

一般曲線座標系表示の Navier-Stokes 方程式を用いた 円柱周辺流体場の数値解析

石 田 啓*・由 比 政 年**

1. 序 論

海洋構造物が受ける流体力やその周辺の流況を知ることは海岸工学上の基本課題の1つである。これに関し、近年の数値流体力学の発展に伴い、Navier-Stokes 方程式を数値的に解いて、流体力学的な検討を行うことが可能となってきた(例えば、保原ら(1992)参照)が、海岸工学の分野での適用例(佐藤ら, 1993; 奥村ら, 1995)はまだ少ない。そこで、本研究では、海洋構造物周辺の流況や流体力に関する基礎研究の一環として、円柱周りの一様な流れ場および静止流体中で単振動する円柱周りの流体場に関し、一般曲線座標系に変換した非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の数値解析を差分法を用いて行い、渦形状、剥離点、抗力係数等に関する検討を行う。また、既往の実験結果等と比較することにより計算手法の有効性を検証する。

2. 解析の手法

2.1 基礎方程式

2次元非圧縮性粘性流体に対する流体場の基礎方程式は、連続式および Navier-Stokes 方程式で表される。

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\text{grad } p + \Delta \mathbf{u} / \text{Re} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\mathbf{u}$ は速度、 p は圧力、 Re は Reynolds 数である。

差分法による非圧縮性流れの数値解析においては、基礎方程式に対していくつかの異なる表記法が用いられている。これに関し、本研究では、

・圧力が陽に求まり実験との比較が容易なこと

・将来の3次元解析への拡張が直接的に行えること

を考慮して、式(1)と(2)に示した、基礎変数(速度、圧力)表示の連続式および Navier-Stokes 式を用いることとし、MAC法(Harlowら, 1965)に従って数値解析を行う。

まず、式(2)の発散をとると、圧力に対する Poisson 方程式(3)が導かれる。

$$\Delta p = -(u_x u_x + 2u_y v_x + v_y v_y) + R \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$R \equiv -\partial D / \partial t - (\mathbf{u} \cdot \nabla) D + \Delta D / \text{Re}, D \equiv \text{div } \mathbf{u} \quad \dots\dots (4)$$

ただし、 $\mathbf{u} = (u, v)$ であり、下付き添え字は偏微分を表す。

式(3)中の R は、式(1)より本来ゼロとなる量であるが、この項を完全に無視すると、計算の過程で数値誤差が蓄積する恐れがある。そこで、 R の中で支配的となる第1項を数値誤差の補正項として残し、この項を次式のように、1次精度の前進差分で近似する。

$$\partial D / \partial t \approx (D^{n+1} - D^n) / \Delta t \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $D^{n+1} = 0$ となるよう圧力場を決めるようにすると、式(3)は、次のようになる。

$$\Delta p = -(u_x u_x + 2u_y v_x + v_y v_y) + D^n / \Delta t \quad \dots\dots (6)$$

2.2 一般曲線座標系への変換

次に、基礎方程式を一般曲線座標系に変換する。基礎方程式を一般曲線座標系で表わすことにより、任意形状の物体境界に適合した座標系での数値解析が可能になり、解析プログラムの汎用性が向上すると共に、境界条件の設定も簡単にかつ精度良く実行できるようになる。

ここでは、計算格子が時間的に移動・変形する場合の数値解析も可能となるように、次の座標変換を用いる。

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(2)および(6)を式(7)に従って座標変換し、メトリクス間の関係式を用いて変形すると、一般曲線座標系での基礎方程式として次式が得られる。

$$u_\tau + [(u-x_\tau)y_\eta - (v-y_\tau)x_\eta]u_\xi / J + [(v-y_\tau)x_\xi - (u-x_\tau)y_\xi]u_\eta / J = -(y_\eta p_\xi - y_\xi p_\eta) / J + \bar{\Delta} u / \text{Re} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$v_\tau + [(u-x_\tau)y_\eta - (v-y_\tau)x_\eta]v_\xi / J + [(v-y_\tau)x_\xi - (u-x_\tau)y_\xi]v_\eta / J = -(x_\eta p_\xi - x_\xi p_\eta) / J + \bar{\Delta} v / \text{Re} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\bar{\Delta} p = -[(y_\eta u_\xi - y_\xi u_\eta)^2 + 2(x_\eta u_\xi - x_\xi u_\eta) \cdot (y_\eta v_\xi - y_\xi v_\eta) + (x_\eta v_\xi - x_\xi v_\eta)^2] / J^2 + (y_\eta u_\xi - y_\xi u_\eta + x_\eta v_\xi - x_\xi v_\eta) / (J \Delta t) \quad \dots\dots (10)$$

