + (\lambda \epsilon_1)^2 \phi_{II}^{(2)} + (\lambda \epsilon_1)^3 \phi_{II}^{(3)}/2 + \epsilon_1^2 \phi_F^{(2)} + \epsilon_1^3 \phi_F^{(3)}/2 \quad (19)$$

$$\eta = \epsilon_1 \eta_I^{(1)} + \epsilon_1^2 \eta_I^{(2)} + \epsilon_1^3 \eta_I^{(3)}/2 + \lambda \epsilon_1 \eta_{II}^{(1)} + (\lambda \epsilon_1)^2 \eta_{II}^{(2)} + (\lambda \epsilon_1)^3 \eta_{II}^{(3)}/2 + \epsilon_1^2 \eta_F^{(2)} + \epsilon_1^3 \eta_F^{(3)}/2 \quad (20)$$

添字 I, II, F は、それぞれ第一成分波、第二成分波、干渉波を意味する。また、 $\lambda = \epsilon_{II}/\epsilon_I$ である。

第一成分波と第二成分波が固有にもつ角速度も干渉の影響を受けるので、次のようにおいてみることにする。

$$\sigma_I = \sigma_I^{(0)} + \epsilon_1^2(\sigma_I^{(2)} + \sigma_{IF})/2 \quad (21)$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{II}^{(0)} + \epsilon_1^2(\lambda \sigma_{II}^{(2)} + \sigma_{IIF})/2 \quad (22)$$

ここで、 σ_{IF} と σ_{IIF} は干渉によって生じる第一成分波と第二成分波の角速度の二次の変化量である。

波群の高次近似解を求めるためには自由表面の境界条件式 (4) と (5) に式 (19) と (20) を代入して、 $y = 0$ の周りでテーラー展開して低次のオーダーから順に解いてゆけばよい。自由表面の境界条件から得られる各オーダーの関係式は以下になる。

二次オーダー：

$$g\eta_F^{(2)} + \phi_F^{(2)} = -\lambda \left(\frac{\sigma_I^{(0)}}{\sigma_I} \eta_I^{(1)} \phi_{II}^{(1)} + \frac{\sigma_{II}^{(0)}}{\sigma_{II}} \eta_{II}^{(1)} \phi_{II}^{(1)} + \phi_{IX}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} + \phi_{IY}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \right) \quad (23)$$

$$\phi_{IX}^{(2)} - \eta_{IX}^{(2)} = \lambda (\eta_{IX}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} + \eta_{IY}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)}) \quad (24)$$

三次オーダー $[\lambda]$ に関して：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(g\eta_F^{(3)} + \phi_F^{(3)} + \lambda \frac{\sigma_{IIF}}{\sigma_{II}} \phi_{II}^{(1)} \right) \\ &= -\lambda \frac{\sigma_I^{(0)}}{\sigma_{II}} \eta_I^{(2)} \phi_{II}^{(1)} - \lambda \frac{\sigma_I^{(0)}}{\sigma_I} \eta_I^{(1)} \phi_{II}^{(2)} - \frac{\sigma_I^{(0)}}{\sigma_I} \eta_F^{(2)} \phi_{II}^{(1)} \\ & - \eta_I^{(1)} \phi_F^{(2)} - \lambda \frac{\sigma_I^{(0)}}{\sigma_I} \eta_I^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \frac{\lambda}{2} \frac{\sigma_{II}^{(0)}}{\sigma_{II}} \eta_I^{(1)*} \phi_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \\ & - \lambda \eta_I^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \lambda \eta_{II}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \lambda \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \\ & - \lambda \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \lambda \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \lambda \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \end{aligned}$$

