

弾性浮体の波浪応答に関する境界要素と有限要素の接続解法

劉 曉 東*・堺 茂 樹**

1. 緒 言

近年、大型浮体橋梁あるいは浮体空港など、いわゆるメガフロートの建設が注目されている。小型浮体の場合には、浮体の変形を無視し、剛体の波浪応答として解析できるが、大型浮体では、浮体の弾性変形を無視することができない。弾性浮体の波浪応答に関する理論計算としては、既にいくつかの方法が提案されているが、いずれも開水域と浮体下にそれぞれ速度ポテンシャルを仮定し、両者を浮体端で接続する方法であり、浮体端の鉛直断面に沿って水理量を接続するポテンシャル接続法と水深方向に積分したエネルギーフラックスを接続させるエネルギーフラックス法がある。これらの方法には以下のような改良すべき点がある。(1)浮体下での波浪と浮体の弾性変形の関連は良く説明出来るが、開水域の波浪と浮体下の波浪の対応が充分表現できていない。(2)流体場全体の速度ポテンシャルは浮体上に設けた各計算点に対応した速度ポテンシャルの総和として扱われる場合、その各々は規則波の速度ポテンシャルであるため、不規則波浪への応答計算に拡張するのに工夫が必要となる。

そこで本研究では、上記の問題点を克服できる新しい解析方法を開発し、また実験結果との比較により本方法の有効性を検討した。

2. 数 値 計 算

(1) 基礎方程式と境界条件

図-1のような二次元数値水槽モデルを定義し、静水面上に x 軸、鉛直上方に z 軸をとり、水深 d は一定とする。造波境界上で発生した波が x の正の方向へ伝播し、自由表面に浮いている上下方向に自由に運動できる弾性浮体下に透過し、数値水槽の後端の消波フィルターで吸収される。流体の性質及び流体と弾性浮体の境界面(以下単に接続面という)での条件を以下のように仮定する。(1)流体は非圧縮性、非粘性の完全流体とする、(2)運動は常に渦無しである、(3)浮体と流体は密着し、

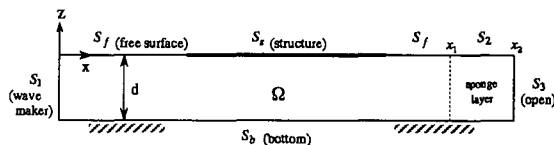


図-1 数値水槽モデル

Bernoulliの式と浮体の曲げ変形方程式の両者を満足する。

仮定(2)より、速度ポテンシャル ϕ が存在し、流体域で成立すべき基礎式は次のラプラス方程式になる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

自由表面の変位は微小であると仮定すると、各境界面における境界条件は次のように与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_n \quad (\text{on } S_1) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S_b) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (\text{on } S_f, S_s, S_2) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (\text{on } S_f \text{ \& } S_s) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \mu \phi - \int_{x_1}^x \phi \frac{\partial \mu}{\partial x} dx = 0 \quad (\text{on } S_2) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{gd}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{on } S_3) \quad (7)$$

ここで、 t は時間、 n は境界上に立てた外向き法線を表す。式(2)は S_1 における水平速度が微小振幅波理論の水平水粒子速度 V_n に等しいという条件、式(3)は底面での不透過条件、式(4)、(5)は自由水面及び接続面での運動学的、力学的条件、式(6)は消波層内自由表面上での力学的条件、式(7)は開境界面上におけるSommerfeld型放射条件である。

(2) 境界積分方程式

速度ポテンシャル ϕ は調和関数であるため、流体領域にグリーン公式を用いたラプラス方程式(1)は次のような境界積分方程式になる。

* 学生会員 岩手大学大学院 工学研究科
** 正会員 工博 岩手大学助教授 工学部建設環境工学科

$$\left. \begin{aligned} c^*(\chi_i)\phi(\chi_i) &= \int_{s(\chi_i)} \left[\frac{\partial \phi(\chi)}{\partial n} G(\chi, \chi_i) - \phi(\chi) \frac{\partial G(\chi, \chi_i)}{\partial n} \right] ds \\ G(\chi, \chi_i) &= -\frac{1}{2\pi} \log|\chi - \chi_i| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\chi=(x, z)$ と $\chi_i=(x_i, z_i)$ は境界面上での位置ベクトル、 $c^*(\chi_i)$ は境界面の形状による係数である。

