

防波堤先端付近における多方向不規則波の統計的性質

川崎 俊正* ・磯部 雅彦** ・渡辺 晃**
横木 裕宗*** ・小竹 康夫**** ・藤原 隆一****

1. はじめに

異常高波による防波堤の被害程度、例えばケーソンの滑動量などを調べてみると、全延長にわたって一様に生じるのではなく、防波堤沿いに波状に分布することがよくある。この‘蛇行災害’と呼ばれる現象の原因は、防波堤での回折効果によるところが大きいと考えられている。実際、規則波が半無限堤に入射した場合には、回折の影響で防波堤沿いの波高分布は波状に変動していることが解析的に求められており、蛇行災害をこの波高の変動と関連させて検討した例はいくつかある。(例えば、伊藤ら, 1971)

しかし、実際の海洋では周期および波向に関して不規則な多方向不規則波が防波堤に作用しており、単に規則入射波のみの回折現象だけで蛇行災害を説明するには不十分である。すなわち、波の多方向不規則性を考慮することが必要となる。

そこで本研究では、半無限堤による多方向不規則波の回折現象を統計的な立場から論じ、防波堤に作用する正味の波力を確率的に評価することにより、蛇行災害の原因をより忠実に説明することを目的とする。また、室内実験により理論式の妥当性を検討した。

2. 理論式の誘導

(1) 防波堤前後の水面変動の結合確率密度

極座標を用いた平面上の位置 (r, θ) における入射波の水面変動 η_i の式は

$$\eta_i(t) = a \cdot e^{i(kr \cos(\theta - \alpha) - 2\pi f t)} \quad (1)$$

で表され、図-1 に示すように半無限堤に対して規則波が角 α で入射する場合を考える。防波堤前面および背面での水面変動 η_1, η_2 は伝達関数を用いて

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(t) &= H_1 \eta_i \\ \eta_2(t) &= H_2 \eta_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と表される。ここに、伝達関数 H_1, H_2 は防波堤端からの距離を r としてそれぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} H_1(f, \alpha) &= 2e^{-ikr \cos \alpha} \cdot I(\gamma) \\ H_2(f, \alpha) &= 2e^{-ikr \cos \alpha} \cdot I(-\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$I(\gamma) = \frac{1 + C(\gamma) + S(\gamma)}{2} + i \frac{C(\gamma) - S(\gamma)}{2} \quad (4)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

ここに、 C, S はフレネル積分を表す。

さて、多方向不規則波浪場は、周波数と波向の異なる無数の成分波の重ね合わせによって表現できる。 (j, k) 番目の成分波の複素振幅を a_{jk} 、周波数を f_j (対応する波数を k_j)、波向を α_k とすれば、入射波の水面変動 η_i は次式のように表される。

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \cdot e^{i\phi_{jk}} \quad (6)$$

$$\phi_{jk} = k_j r \cos(\theta - \alpha_k) - 2\pi f_j t \quad (7)$$

また、成分波の複素振幅 a_{jk} は、その成分波が代表する周波数と波向の範囲を Δf_j および $\Delta \alpha_k$ とすれば、方向スペクトル $S(f, \theta)$ との関係において

$$\langle a_{jk} \cdot a_{jk}^* \rangle = S(f_j, \alpha_k) \cdot \Delta f_j \Delta \alpha_k \quad (8)$$

となる。ここに、 $\langle \rangle$ は統計的期待値を、 $*$ は共役複素数を表す。

式(6)で表される波が半無限堤に入射した場合、防波堤前面および背面での水面変動 η_1, η_2 は、式(3)中の伝達関数を用いて

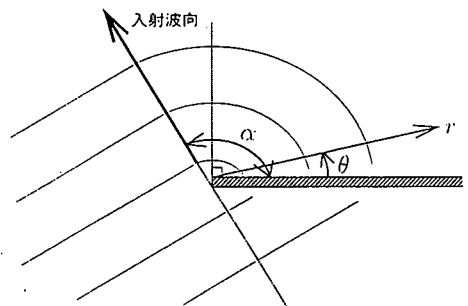


図-1 波の回折における座標等の定義図

* 正会員 工修 運輸省航空局飛行場部計画課
** 正会員 工博 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻
*** 正会員 工博 茨城大学講師 工学部都市システム工学科
**** 正会員 工博 東洋建設(株) 総合技術研究所鳴尾研究所水工研究室
***** 正会員 工修 東洋建設(株) 総合技術研究所鳴尾研究所水工研究室