$$-\lambda \phi_{IX}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} - \lambda \phi_{IY}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \phi_{IX}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} - \phi_{IY}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\phi_{IX}^{(3)} - \eta_{IX}^{(3)} - \lambda \frac{\sigma_{IIF}}{\sigma_{II}} \phi_{II}^{(1)} \right) \\ &= -\lambda \eta_I^{(2)} \phi_{II}^{(1)} - \lambda \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(2)} - \eta_F^{(2)} \phi_{IY}^{(1)} - \eta_I^{(1)} \phi_{IY}^{(2)} \\ & - \lambda \eta_I^{(1)} \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} - \frac{\lambda}{2} \eta_I^{(1)*} \phi_{IY}^{(1)} + \lambda \eta_{IX}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} \\ & + \lambda \eta_{IX}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} + \lambda \eta_{IX}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} + \lambda \eta_{IX}^{(1)} \phi_{IX}^{(1)} + \lambda \eta_{II}^{(1)} \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \\ & + \lambda \eta_{II}^{(1)} \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} + \lambda \eta_{II}^{(1)} \eta_{II}^{(1)} \phi_{IY}^{(1)} \quad (26) \end{aligned}$$

三次オーダー $[\lambda^2]$ に関して：

$$\frac{1}{2\lambda} \left(g\eta_F^{(3)} + \phi_F^{(3)} + \frac{\sigma_{IF}}{\sigma_I} \phi_{II}^{(1)} \right) = \dots \quad (27)$$

$$\frac{1}{2\lambda} \left(\phi_{IX}^{(3)} - \eta_{IX}^{(3)} - \frac{\sigma_{IIF}}{\sigma_I} \phi_{II}^{(1)} \right) = \dots \quad (28)$$

なお、式 (27) と (28) の右辺はそれぞれ式 (25) と (26) の右辺において I と II を入れ替えたものである。

式 (23) と (24) から η_F を消去すると次式が得られる。

$$g\phi_F^{(2)} + \phi_F^{(2)} = \frac{\lambda}{2k_1 k_{II}} \{ A_I^{(2)} \sin(\chi_I - \chi_{II}) + A_{II}^{(2)} \sin(\chi_I + \chi_{II}) \} \quad (29)$$

いま、 $A_I^{(2)} = \gamma_{11} + \gamma_{12}$, $A_{II}^{(2)} = \gamma_{21} - \gamma_{22}$ とおけるものとすれば、 γ_{11} , γ_{12} , γ_{21} , γ_{22} は以下の式で表せる。

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \omega_- \{ \sigma_I^{(0)*} + \sigma_{II}^{(0)*} - \sigma_I^{(0)} \sigma_{II}^{(0)} (1 + c_1 c_{II}) \} \\ \gamma_{12} &= \frac{k_{II}}{k_1} \sigma_I^{(0)} \sigma_I^{(0)} + \sigma_{II}^{(0)} \sigma_{II}^{(0)} - \frac{k_1}{k_{II}} \sigma_I^{(0)} \sigma_{II}^{(0)} - \sigma_I^{(0)} \sigma_I^{(0)} \\ \gamma_{21} &= \omega_+ \{ \sigma_I^{(0)*} + \sigma_{II}^{(0)*} - \sigma_I^{(0)} \sigma_{II}^{(0)} (1 - c_1 c_{II}) \} \\ \gamma_{22} &= \frac{k_{II}}{k_1} \sigma_I^{(0)} \sigma_I^{(0)} + \sigma_{II}^{(0)} \sigma_{II}^{(0)} + \frac{k_1}{k_{II}} \sigma_I^{(0)} \sigma_{II}^{(0)} + \sigma_I^{(0)} \sigma_I^{(0)} \end{aligned}$$

ここで、 k_1 と k_{II} はそれぞれ第一成分波と第二成分波の波数であり、式 (21) と (22) から変換された値である。

また、 $\chi_I = k_1 x - \sigma_I t$, $\chi_{II} = k_{II} x - \sigma_{II} t$, $\omega_- = \sigma_I - \sigma_{II}$, $\omega_+ = \sigma_I + \sigma_{II}$ と定義してある。式 (29) は、 $\phi_F^{(2)}$ が満足すべき自由表面の境界条件であり、さらに式 (3) と (6) を同時に満たす速度ポテンシャルは次のように書き表せる。

$$\phi_F^{(2)} = \frac{\lambda}{k_1 k_{II}} \{ \beta_F^{(1)} \sin(\chi_I - \chi_{II}) + \beta_F^{(2)} \sin(\chi_I + \chi_{II}) \} \quad (30)$$