ここで、 $\bar{\Delta}$ は一般曲線座標系での Laplace 演算子であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} A = & (\alpha A_{\xi\xi} - 2\beta A_{\xi\eta} + \gamma A_{\eta\eta}) / J^2 \\ & + [(x_{\eta\xi} - 2\beta x_{\eta\eta} + \gamma x_{\eta\eta})(y_\xi A_\eta - y_\eta A_\xi) \\ & + (\alpha y_{\eta\xi} - 2\beta y_{\eta\eta} + \gamma y_{\eta\eta})(x_\eta A_\xi - x_\xi A_\eta)] / J^3 \\ & \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科

** 正会員 工修 金沢大学助手 工学部土木建設工学科

なお, J, α, β, γ は, 次のように定義される.

$$\begin{aligned} J &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \quad \alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 基礎方程式の差分化

数値的な安定性を良くするために, 式(8)および(9)を時間積分する際には, 陰的な Euler スキームを用いた.

$$\begin{aligned} (u^{n+1} - u^n)/\Delta t + [(u - x_\tau)y_\eta/J - (v - y_\tau)x_\eta/J]^n \\ \cdot u_\xi^{n+1} + [(v - y_\tau)x_\xi/J - (u - x_\tau)y_\xi/J]^n u_\eta^{n+1} \\ = -(y_\eta p_\xi - y_\xi p_\eta)/J + \bar{A} u^{n+1}/\text{Re} \quad (13) \end{aligned}$$

なお, 対流項は, u^{n+1} に対して次のように線形化した.

$$\begin{aligned} [(u - x_\tau)y_\eta/J - (v - y_\tau)x_\eta/J]^{n+1} u_\xi^{n+1} \\ \approx [(u - x_\tau)y_\eta/J - (v - y_\tau)x_\eta/J]^n u_\xi^{n+1} \quad (14) \end{aligned}$$

空間的な差分化においては, 式(8)および(9)の対流項以外はすべて次のような2次精度の中心差分を用いた.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{i,j} &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right)_{i,j} &\approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta\xi)^2} \quad (f = u, v, p, x, y) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

また, 対流項に対しては, 例として式(16)および(17)に示すような3次精度の風上差分(Kawamura ら, 1986)を用いて差分化を行った.

$$\begin{aligned} \left(g \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{i,j} &\approx g_{i,j} \frac{-u_{i+2,j} + 8(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + u_{i-2,j}}{12\Delta\xi} \\ &+ |g_{i,j}| \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{4\Delta\xi} \quad (16) \end{aligned}$$

$$g = \frac{(u - x_\tau)y_\eta - (v - y_\tau)x_\eta}{J} \quad (17)$$

式(8)~(10)を式(13)~(17)に基づいて差分化した式が, 数値計算上の基礎方程式となる. この差分方程式をSOR法を用いて解き, 流体場の時間発展の計算を行う. なお, 計算格子には物理量の評価点と差分格子点が一致する通常格子(regular mesh)を用いている.

3. 解析結果および考察

3.1 円柱周辺の一樣流場の解析

まず, Reynolds数が小さい($\text{Re} \leq 50$)場合を対象とし, 円柱周りの一樣流場の解析を行った. 円柱中心を原点とし, 流れ方向に x 軸を取った場合, このReynolds数の範囲内では, 流れ場は x 軸に関してほぼ対称になることが実験的に確認されているので(Coutanceau ら, 1977), 解析領域も円柱の上半分($y \geq 0$)のみを取り, 流れ場の x 軸に関する対称性を仮定して解析を行った.

解析にあたっては, 円柱の表面に適合した座標系を取り, 円柱の周方向に ξ 軸, 円柱の半径方向に η 軸をとつ

た. 使用した格子点数は 83×83 点であり, 計算領域の全体長は, 半径方向に円柱直径の約60倍とした.