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_{1jk} \cdot a_{jk} e^{i\phi_{jk}} \\ \eta_2(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_{2jk} \cdot a_{jk} e^{i\phi_{jk}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここに、 $H_{1jk}=H_1(f_j, a_k)$, $H_{2jk}=H_2(f_j, a_k)$ とした。
式(9)により、大数の法則を用いれば2種の変数 η_1 , η_2 はすべて正規分布することがわかり、また、平均値は0となる。すなわち

$$\langle \eta_1 \rangle = \langle \eta_2 \rangle = 0 \dots\dots\dots (10)$$

である。

また、分散・共分散については、式(9)により次のようにおける。

$$\left. \begin{aligned} \langle \eta_1 \eta_1^* \rangle &= m_{11}, \quad \langle \eta_1 \eta_2^* \rangle = m_{12} \\ \langle \eta_2 \eta_1^* \rangle &= m_{12}^*, \quad \langle \eta_2 \eta_2^* \rangle = m_{22} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

実際に分散・共分散の値を求めるためには、式(8)の関係から

$$m_{\mu\nu} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} H_{\mu}(f, \theta) H_{\nu}^*(f, \theta) S(f, \theta) d\theta df \dots\dots (12)$$

として計算できる。

$(\eta_1, \eta_2) = (\zeta_1, \zeta_2)$ とおいた場合の共分散マトリックス $\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} [\langle \zeta_i \zeta_k^* \rangle] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12}^* & m_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

となる。一般に正規分布する複素多変数 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ の結合確率密度関数 $p(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ は

$$\begin{aligned} p(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \\ = \frac{1}{(2\pi)^n |\mathcal{M}|} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \zeta_j \mathcal{M}_{jk}^{-1} \zeta_k^* \right) \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

と書ける。式(13)から

$$|\mathcal{M}| = \frac{M}{4} \dots\dots\dots (15)$$

$$\mathcal{M}^{-1} = \frac{2}{M} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{12}^* & m_{11} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

$$M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{12}^* \dots\dots\dots (17)$$

となるので、式(14)は

$$\begin{aligned} p(\eta_1, \eta_2) &= \frac{1}{\pi^2 M} \exp \left[-\frac{1}{M} (m_{22} \eta_1 \eta_1^* \right. \\ &\quad \left. - m_{12} \eta_1 \eta_2^* - m_{12}^* \eta_2 \eta_1^* + m_{11} \eta_2 \eta_2^*) \right] \dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる。この式は、水面変動 η_1, η_2 の実数部、虚数部をそれぞれ $\eta_{1c}, \eta_{1s}, \eta_{2c}, \eta_{2s}$ とすると、それらの結合確率密度 $p(\eta_{1c}, \eta_{1s}, \eta_{2c}, \eta_{2s})$ を書き直した式と同値である。ここで、

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \eta_{1c} + i\eta_{1s} \\ \eta_2 &= \eta_{2c} + i\eta_{2s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$m_{\mu\nu} = m_{c\mu\nu} + im_{s\mu\nu} \dots\dots\dots (20)$$

$$m_{s\mu\mu} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

の関係を式(18)に代入すると

$$\begin{aligned} p(\eta_{1c}, \eta_{1s}, \eta_{2c}, \eta_{2s}) \\ = \frac{1}{\pi^2 M} \exp \left\{ -\frac{1}{M} [m_{22c}(\eta_{1c}^2 + \eta_{1s}^2) + m_{11c}(\eta_{2c}^2 + \eta_{2s}^2) \right. \\ \left. - 2m_{12c}(\eta_{1c}\eta_{2c} + \eta_{1s}\eta_{2s}) - 2m_{12s}(\eta_{1c}\eta_{2s} - \eta_{1s}\eta_{2c})] \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