式(8)に境界条件(2)～(4)と(7)を代入すると、全境界面での ϕ と自由表面及び接続面での運動量 z を未知量とする積分方程式が次式のように導かれる。

$$\begin{aligned} c^*(\chi_i)\phi(\chi_i) &= -\int_S \phi \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds + \int_{S_f, S_a \& S_b} \frac{\partial z}{\partial t} G ds \\ &+ \int_{S_1} V_n G ds + \int_{S_3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) G ds \dots\dots (9) \end{aligned}$$

一方、自由水面上 S_f での力学的条件は、式(5)の中に $p=0$ を与えると、次式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (\text{on } S_f) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 η は静水面からの水面変動量である。

スポンジ層内の自由水面における力学的条件は式(6)であり、 $\mu = \partial \mu / \partial x = 0$ とすれば上式のような通常の力学的条件に一致する。

(3) 浮体の有限要素数値計算

弾性浮体としては、軸力を無視した曲げ変形によって波浪外力に抵抗する梁を考えている。連続体を要素に分割し、要素に働く外力を節点力に置き換えて、流体と浮体の接続面で節点変位の連続条件及び力学的条件を満足する解を求める有限要素手法を用いて計算した。

境界 S_3 の x 軸方向に浮体を要素に分割し、鉛直方向の釣合方程式(5)は有限要素法のマトリックスで表すと、次のようになる。

$$[M]\{\dot{V}\} + ([K] + [K_d])\{V\} = \{F\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $[M]$ ：浮体全体の質量マトリックス

$[K]$ ：浮体全体の剛性マトリックス

$[K_d]$ ：静水圧の復原力により換算した係数マトリックス

$\{V\}$ ： z 方向の変位ベクトル

$\{F\}$ ： z 方向の波浪外力ベクトル

ここで、要素の両端の節点を i 及び $i+1$ とし、節点の変位を鉛直変位と回転変位、節点の外力をせん断力と曲げモーメントとすると、要素の各ベクトルは次のように表される。

$$\{V\}^e = \{v_i, \psi_i, v_{j+1}, \psi_{j+1}\}^T \dots\dots\dots (12)$$

$$\{F\}^e = \{f_i, m_i, f_{j+1}, m_{j+1}\}^T \dots\dots\dots (13)$$

上添字 e は要素のベクトル、 T は行列の転置であること示している。

質量マトリックスと剛性マトリックスとしては有限要

素法による一般的な手法を用いて求める。なお、浮体の鉛直変位 $v(x)$ に比例する静水圧の復原力 $(\rho g v(x))$ は要素に沿って分布する荷重である。それを等価な節点荷重に置き換えた変位の係数マトリックスを要素の係数マトリックスで表示すると、次式ようになる。

$$[K_d]^e = \frac{\rho g l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 l は要素の長さを表している。静水圧復原力の全体係数マトリックスは各要素のマトリックス $[K_d]^e$ を剛性マトリックスと同じように重ね合わせる。

また、浮体に作用する流体圧力 $p = \partial \phi / \partial t$ は速度ポテンシャル ϕ の変化に関する分布荷重であるため、各要素に対して等価節点力で置き換えることが必要である。さらに、要素の節点力を各節点ごとに加えると、波浪外力ベクトル $\{F\}$ を求めることができる。運動方程式(11)は波浪外力である速度ポテンシャル ϕ と浮体の運動量の関係を示している。

運動方程式(11)を解くために、Newmarkの β 法を用いて計算を行った。

(4) 消波境界条件

仮想消波境界面では、大山ら(1985)による数値消波フィルター理論を用いた。この方法は、減衰を与えることにより入射波をエネルギー的に吸収するスポンジ層とSommerfeld型境界を組み合わせた数値消波フィルターである。スポンジ層は広い周期帯域の成分波に対して有効であり、非線形領域まで含めた不規則波を効率よく消波できる。成分波の波長がスポンジ層の幅に比べて大きくなると、消波効率が低下するため、スポンジ層の外側境界に設定したSommerfeld型境界でエネルギーの一部を吸収させる。

スポンジ層内の減衰係数 μ が水平方向に線形に分布すると、式(6)と式(7)により、境界面 S_3 において流速と圧力の連続性を満足した最終的な式が次のように導かれる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{gd}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \phi - \int_{x_1}^{x_2} \phi \left| \frac{\partial \mu}{\partial x} dx \right| \right) \quad (\text{on } S_3) \dots\dots\dots (15)$$