$$\beta_F^{(1)} = \frac{A_I^{(2)} \cosh \kappa_- (y+h)}{2(\omega_-^2 - \omega_-^2) \cosh \kappa_- h}, \quad \beta_F^{(2)} = \frac{A_{II}^{(2)} \cosh \kappa_+ (y+h)}{2(\omega_+^2 - \omega_+^2) \cosh \kappa_+ h}$$

$$\omega_-^2 = g k_{I-II} \tanh \kappa_{I-II} h, \quad \omega_+^2 = g k_{I+II} \tanh \kappa_{I+II} h$$

ここで、 $\kappa_- = k_1 - k_{II}$, $\kappa_+ = k_1 + k_{II}$ と定義してある。式 (30) を t で微分して式 (23) に代入することによって、水面の鉛直変動量は以下のように求まる。

$$\eta_F^{(2)} = \frac{\lambda}{2g k_1 k_{II}} \{ \beta_F^{(1)} \cos(\chi_I - \chi_{II}) + \beta_F^{(2)} \cos(\chi_I + \chi_{II}) \} \quad (31)$$

$$\beta_F^{(1)} = \frac{\omega_-^2 \gamma_{11} + \omega_-^2 \gamma_{12}}{\omega_- (\omega_-^2 - \omega_-^2)}, \quad \beta_F^{(2)} = \frac{\omega_+^2 \gamma_{21} + \omega_+^2 \gamma_{22}}{\omega_+ (\omega_+^2 - \omega_+^2)}$$

式 (31) には二波相互干渉によって各成分波の波数, 周波数の差と和に関する項が現われており, これは周期的に変動するが, このうちお互いの差によって作り出される波は長周期性を示す.

三次オーダーの速度ポテンシャルと水面変動量, それに角速度の二次オーダーの変化量は式 (25)~(28) に式 (10), (11), (13), (14), (30), (31) を代入して演算を行えば同様に導くことができる. 例えばパラメーター λ に関して, 式 (25) と (26) から $\eta_F^{(3)}$ を消去すると, $y=0$ で以下のような $\Phi_F^{(3)}$ に関する式が得られる.

$$\begin{aligned} g\Phi_F^{(3)} + \Phi_{FII}^{(3)} - \frac{2\lambda\sigma_{11F}}{k_{11}} \left(\frac{\sigma_{11}\sigma_{11}^{(0)}}{k_{11}} + \frac{g}{2} \right) \sin \chi_{11} \\ = \frac{2\lambda}{k_1 k_{11}} [\{ \omega_2 - b_1 + gb_4 \} \sin(2\chi_1 - \chi_{11}) \\ + \{ \omega_2 + b_2 + gb_5 \} \sin(2\chi_1 + \chi_{11}) \\ + \{ \sigma_{11}b_3 + gb_6 \} \sin \chi_{11}] \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