計算に用いた格子の円柱近傍での拡大図を図-1に示す. 周方向の格子間隔は等間隔, 半径方向の格子間隔は, 円柱の近傍では格子点が密に, 遠方では格子点が疎となるようにした. なお, 半径方向の最小の格子幅を0.01とし, 境界層の内部に数点の格子点が入るようにしてある.

境界条件は, 次のように設定した. まず, 上流側の外部境界では一樣流の条件を与え, 下流側では外挿により速度と圧力を決定した. また, 円柱表面上では, 速度を滑りなしの条件で与えた. 円柱表面上の圧力は, 円柱表面上で基礎方程式が満足されるように式(18)を用いて決定するのが最も正確であるが, 円柱に隣接する格子点が円柱に十分近い場合には, 式(18)の代わりに式(19)を用いても解析結果にほとんど影響は見られないことが確認できたので, 圧力の境界条件としては式(19)を用いた.

$$p_\eta = (x_\eta \bar{A} u + y_\eta \bar{A} v)/\text{Re} \quad (18)$$

$$p_\eta = 0 \quad (19)$$

なお, x 軸上の境界では, 上述の対称条件を用いている.

初期条件としては, 静止流体場を考え, 上流境界での速度を徐々に増加させて一定値へと近づけることで, 最終的に一樣流場を実現した. これらの条件の下に解析を行った結果を以下に示す.

図-2はReynolds数が20の場合の円柱近傍での流れ線図である. 円柱後方の後流渦が明確に現れていることがこの図より確認できる. 次に, 図-3および4に, それぞれ, 後流渦の x 方向の長さ L (後方旋み点と渦後端の距離)および剝離角 θ のReynolds数に対する変化を示す.

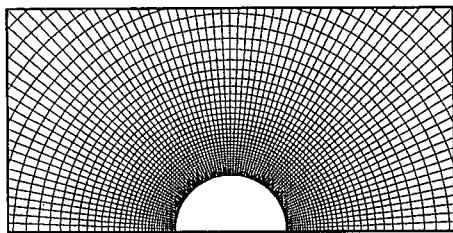


図-1 円柱近傍の解析格子

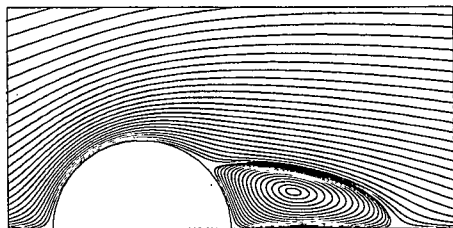


図-2 円柱近傍の流れ線図

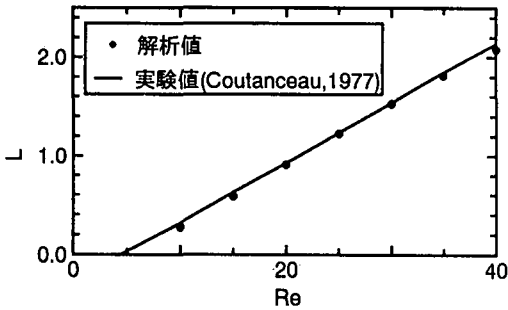


図-3 後流渦の長さの変化

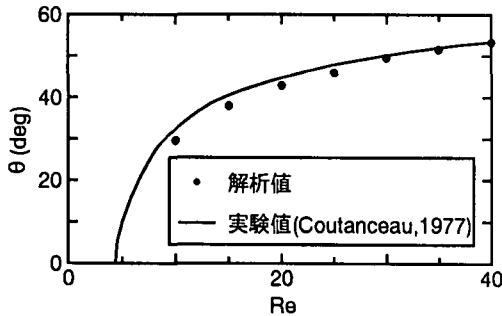


図-4 剥離角の変化

後流渦の長さは Reynolds 数に対して直線的な増加傾向を示し、また、剥離角は Reynolds 数が 20 以上の領域で直線的に増加する傾向がみられた。なお、円柱表面上の圧力分布を調べ、周方向の圧力勾配がゼロとなる位置と剥離点の位置を比較したところ、圧力勾配ゼロの点の方が、25°～40°程度前方にすることが確認できた。

図中の実線は、Coutanceau ら (1977) が実験結果から求めた曲線であるが、後流渦の長さおよび剥離角に関する解析結果は、Coutanceau らの実験結果と非常に良く一致している。なお、円柱表面上の圧力分布や後流域の速度分布、渦の中心位置等に関しても実験結果との良好な一致が見られた。