(5) 逐次計算

全境界面に離散的に配置した各節点の ϕ と自由表面及び接続面での節点の変位量は時間的に変化する。時間間隔を Δt の微小区間に分割し、各時間ステップごとに解くと、流体と浮体の運動を追跡することができる。節

点 i の $k+1$ ステップにおける速度ポテンシャル ϕ_i^{k+1} とその時間偏微分 $\dot{\phi}_i^{k+1}$, $\ddot{\phi}_i^{k+1}$ はそれぞれ前ステップの値に関して線形加速度的に変化するものと仮定すると, 次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\phi_i^{k+1} &= \phi_i^k + \Delta t \dot{\phi}_i^k \\ &= \phi_i^k + \Delta t \dot{\phi}_i^k + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\phi}_i^k \quad \dots\dots\dots (16)\end{aligned}$$

$$\dot{\phi}_i^{k+1} = \frac{2}{\Delta t} (\phi_i^{k+1} - \phi_i^k) - \dot{\phi}_i^k \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\ddot{\phi}_i^{k+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (\phi_i^{k+1} - \phi_i^k) - \frac{4}{\Delta t} \dot{\phi}_i^k - \ddot{\phi}_i^k \quad \dots\dots\dots (18)$$

同様に, 自由表面上 i 番目節点の η_i^{k+1} , $\dot{\eta}_i^{k+1}$ と $\ddot{\eta}_i^{k+1}$ 及び接続面上節点の V_i^{k+1} , $\dot{V}_i^{k+1}$ と $\ddot{V}_i^{k+1}$ についても, 次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\eta_i^{k+1} &= \eta_i^k + \Delta t \dot{\eta}_i^k \\ &= \eta_i^k + \Delta t \dot{\eta}_i^k + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\eta}_i^k \quad \dots\dots\dots (19)\end{aligned}$$

$$\dot{\eta}_i^{k+1} = \frac{2}{\Delta t} (\eta_i^{k+1} - \eta_i^k) - \dot{\eta}_i^k \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\ddot{\eta}_i^{k+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (\eta_i^{k+1} - \eta_i^k) - \frac{4}{\Delta t} \dot{\eta}_i^k - \ddot{\eta}_i^k \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned}V_i^{k+1} &= V_i^k + \Delta t \dot{V}_i^k \\ &= V_i^k + \Delta t \dot{V}_i^k + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{V}_i^k \quad \dots\dots\dots (22)\end{aligned}$$

$$\dot{V}_i^{k+1} = \frac{2}{\Delta t} (V_i^{k+1} - V_i^k) - \dot{V}_i^k \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\ddot{V}_i^{k+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (V_i^{k+1} - V_i^k) - \frac{4}{\Delta t} \dot{V}_i^k - \ddot{V}_i^k \quad \dots\dots\dots (24)$$

図-1の座標系において, 自由表面の鉛直変位は $z_i^{k+1} = \eta_i^{k+1}$ であり, 接続面での浮体の吃水を h とすると, 変動量 z_i^{k+1} が次の関係式で表される。

$$z_i^{k+1} = V_i^{k+1} - h \quad \dots\dots\dots (25)$$

本解法の逐次計算では, まず k ステップの水面形状のもとに解かれた $\phi_i^k, \Delta \phi_i^k$ を用いて式(16)により ϕ_i^{k+1} を予測し, 式(9)の境界積分方程式により自由表面及び接続面での鉛直方向速度と変動量を求め, 式(6), (10)と(11)で示される各境界面での力学的条件により ϕ_i^{k+1} を解く。このようにして得られた ϕ_i^{k+1} を予測値と比較し, 許容相対誤差を満足するまで繰り返し計算を行う。

3. 計算結果及び実験との比較

(1) 実験の概要

本解法の有効性を検討するため, 長さ 26 m, 幅 0.8 m, 深さ 1 m の二次元造波水路を用いて浮体の波浪応答実験を行った。実験に使用した弾性浮体の模型は, 幅 78 cm, 長さ 2 m のポリエチレン板を長さ 10 m の連続板に接合したものであり, 造波板から 7 m 離れた水路の中央

に置き, 上下方向に自由に動けるような方法で設置した。模型の厚さは 5, 10, 20 mm の 3 種類, 比重が 0.941, 弾性係数 458 MPa のものを使用した。

開水域での水面変動は容量線式波高計を用い, 浮体の応答変位は超音波式変位計を用いて計測した。水深は 0.6 m とし, 入射周期は 0.8~1.6 秒の 5 種類の規則波とした。