ここで, $\omega_2 = 2\sigma_1 - \sigma_{11}$, $\omega_2 + \sigma_{11} = 2\sigma_1 + \sigma_{11}$ であり, 各係数は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} b_1 = & \sigma_{11}^{(0)2} \beta_{11}^{(2)}/2 + 2\sigma_{11}^{(0)2} \alpha_2^{(2)} \sinh 2k_1 h \\ & - \sigma_{11}^{(0)} \sigma_{11}^{(0)} \alpha_2^{(2)} (c_{11} \cosh 2k_1 h + \sinh 2k_1 h) \\ & + \sigma_{11}^{(0)2} k_{11} c_{11} / (8k_1) - \sigma_{11}^{(0)} \sigma_{11}^{(0)} k_{11} (c_1 + c_{11}) / (4k_1) \\ & - \sigma_{11}^{(0)} \sigma_{11}^{(0)} c_{11} / 2 + \sigma_{11}^{(0)2} c_1 / 4 \\ & + \frac{\sigma_{11}^{(0)2} \{ \omega_2^2 \gamma_{11} + \omega_2^2 \gamma_{12} \}}{4gk_1 \omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} + \frac{A_1^{(2)} \omega_+ \omega_2^2}{4gk_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 A_1^{(2)} \kappa_-}{4 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} + \frac{\sigma_{11}^{(0)} A_1^{(2)} \omega_+^2}{4gk_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 = & \sigma_{11}^{(0)2} \beta_{11}^{(2)}/2 + 2\sigma_{11}^{(0)2} \alpha_2^{(2)} \sinh 2k_1 h \\ & - \sigma_{11}^{(0)} \sigma_{11}^{(0)} \alpha_2^{(2)} (c_{11} \cosh 2k_1 h - \sinh 2k_1 h) + \sigma_{11}^{(0)2} c_1 / 4 \\ & + \sigma_{11}^{(0)2} k_{11} c_{11} / (8k_1) - \sigma_{11}^{(0)} \sigma_{11}^{(0)} k_{11} (c_1 - c_{11}) / (4k_1) \\ & + \frac{\sigma_{11}^{(0)2} \{ \omega_2^2 \gamma_{21} + \omega_2^2 \gamma_{22} \}}{4gk_1 \omega_+ \{ \omega_2^2 + \omega_+^2 \}} + \frac{A_2^{(2)} \omega_+ \omega_2^2}{4gk_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 A_2^{(2)} \kappa_+}{4 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} + \frac{\sigma_{11}^{(0)} A_2^{(2)} \omega_2^2}{4gk_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 = & \sigma_{11}^{(0)2} k_{11} c_{11} / (4k_1) - \sigma_{11}^{(0)} \sigma_{11}^{(0)} k_{11} c_1 / (2k_1) \\ & - \sigma_{11}^{(0)} \sigma_{11}^{(0)} c_{11} / 2 - \sigma_{11}^{(0)2} c_1 / 2 \\ & + \frac{\sigma_{11}^{(0)2} \{ \omega_2^2 \gamma_{11} + \omega_2^2 \gamma_{12} \}}{4gk_1 \omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} + \frac{A_1^{(2)} \omega_+ \omega_2^2}{4gk_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 A_1^{(2)} \kappa_-}{4 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} - \frac{\sigma_{11}^{(0)} A_1^{(2)} \omega_2^2}{4gk_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & + \frac{\sigma_{11}^{(0)2} \{ \omega_2^2 \gamma_{21} - \omega_2^2 \gamma_{22} \}}{4gk_1 \omega_+ \{ \omega_2^2 + \omega_+^2 \}} + \frac{A_2^{(2)} \omega_+ \omega_2^2}{4gk_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 A_2^{(2)} \kappa_+}{4 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} - \frac{\sigma_{11}^{(0)} A_2^{(2)} \omega_2^2}{4gk_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 = & -\beta_{11}^{(2)} \sigma_{11}^{(0)} k_{11} c_{11} / 2 - \alpha_2^{(2)} k_{11} \cosh 2k_1 h \\ & - 2\alpha_2^{(2)} \sigma_{11}^{(0)} k_1 \cosh 2k_1 h - \beta_{11}^{(2)} \sigma_{11}^{(0)} k_1 c_1 \\ & - \sigma_{11}^{(0)} k_{11}^2 / (8k_1) - \sigma_{11}^{(0)} k_{11} / 4 - \sigma_{11}^{(0)} k_1 / 2 - \sigma_{11}^{(0)} k_{11} / 4 \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 \{ \omega_2^2 \gamma_{21} - \omega_2^2 \gamma_{22} \}}{4g\omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} - \frac{A_2^{(2)} \kappa_+}{4 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \end{aligned}$$

$$- \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 \kappa_+ \{ \omega_2^2 \gamma_{21} - \omega_2^2 \gamma_{22} \}}{4gk_1 \omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} - \frac{A_1^{(2)} \kappa_-}{4k_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}}$$