を得る。ここに、

$$M = m_{11c}m_{22c} - m_{12c}^2 - m_{12s}^2 \dots\dots\dots (23)$$

である。

防波堤前後の水面変動の結合確率密度 $p(\eta_{1c}, \eta_{2c})$ を求めるためには、式(22)を η_{1s}, η_{2s} に関して $-\infty \sim \infty$ で積分すればよい。その結果

$$\begin{aligned} p(\eta_{1c}, \eta_{2c}) \\ = \frac{1}{\pi \sigma_{\eta_1 \eta_2}} \exp \left[-\frac{1}{\sigma_{\eta_1 \eta_2}^2} (m_{22c} \eta_{1c}^2 - 2m_{12c} \eta_{1c} \eta_{2c} + m_{11c} \eta_{2c}^2) \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (24)$$

$$\sigma_{\eta_1 \eta_2}^2 = m_{11c}m_{22c} - m_{12c}^2 \dots\dots\dots (25)$$

となる。

図-2は、表-1に示す波浪条件で、入射波の方向スペクトルを Bretschneider-光易型で与えた場合の、 $r/L_s = 0.3$ (L_s は有義波周期に対応する波長)の地点における防波堤前後の水面変動 η_{1c}, η_{2c} の結合確率密度のコンターを示している。

表-1 入射波諸元

有義波高 $H_{1/3}$	有義波周期 $T_{1/3}$	水深 h	主波向角 α_p	方向集中度 パラメタ S_{max}
2.0 m	10.0 s	20 m	0°	75

(α_p は防波堤法線軸からの角度)

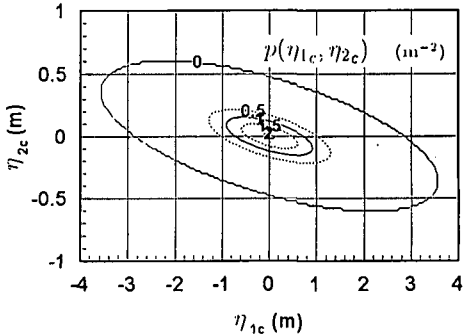


図-2 防波堤前後の水面変動の結合確率密度

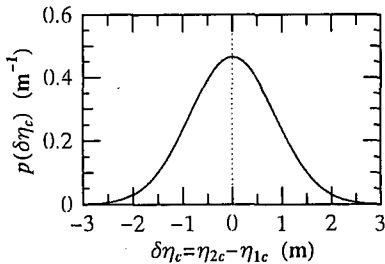


図-3 防波堤前後の水位差の確率密度

(2) 防波堤周りの水面変動・波高の確率密度

式(24)を η_{2c} に関して $-\infty \sim \infty$ で積分すれば、地点1での水位 η_{1c} の確率密度が求められる。その結果、

$$p(\eta_{1c}) = \frac{1}{\sqrt{\pi m_{11c}}} \exp\left(-\frac{\eta_{1c}^2}{m_{11c}}\right) \quad (26)$$

を得る。これより、狭帯域スペクトルの場合、この地点での波高 H_1 の分布はレーリー分布

$$p(H_1) = \frac{H_1}{2m_{11c}} \exp\left(-\frac{H_1^2}{4m_{11c}}\right) \quad (27)$$

に従う。

同様にして、地点2での水面変動 η_2 の確率密度 $p(\eta_{2c})$ および波高 H_2 の分布式 $p(H_2)$ を得ることができる。

(3) 防波堤前後の水位差の確率密度

防波堤前後の水位差を $\delta\eta_c$ 、すなわち

$$\delta\eta_c = \eta_{2c} - \eta_{1c} \quad (28)$$

とする。このとき、

$$\frac{\partial \eta_{2c}}{\partial (\delta\eta_c)} = 1 \quad (29)$$

であるから、式(24)は

$$p(\eta_{1c}, \delta\eta_c) = \frac{1}{\pi \sigma_{\eta_1 \eta_2}} \exp\left[-\frac{1}{\sigma_{\eta_1 \eta_2}^2} \cdot (m_{22c}\eta_{1c}^2 - 2m_{12c}\eta_{1c}\delta\eta_c + m_{11c}\delta\eta_c^2)\right] \quad (30)$$

となる。

水位差の確率密度 $p(\delta\eta_c)$ を求めるためには、式(30)を η_{1c} に関して $-\infty \sim \infty$ で積分すればよく、その結果

$$p(\delta\eta_c) = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_{\delta\eta}^2}} \exp\left[-\frac{(\delta\eta_c)^2}{\sigma_{\delta\eta}^2}\right] \quad (31)$$

$$\sigma_{\delta\eta}^2 = m_{11c}m_{22c} - m_{12c}^2 \quad (32)$$

となり、分散が $\sigma_{\delta\eta}^2 = (m_{11c}m_{22c} - m_{12c}^2)/2$ の正規分布をしていることがわかる。