表-1 には Reynolds 数による抗力係数の変化を示す。Reynolds 数が増加すると抗力係数 (C_D) は減少し、圧力抵抗係数 (C_{DP}) が摩擦抵抗係数 (C_{DV}) に比べて相対的に大きくなる傾向が良く捉えられている。なお、表中の括

表-1 抗力係数の変化 (カッコ内は Dennis ら (1970) の解析値)

Re	10	20	30	40	50
C_D	2.819 (2.846)	2.048 (2.045)	1.733	1.544 (1.522)	1.435
C_{DV}	1.270 (1.246)	0.829 (0.812)	0.635	0.529 (0.524)	0.458
C_{DP}	1.550 (1.600)	1.227 (1.233)	1.098	1.025 (0.998)	0.977

弧内の値は、Dennis ら (1970) が、渦度-流れ関数表示の Navier-Stokes 方程式に対する数値解析により求めた値であるが、今回の解析値は Dennis らの結果と非常に良い一致を示した。

3.2 円柱周辺の振動流場の解析

次に、振動流場の解析例として、静止流体中で単振動を行う円柱の周りの流体場の解析を行った。

円柱周りの振動流場は、Reynolds 数および KC 数の 2 つの無次元パラメータの組み合わせにより、いくつかの代表的なパターンをとる (たとえば、Justesen ら (1991) 参照)。なお、Reynolds 数および KC 数は、式 (20) で定義され、式中の d は円柱の直径、 U_m は振動流の最大流速、 T は振動の周期、 ν は流体の動粘性係数を表す。

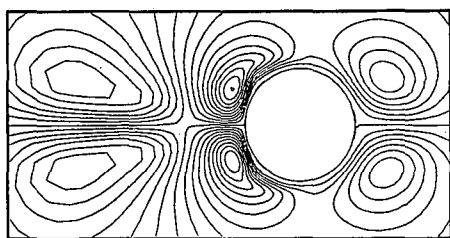
$$Re = \frac{U_m d}{\nu}, \quad KC = \frac{U_m T}{d} \dots\dots\dots (20)$$

振動流場の代表的なパターンの多くは 3 次元的な構造を持つことが実験的に確認されている (たとえば、Tatsuno ら (1990)) が、本論では、研究の第一段階として、流れ場は 2 次元として解析を行う。

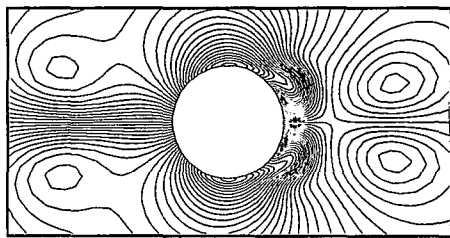
Reynolds 数が中程度の場合には、流体場の x 軸に関する対称性が崩れる場合も考えられるため、ここでは $y < 0$ の部分にも格子を作成して解析を行った。なお、この計算で用いた格子点は、 94×82 点であり、半径方向の最小格子幅は 0.005、計算領域の半径方向の全長は円柱直径の約 60 倍とした。以下では、 $Re=1000$ 、 $KC=4$ とし、円柱を $dx_c/d\tau = -\sin(\pi\tau/2)$ と単振動させた場合の解析結果を示す。なお、 x_c は、円柱の中心の x 座標を表し、振動の中心点を座標系の原点にとるものとする。

図-5(a)～(j) は、第 3 周期目 ($\tau=8.0 \sim 12.0$) の前半の半周期分を取り出して、円柱近傍での流線の時間変化を示したものである。なお、 $\tau=8.0$ で、円柱は振動の右端に位置し、 $\tau=9.0$ まで、加速しながら左側へと移動する。 $\tau=9.0$ で最大の移動速度に達した後は、円柱は徐々に減速しながらもさらに左側へと移動を続け、 $\tau=10.0$ で速度ゼロとなり振動の左端に到達する。