$$\begin{aligned} b_5 = & \beta_{11}^{(2)} \sigma_{11}^{(0)} k_{11} c_{11} / 2 + \alpha_2^{(2)} k_{11} \cosh 2k_1 h \\ & - 2\alpha_2^{(2)} \sigma_{11}^{(0)} k_1 \cosh 2k_1 h - \beta_{11}^{(2)} \sigma_{11}^{(0)} k_1 c_{11} \\ & + \sigma_{11}^{(0)} k_{11}^2 / (8k_1) + \sigma_{11}^{(0)} k_{11} / 4 - \sigma_{11}^{(0)} k_1 / 2 - \sigma_{11}^{(0)} k_{11} / 4 \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 \{ \omega_2^2 \gamma_{11} + \omega_2^2 \gamma_{12} \}}{4g\omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} - \frac{A_1^{(2)} \kappa_-}{4 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 \kappa_- \{ \omega_2^2 \gamma_{11} + \omega_2^2 \gamma_{12} \}}{4gk_1 \omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} - \frac{A_2^{(2)} \kappa_+}{4k_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_6 = & -\sigma_{11}^{(0)} k_{11}^2 / (4k_1) - \sigma_{11}^{(0)} k_{11} / 2 \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 \{ \omega_2^2 \gamma_{11} + \omega_2^2 \gamma_{12} \}}{4g\omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} - \frac{A_1^{(2)} \kappa_-}{4k_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & + \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 \kappa_- \{ \omega_2^2 \gamma_{11} + \omega_2^2 \gamma_{12} \}}{4gk_1 \omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} - \frac{A_1^{(2)} \kappa_-}{4 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & + \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 \{ \omega_2^2 \gamma_{21} - \omega_2^2 \gamma_{22} \}}{4g\omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} + \frac{A_2^{(2)} \kappa_+}{4k_1 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \\ & - \frac{\sigma_{11}^{(0)} c_1 \kappa_+ \{ \omega_2^2 \gamma_{21} - \omega_2^2 \gamma_{22} \}}{4gk_1 \omega_+ \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} + \frac{A_2^{(2)} \kappa_+}{4 \{ \omega_2^2 - \omega_+^2 \}} \end{aligned}$$

また, パラメーター λ^2 に関しても同様な方法で速度ポテンシャルに関する自由表面の境界条件式が求まり, その結果は式 (32) において, 左辺の λ が 1, 右辺の λ が λ^2 で, 式中の I と II が全て置き換わった型で表せる. 式 (32) を過渡状況の問題として解き, 得られた速度ポテンシャルを式 (25) または (26) に代入し, さらに演算を行えば三次オーダーの解が得られる. 三次オーダーの速度ポテンシャルと水面の鉛直変動量, 角速度の二次オーダーの変化量は最終的に, λ と λ^2 に関する解を重ね合わせることによって得られ, その結果は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \Phi_F^{(3)} = & \lambda \left[\frac{\phi_1}{k_1 k_{11} \cosh \kappa_2 - h} \right. \\ & \cdot \{ 2 \sin(\delta_1/2)t \sin(\delta_2/2)t \sin \kappa_2 - x \\ & + \sin \omega_2 - t \cos \kappa_2 - x \} \cosh \kappa_2 - (y+h) \\ & + \frac{\phi_2}{k_1 k_{11} \cosh \kappa_2 + h} \\ & \cdot \{ 2 \sin(\delta_3/2)t \sin(\delta_4/2)t \sin \kappa_2 + x \\ & + \sin \omega_2 + t \cos \kappa_2 + x \} \cosh \kappa_2 + (y+h) \Big] \\ & + \lambda^2 [\text{上で I と II を入れ替えた式}] \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_F^{(3)} = & \frac{\lambda}{gk_1 k_{11}} \left[-\phi_1 \{ \delta_1 \cos(\delta_1/2)t \sin(\delta_2/2)t \right. \\ & + \delta_2 \sin(\delta_1/2)t \cos(\delta_2/2)t \} \sin \kappa_2 - x \\ & - \phi_2 \{ \delta_3 \cos(\delta_3/2)t \sin(\delta_4/2)t \\ & + \delta_4 \sin(\delta_3/2)t \cos(\delta_4/2)t \} \sin \kappa_2 + x \\ & + \{ 2b_1 - (\phi_1/2)\omega_2 - \} \cos(2\chi_1 - \chi_{11}) \\ & - (\phi_1/2)\omega_2 - \cos\{\kappa_2 - x + \omega_2 - t\} \\ & + \{ 2b_2 - (\phi_2/2)\omega_2 + \} \cos(2\chi_1 + \chi_{11}) \\ & - (\phi_2/2)\omega_2 + \cos\{\kappa_2 + x + \omega_2 + t\} \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{2g(b_3k_{11} - 2b_6\sigma_{11}^{(0)}c_{11})}{2\sigma_{11}\sigma_{11}^{(0)}c_{11} + gk_{11}} \cos \chi_{11} \right] \\ + \frac{\lambda^2}{gk_{11}} [\text{上で I と II を入れ替えた式}] \cdots \cdots (34)$$