図-3は、表-1に示した波浪条件を与えた場合の、 $r/L_s = 0.3$ の位置における水位差の確率密度を表す。

(4) 防波堤周りの動圧の確率密度

微小振幅波理論によれば、ある地点での水位が η であるとき、動圧 p_D は

$$p_D = H_p \eta \quad (33)$$

$$H_p = \rho g \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (34)$$

さて、多方向不規則入射波による防波堤周りの水面変動は式(9)で表されるから、地点1の深度 z における動圧 p_{D1} は

$$p_{D1}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_{pj} H_{1jk} a_{jk} e^{i\phi_{jk}} \quad (35)$$

となる。ここに、 $H_{pj} = H_p(f_j)$ とした。

上式を式(9)と比較すると、動圧の伝達関数 H_p を乗じた違いがあるだけで、動圧に関する確率密度関数の導出は水面変動の場合と全く同様な手法を用いて求めることができる。異なるのは分散・共分散の値であり、それを $m_{p\mu\nu}$ とすると

$$m_{p\mu\nu} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} H_p^*(f) H_p(f, \theta) H_p^*(f, \theta) S(f, \theta) d\theta df \quad (36)$$

として計算できる。

(5) 防波堤単位長当りに作用する正味の波力の分布

防波堤に作用する正味の波力の確率密度も同様な手法を用いて求めることができる。地点1における水面変動が η_1 のとき、動圧に起因する防波堤単位長当りに作用する絶対波力 P_1 は

$$P_1 = \int_{-h}^{\eta} p_{D1} dz \approx \rho g h \frac{\tanh kh}{kh} \eta_1 \quad (37)$$

となり、その地点の水面変動に対する伝達関数

$$H_P(f) = \rho g h \frac{\tanh kh}{kh} \quad (38)$$

を導入すれば

$$P_1 = H_P \eta_1 \quad (39)$$

となる。防波堤前後の絶対波力の結合確率密度を求め、波力の差をとることで防波堤に作用する正味の波力 δP_c を考えれば、最終的に

$$p(\delta P_c) = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_{\delta P}^2}} \exp\left(-\frac{\delta P_c^2}{\sigma_{\delta P}^2}\right) \quad (40)$$

$$\sigma_{\delta P}^2 = m_{P11c} m_{P22c} - m_{P12c}^2 \quad (41)$$

を得る。ここに、

$$m_{P\mu\nu} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} H_P^*(f) H_P(f, \theta) H_P^*(f, \theta) S(f, \theta) d\theta df \quad (42)$$

である。

3. 室内実験結果との比較

ここでは、前節で導いた理論式を室内実験で得られたデータに対して適用し、その適用結果についての考察を行う。

(1) 実験の概要

実験は、一端に多方向不規則造波装置が取り付けられ

た平面水槽 (長さ 30 m, 幅 21 m, 深さ 1.5 m) を用いて行った。

水槽の周りには波を吸収するための碎石・消波かごを設置し反射波の影響が生じないようにした (図-4)。防波堤模型には直方体のコンクリートブロック (長さ 40 cm, 幅 20 cm, 厚さ 10 cm) と導波板を併用した。実験を行う際、造波板と防波堤模型の間で多重反射が起き、波のエネルギーが蓄積され波高が増大されることが予想されるため、防波堤模型を波造板に対して 10° だけ傾け、反射波を側方へ逃すように工夫した。

防波堤模型の前後に同期ケーブルで接続した容量式波高計、波圧計を取り付け、多方向不規則波を 3 分間入射させたときの水位および圧力変動の時系列データを得た。波高計の設置位置は防波堤端から 15, 25, 40, 50, 75, 100, 125, 150 cm の地点である。また、理論値を計算する際に必要となる入射波の方向スペクトルを推定するため、防波堤延長上に容量式波高計および超音波式流速計を設置した。各計測機器の設置位置を図-5 に示す。