(2) 数値水槽モデル

模型実験に対し, 対応する二次元数値水槽モデルを作成し, その寸法は図-2 のようである。全境界面を離散化するには, 浮体境界上の要素長さ 0.1 m, 自由表面上の要素長さ 0.2 m, 底面上節点の間隔 0.5 m とした。計算は, 静水状態を初期条件とし, 波は線形波動理論に基づいて造波境界面から波形勾配 0.01 の波高を発生するものとした。各計算ステップの時間間隔 Δt を造波周期の 1/100 とし, 1 ステップにおける繰り返し計算の許容相対誤差を 0.01 とし逐次計算を行った。

(3) 水面と浮体の空間変位

図-3 は平板の厚さ 20 mm, 周期 1.2 秒の場合, 造波開始後 24 秒での自由表面の水位及び浮体変位の空間波形であり, 浮体下では波長が長く, 波高(浮体の変位)は小さくなっている様子が良く再現されている。図-4 は前方の開水域, 浮体境界内及び消波層前面の開水域での変位の時間変化を造波境界面から x 軸方向の順に上から下へ並べて示している。それぞれの図の縦軸は鉛直変位, 横軸は時間を示している。前方の開水域での水位は造波

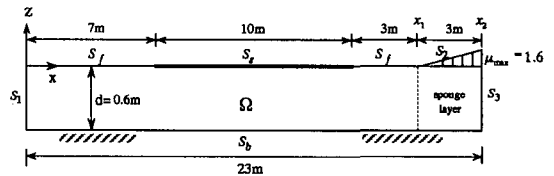


図-2 数値水槽の寸法

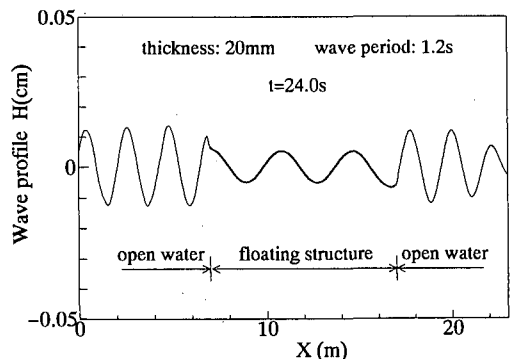


図-3 空間波形の計算例

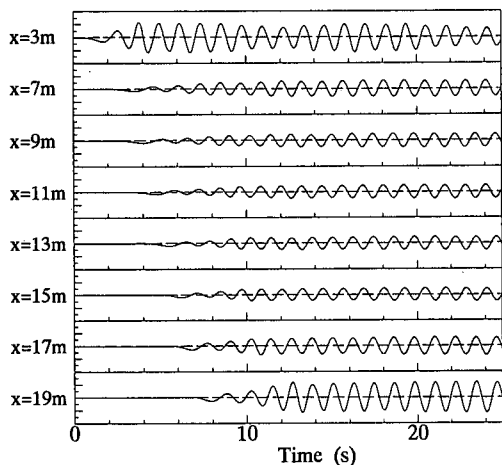


図-4 自由水面及び浮体の変形の時系列

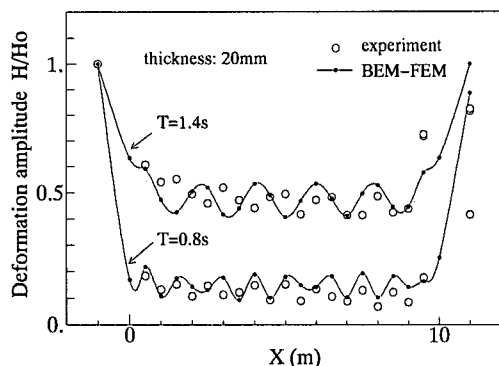


図-5 弾性浮体の振幅計算例

開始後定常状態となるが、次第に浮体運動による反射波の影響を受けていることが分かる。浮体両端では振幅が大きく、浮体内では小さくなっており、浮体運動は造波後10秒にはほぼ定常状態に達している。消波層前面の開水域では、水位の変動は定常になり、波が開境界面で消波され、浮体の運動は反射波の影響を受けていない。この図から、自由表面及び浮体の位置により運動の振幅や位相に差があることも分かる。