$$\sigma_{IF} = -\frac{2\lambda^2 k_{11}(\sigma_{11}b_3 + gb_6)}{k_{11}(2\sigma_{11}\sigma_{11}^{(0)}c_{11} + gk_{11})} \cdots \cdots (35)$$

$$\sigma_{1IF} = -\frac{2k_{11}(\sigma_{11}b_3 + gb_6)}{k_{11}(2\sigma_{11}\sigma_{11}^{(0)}c_{11} + gk_{11})} \cdots \cdots (36)$$

ここで、 $\kappa_{2-} = 2k_1 - k_{11}$ 、 $\kappa_{2+} = 2k_1 + k_{11}$ であり、他の係数は以下に示す通りである。

$$\partial_1 = 2\sigma_1 - \sigma_{11} + \sigma_{F1}, \quad \partial_2 = 2\sigma_1 - \sigma_{11} - \sigma_{F1}$$

$$\partial_3 = 2\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{F2}, \quad \partial_4 = 2\sigma_1 + \sigma_{11} - \sigma_{F2}$$

$$\phi_1 = \frac{2\{\omega_2 - b_1 + gb_4\}}{\omega_{2-}^2 - \sigma_{F1}^2}, \quad \phi_2 = \frac{2\{\omega_2 + b_2 + gb_5\}}{\omega_{2+}^2 - \sigma_{F2}^2}$$

$$\sigma_{F1}^2 = g\kappa_{2-} \tanh \kappa_{2-} h, \quad \sigma_{F2}^2 = g\kappa_{2+} \tanh \kappa_{2+} h$$

また、式 (35) における $\hat{b}_n$ は b_n に係わる式で I と II を入れ替えたものであることを意味する。式 (34) はいままでの発展方程式とは異なって、進行性干渉波、うなり現象を表す定住波、進行性干渉波と周期が等しく逆方向の後退性干渉波といった三種類の波の合成として表されている。進行性干渉波の項は定常運動の場合の摂動解析でも必ず現れる項である。うなり定住波の項は波の発生の初期段階において重要であるが、波が発達してゆくに つれて効果は減少してゆく。後退性干渉波の項は過渡状況の誘導においてのみ現れ、その振幅は主波の周期が比較的短い間は波形の変調性に影響を及ぼすことになる。

4. 実験結果と理論計算との比較

実験は、長さ 25 m、幅 0.7 m、高さ 1.0 m の造波水槽を用いて行った。二成分波列は任意波形発生装置で振幅と周期がそれぞれ異なる正弦波どうしの合成信号をつかった。第一波と第二波の振幅比は 1:1 から 1:2 までとし、合成されてできる波の最大波高が 10 cm 以下になるように調整した。二成分波列の周期は、第一波を 0.5 s で固定して第二波を 0.55~0.75 s の範囲で変化させた。水槽内の実験水深は、20, 30, 40 cm の三ケースとした。水位変動の測定は容量式波高計を用い、造波板から 10.0, 12.5, 15.0, 17.5 m の地点で行った。水位のサンプリング間隔は 0.02132 s であり、造波開始から反射の影響が少ない数十秒間の測定を行った。

実験結果が今回導き出した理論式の検証のために適当であるかどうかを判断するために、各測定点における時間波形記録のスペクトル解析を行ない、入力信号で与えた基本周波数の第一波と第二波との振幅の比と FFT 法によって得られた基本周波数の各成分の振幅の比が同じ程度になる実験結果を選んだ。さて、理論波形の計算であるが、今回の実験では二成分波列の初期の波形は測定