(2) 入射条件および入射波の統計諸量とスペクトル

入射条件を表-2 に示す。実験は水深 30 cm のもとで行い、多方向不規則入射波のスペクトル形状は Bretschneider-光易型を用いた。また、入射波測定位置で得られた水位データを zero-up cross 法により波別解析し、統計

表-2 入射条件と実験結果の統計諸量

	有義波高 $H_{1/3}$	有義波周期 $T_{1/3}$	主波向角 α_p	方向集中度 パラメータ S_{max}
入射条件	3.0 cm	1.8 s	0°	20
実験結果の統計諸量	3.3 cm	1.75 s	1.2°	—

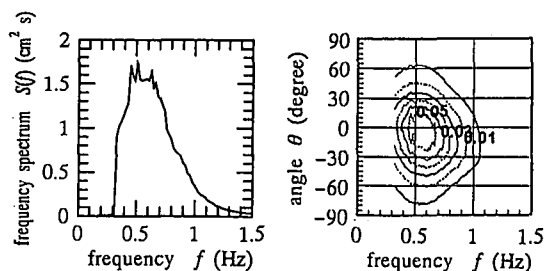


図-6 入射波スペクトルの推定結果

諸量を求めた結果を同時に示す。統計量の算出には、波の入射後 10 秒後以降のデータを用いた。

次に、磯部ら (1984) が提案した EMLM を用いて入射波の方向スペクトルの推定を行った結果を図-6 に示す。推定には、入射後 10 秒を経た後の 1024 個 (すなわち $0.05 \times 1024 = 51.2$ s) のデータを用いた。

(3) 実験データへの適用結果

a) 防波堤沿いの平均波高分布

波高の確率密度は式 (27) で表されるレーリー分布に従うことから、平均波高 $\bar{H}$ は $\sqrt{\pi m_{11c}}$ となる。

図-7 に防波堤沿いの平均波高分布の理論曲線 (実線) と測定値 (丸印) を示す。縦軸は各計測位置で得られた

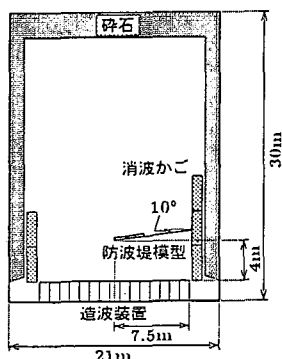


図-4 平面水槽と防波堤模型の設置位置

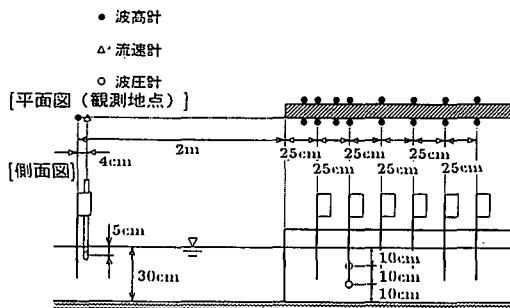


図-5 計測機器の配置図

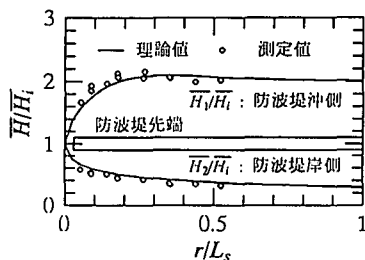


図-7 防波堤沿いの平均波高分布

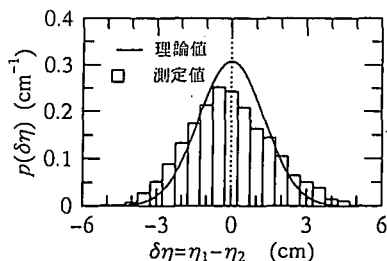
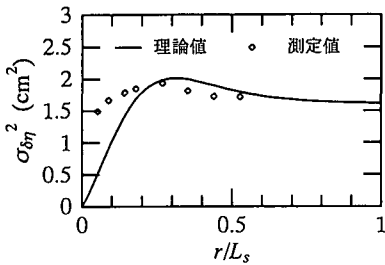
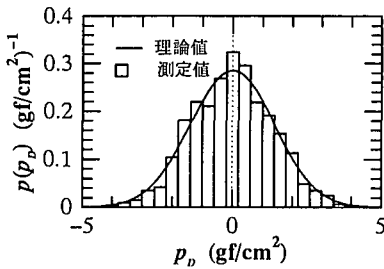