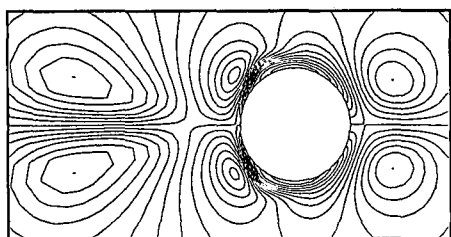
図 (a) 即ち $\tau=8.0$ では、円柱の左側に 2 組、右側に 1 組のほぼ上下対称な渦対が存在する。以下、簡単のため、左側の渦対を L1、L2 (円柱から遠方にある方が L1)、右側の渦対を R1 とそれぞれ表記するが、L1、R1 は L2 に比べるとかなり弱い渦であり、 $y > 0$ の領域での渦の向きは、L1 が時計回り、L2、R1 が反時計回りで、 $y < 0$ ではその逆の向きとなる。円柱が徐々に加速しながら左側へと移動するとともに、L2 の渦は円柱の上方あるいは下方へと押し出されていく (図 (a)～(c))。また、その際に、L2 の渦の強さは次第に弱まり、図 (d) 即ち $\tau=8.6$ で消滅している。一方、円柱の上下端部からは、新たな渦 (R2 とする) が生成されて成長を続ける (図 (b)～