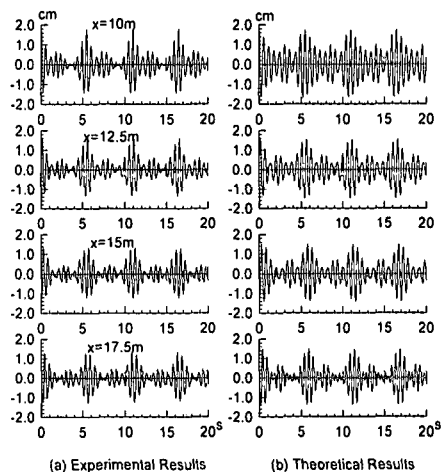


図-1 地点別時間水面変動

($T_1=0.5$ s, $T_{11}=0.55$ s, $a_1:a_{11}=1:1$, $h=40$ cm)

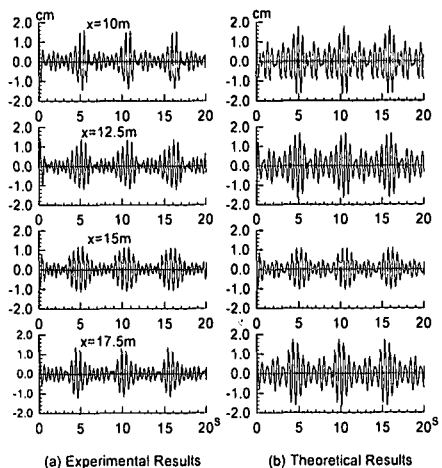
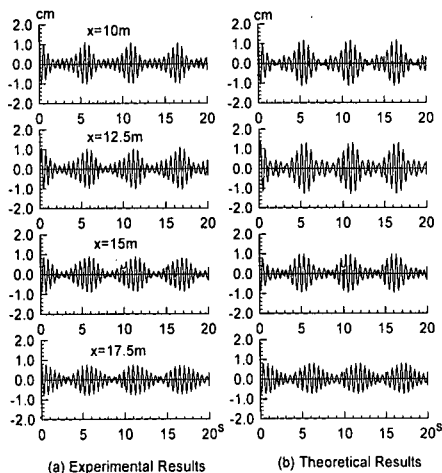


図-2 地点別時間水面変動

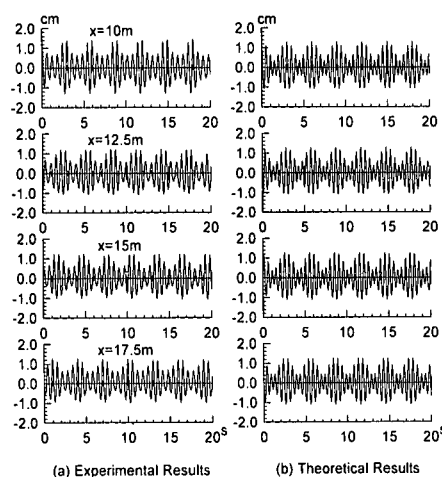
($T_1=0.5$ s, $T_{11}=0.55$ s, $a_1:a_{11}=1:1$, $h=20$ cm)

していないので、造波板の近傍での第一と第二成分波の振幅 (a_1 と a_{11}) がどのような値であるか正確にはわからない。しかしながら、 T_1 と T_{11} は既知であり、 $a_1:a_{11}$ の造波信号が正確に伝わっていると仮定すると、計算のために必要な未知数は一つだけであるので、その値をいろいろに変えて波形を計算してみることにした。

図-1 は、 $T_1=0.5$ s, $T_{11}=0.55$ s, $a_1:a_{11}=1:1$ の二成分の波を水深 $h=40$ cm で伝播させた場合の各測定点における水面の時間変動を表している。図の (a) は各点での測定結果のうち 20 秒間の水面変動の様子を示したものである。包絡波形は完全には左右対称ではなく、主波どうしの相互干渉によって生じた波群の分裂も見られる。波群の発達はあまり顕著ではなく、定常になった後の運動と考えてもあまり問題にならない程度であるが、この状況を過渡状況とみなして $a_1=a_{11}=0.35$ cm の理