図-8 防波堤前後の水位差 $\delta\eta$ の確率密度

図-9 防波堤前後の水位差の分散 σ_{η} の分布図-10 防波堤周りの動圧 p_0 の確率密度

水位データを波別解析してから平均波高 $\overline{H_1}$, $\overline{H_2}$ を求め、入射波測定位置での平均波高 $\overline{H_i}$ で割り無次元化した波高を、横軸は防波堤端からの距離 r を有義波周期に対応する波長 L_s で割り無次元化した距離をとっている。図より、波高の変動の様子を理論曲線が精度よく予測していることがわかる。

b) 防波堤前後の水位差の確率密度と分散の分布

防波堤端から $r=50$ cm の位置における防波堤前後の水位差 $\delta\eta$ の確率密度は、理論によれば分散 $\sigma_{\eta}^2=1.68$ cm² の正規分布をする。図-8は、理論曲線（実線）と実際に測定された水位差の頻度分布（帯グラフ）とを比較したものである。

また、図-9は防波堤沿いの水位差の分散 σ_{η}^2 の分布を示している。

c) 防波堤周りの動圧の確率密度

防波堤端から $r=50$ cm の深度 $z=-10$ cm における水圧変動 p_0 (gf/cm²) の確率密度は、理論によれば分散 $\sigma_{p_0}^2=1.96$ (gf/cm²)² の正規分布をする。図-10は、理論曲線（実線）と実際に測定された動圧の頻度分布（帯グラフ）とを比較したものである。水位に比べ水圧の方が波の有限振幅性が反映されにくいいため、理論曲線と非常によく一致している。

4. 過去の蛇行災害例への適用

ここでは、昭和40年9月の台風23号の来襲により蛇行災害を生じた神戸港第三埠頭の東端部を例として、実際に滑動を生じたケーソンの滑動量と正味の波力分散の分布を比較する。

表-3 理論値の計算条件

有義波高 $H_{1/3}$	有義波周期 $T_{1/3}$	水深 h	主波向角 α_0	方向集中度 パラメータ S_{max}
4.35 m	7.9 s	13.97 m	0°	75

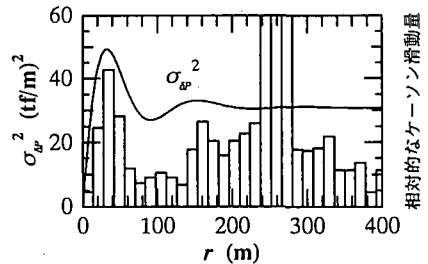


図-11 ケーソン滑動量と波力分散（理論値）の分布

神戸港第三埠頭の水深は11.21 m、台風来襲時の潮位は2.76 mであり、来襲波の有義波高 $H_{1/3}$ は4.35 m、有義波周期 $T_{1/3}$ は7.9 sと推定されている。理論計算のための入力条件を表-3に示す。

図-11は相対的なケーソン滑動量の分布（帯グラフ）と正味の波力分散曲線（実線）を比較したものである。防波堤先端付近で、両者の変動の様子がよく一致しており、蛇行災害の現象をうまく説明できることがわかる。なお、 $r=250$ m付近での滑動は以前の台風によるものと考えられるので、比較の対象外である。

5. おわりに

本研究で得られた結論を簡単に述べると以下のようになる。

1. 防波堤先端付近における水面変動・波高・水位差および防波堤に作用する波圧・波力の統計的性質を、防波堤前後の水面変動の結合確率密度を用いて理論的に導いた
2. 室内実験を行い、理論の妥当性を確かめた。
3. 本手法により、蛇行災害の現象がある程度説明されることがわかった。

参考文献

- 磯部雅彦 (1987): 多方向不規則波浪の波別解析法に関する理論的考察, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 111-115.
- 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司 (1984): 方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 173-177.
- 伊藤喜行・谷本勝利 (1971): 混成防波堤の蛇行災害, 港湾技術研究所報告 No. 112, pp. 1-20.
- 土木学会編 (1994): 海岸波動, 波・構造物・地盤の相互作用的解析法, 土木学会海岸工学委員会, pp. 32-41.
- 本間仁監修/堀川清司編 (1985): 海岸環境工学, 東京大学出版会, pp. 53-57, pp. 506-524.