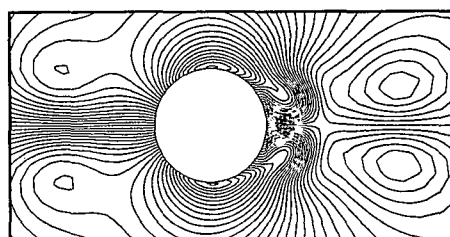
(a) $r=8.0$



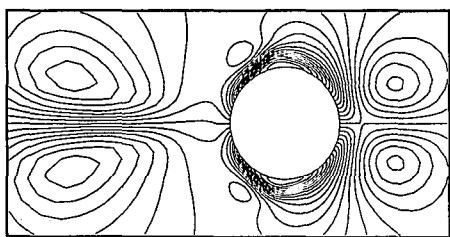
(f) $r=9.0$



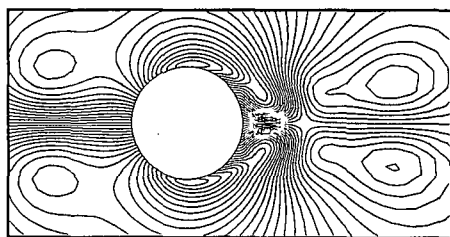
(b) $r=8.2$



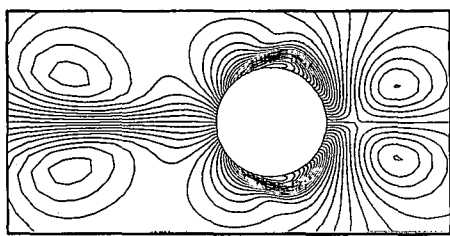
(g) $r=9.2$



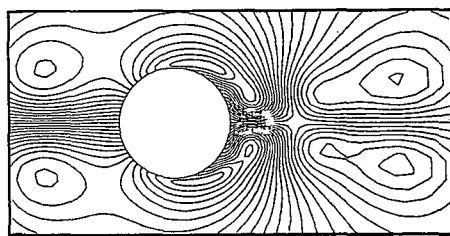
(c) $r=8.4$



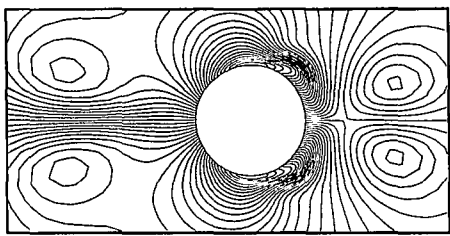
(h) $r=9.4$



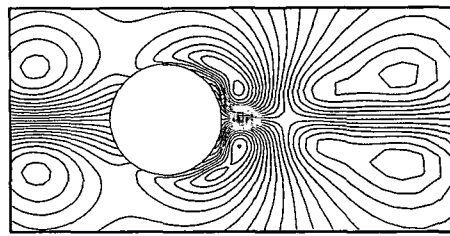
(d) $r=8.6$



(i) $r=9.6$

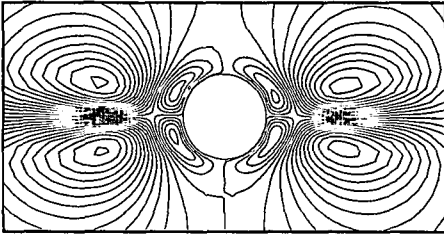


(e) $r=8.8$

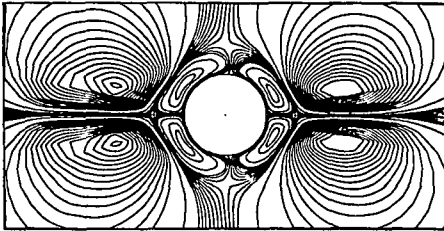


(j) $r=9.8$

図-5 円柱近傍での流線の時間変化



(a) 本解析による時間平均流線



(b) Badr ら (1995) による時間平均流線

図-6 1 周期平均の流線図

(j)). この渦の向きは, $y > 0$ で時計回り, $y < 0$ で反時計回りである。R2 の渦は, 円柱の減速時に円柱から離れ, 円柱の後方に回り込んで大きな渦へと成長する (図 (h) ~ (j)). この結果, $\tau = 10.0$ では, $\tau = 8.0$ の時の流線図を左右逆転したような流線図が得られる。そして, 後半の半周期に関しては, 図 (a) ~ (j) を左右逆転させたような流線図をとる。なお, この解析例では, 1 周期を通じて速度場は x 軸に関してほぼ対称となった。

次に, 第 3 周期目の 1 周期間の時間平均の流線図を図-6(a) に示す。静止流体中で振動する円柱の周りに生成される定常循環流が明確に現れている。図-6(b) は, Badr (1995) らが渦度一流関数表示の Navier-Stokes 方程式に対して, 同じ条件下で数値解析を行って求めた時間平均流線図であるが, 両者は非常に良く一致しており, 本数値解法の妥当性が示されていると言える。

4. 結 論

2 次元非圧縮性の Navier-Stokes 方程式を一般曲線座標系に変換して数値解析を行い, 定常および非定常な流体場において, 円柱の受ける流体力やその周辺の流況の検討を行った。円柱周りの一様流に対する解析結果では, 渦形状, 剝離点等に関して従来の実験結果と非常に良い一致が確認され, 解析手法の有効性を検証すること

ができた。また, 静止流体中の円柱の振動に伴う流体場の変化を解析した例では, 円柱の移動に伴う渦の生成, 移動, 消滅といった流体の非定常な運動を安定に解析することができた。

本論では, 1 つの適用例として円柱周りの流況を扱ったが, 本解析手法は, 任意形状の物体周りの流体場あるいは複数の物体周りの流体場に対しても適用可能である。また, 境界条件を変更するだけで, 円柱が自励振動を行うような流体場や一様流・振動流の共存場を解析することも可能であり, 3 次元解析への拡張も直接的に行うことができる。

今後は, 本解析手法のこうした特性を生かし, 円柱以外の任意形状の物体を対象とした流体場の解析を行うと共に, 一様流・振動流共存場や波動場さらには 3 次元流体場の解析を進める予定である。

参 考 文 献

- 奥村慎也, 佐藤幸雄, 渡部靖彦 (1995): 波動場中の円柱のまわりの流れ構造について, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 831-835.
- 佐藤幸雄, 折橋恒春, 浜中建一郎 (1993): 剝離を伴った振動流中の円柱に働く流体力について, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 856-860.
- 保原 充, 大宮司久明 編 (1992): 数値流体力学, 東京大学出版会, 635 p.
- Badr, H. M., S. C. R. Dennis, S. Kocabiyik and P. Nguyen (1995): Viscous oscillatory flow about a circular cylinder at small to moderate Strouhal number, J. Fluid Mech., Vol. 303, pp. 215-232.
- Coutanceau, M. and R. Bouard (1977): Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow, J. Fluid Mech., Vol. 79, Part 2, pp. 231-256.
- Dennis, S. C. R. and G. Chang. (1970): Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100, J. Fluid Mech., Vol. 42, Part 3, pp. 471-489.
- Harlow, F. H. and J. E. Welch. (1965): Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Physics of Fluids, Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189.
- Justesen, P. (1991): A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol. 222, pp. 157-196.
- Kawamura, T., H. Takami and K. Kuwahara (1986): Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness, Fluid Dynamics Research Vol. 1, pp. 145-162.
- Tatsuno, M. and P. W. Bearman (1990): A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers and low Stokes numbers, J. Fluid Mech., Vol. 211, pp. 157-182.