図一三 地点別時間水面変動
($T_I=0.5$ s, $T_{II}=0.55$ s, $a_I:a_{II}=1:2$, $h=20$ cm)



図一四 地点別時間水面変動
($T_I=0.5$ s, $T_{II}=0.6$ s, $a_I:a_{II}=1:2$, $h=20$ cm)

論波形を計算した。その結果は (b) に示されているが、 $x=10.0$ m の場合を除けば波群分裂の様子もよく現れており、再現性は比較的良好なことがわかる。

次に、 $T_I=0.5$ s, $T_{II}=0.55$ s, $a_I:a_{II}=1:1$ で水深を $h=20$ cm と浅くした場合の二成分波列の水面変動の様子を示したものが図一三である。実験結果 (a) からわかるように変調不安定が生じており、隣り合った地点間の包絡波形は極めて異なった形をしている。しかし、各測定点での一連の包絡波形は時間に関しては比較的安定しており、ほぼ同じ形の包絡波形が続いているのがわかる。二成分波列の振幅を $a_I=a_{II}=0.34$ cm として理論計算をした結果を (b) に示す。計算結果の方がやや包絡波形の振幅が大きくなっているが、そのパターンは実験結果と

はよく一致している。 a_I または a_{II} の値をいろいろ変えて再計算をすれば、さらに実験波形に近い波形を得ることも可能であろう。

今回導いた有限振幅波の近似解は、各々の主波の振幅が異なる場合にも適用できる。図一三の (a) は、 $T_I=0.5$ s, $T_{II}=0.55$ s, $a_I:a_{II}=1:2$ で、水深 $h=20$ cm を伝播する二成分波列の実験結果であり、この場合にも変調性が見られる。図の (b) は、 $a_I=0.22$ cm, $a_{II}=0.44$ cm を理論式に代入して計算した結果である。実験結果と計算結果をさらに精度よく合わせるためには実験で造波された初期波列の $a_I:a_{II}$ がどの程度信号で与えた比に近いかを詳しく吟味して、初期包絡波形を正確に決めてやる必要がある。しかし、今回はそのような操作を全く行っていない。任意に選んだ初期振幅で行っただけの計算であるのにも関わらず、この近似計算結果がある程度は満足のゆくものであることがこれらの図から読みとれる。

最後に、上の三例よりも成分波間の周期の差が大きい場合についての検討例を示す。図一四の (a) は、 $T_I=0.5$ s, $T_{II}=0.6$ s, $a_I:a_{II}=1:2$ で、水深 $h=20$ cm の場合に測定された水面変動である。測定点間での変調性はほとんど見られない。従って、この場合は定常に達した後の運動と考えることができる。 $a_I=0.38$ cm, $a_{II}=0.76$ cm として理論計算した結果を (b) に示すが、計算結果にも変調性は全く現れておらず、実験と計算による包絡波形は一応の整合性を見せている。

5. 考 察

本研究では、水深が一定の中間波領域を波高と周期のそれぞれ異なる二成分のストークス合成波列が相互干渉をしながら伝播する場合の変調性水面変動式を摂動法により求めた。また、理論によって得られる波形と実験波形とを比較することによって、理論式の妥当性を検討した。実験結果から、水深が浅くなるほど変調性が増すこと、成分波間の振幅の比の如何によらず変調性が現れること、成分波間の周期の差が小さいほど三次オーダーの干渉効果が顕著になること等がわかった。また理論計算の結果からは、今回得られた近似式を使えば実験によって得られる現象を適正に評価できることが証明された。

参 考 文 献

- Benjamin, T. B. and J. E. Feir (1967): The disintegration of wave trains on deep water, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 417-430.
- Stansberg, C. T. (1995): Spatially developing instabilities observed in experimental bichromatic wave trains, Proc. 26th IAHR, pp. 180-185.