(4) 浮体の鉛直応答変位

図-5は浮体の鉛直応答変位の振幅を示した例である。そこで、振幅の実験値は各計測点の時系列により定常状態になった時点から5波波高の平均値であり、計算値も同様な手法で解析した。この図により、浮体端付近で急激に減少し、浮体内部では浮体の長さ及び入射波周期に依存するモードを持つ増減が見られる。図中の白円記号は実験値を示しており、計算結果はこれらと良く一致している。なお、実験値は波高が浮体内部で伝播方向に減衰する傾向を示しているが、計算波高は減衰してい

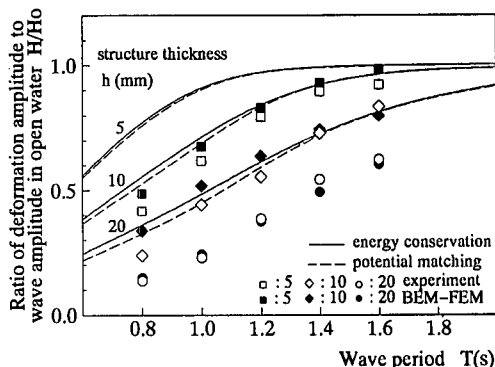


図-6 浮体下に進入する際の波高変化に対する計算値と実験値の比較

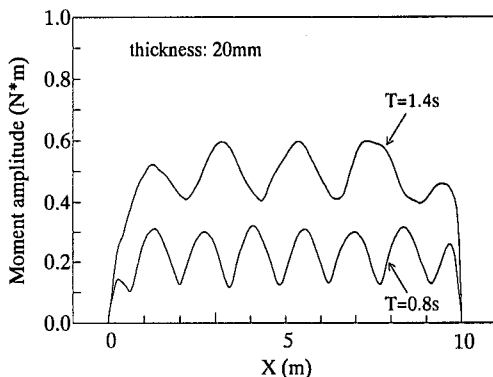


図-7 浮体の曲げモーメント応答

ない。それは本解法の数値モデルの中に減衰項を考えていない理由である。

図-6は浮体に進入する際の波高変化について、本解法、ポテンシャル接続法、エネルギーフラックス法により計算結果及び実験結果を比較したものである。本解法の場合には浮体端付近を除く範囲での波高の平均値から、自由水面上での定常波高との比により波高変化を求めている。この方法による浮体端での波浪変化は実験値とほぼ一致しており、定常進行波のポテンシャル接続法とエネルギーフラックス法では難しかった波高変化率の計算が可能となった。弾性浮体の波浪応答の計算法として有効であることが検証された。

(5) 曲げモーメント応答

図-7は入射波周期により厚さ20mm弾性浮体の曲げモーメント応答振幅を示している。曲げモーメントのピークは数箇所が生じており、モードが見られ、それは入射波周期に依存している。周期が長くなるほど、モードの形状が低次になり、曲げモーメントは大きくなる。本方法を用いて波浪による弾性浮体の曲げモーメント応答計算することが可能となる。

4. 結 論

本研究で提案した計算手方は流体運動と弾性浮体の干渉を扱うものである。流体運動には BEM を、また浮体の弾性変形解析には FEM を別個に用い、浮体と流体の境界面での変位及び圧力を接続することによって、流体と浮体の干渉が計算される。本方法は BEM と FEM の利点を取り入れた計算方法であり、特に以下のような利点がある。(1) 全ての変量は境界面上に設定できるため、計算点が少ない。(2) 速度ポテンシャルに対してなんらの仮定も設けていないため、造波境界条件を与えるだけで、不規則波を含む任意の波浪条件に対して適用できる。(3) BEM と FEM の計算結果を境界面で接続する際、陰解法を用いることによって計算精度を保証できる。

本研究では、規則波による平板状弾性浮体の変形に関

する計算及び実験を行い、両者の比較により本計算法の有効性を検討した。その結果、従来の方法では説明できなかった平板端での波浪変形が本方法では良く表現できており、弾性浮体の波浪応答の計算法として有効であることが検証された。

参 考 文 献

- 大山 巧・灘岡和夫 (1990): 数値波動水槽に置ける開境界処理のための数値消波フィルターの開発, 海岸工学論文集, 第 37 巻, pp. 17-20.
- 鈴木康正・富田康大・松森孝弘 (1993): 可撓性浮体の波浪中動揺と消波特性の数値解析, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 896-900.
- 宇都宮智昭・渡邊英一・岡村謙作・中井幸治・関田欣治・太田英美 (1995): 弾性変形を考慮した大型ボンツーン浮体の波浪応答特性について, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 961-965.