

モードスプリット有限要素法を用いた 準3次元海浜流シミュレーション

高 木 利 光*・川 原 睦 人**

1. はじめに

近年、漂砂移動など浅海域における物質の移動現象にとって海浜流の3次元構造の重要性が指摘されている(例えば、Svendsen ら, 1989)。波が浅海域に達し砕波する場合、波形のトラフより上方では、砕波により質量が岸側に輸送され、それを補うように底面付近では沖合いへの流れが発達する(図-1)。このような流れは、例えば、浅海域の地形変化を考えた場合、底面付近の流れが漂砂の移動に大きく寄与することから、その予測が必要となる。

一方、海域では計算範囲が広範囲となるため、3次元計算は計算負荷が大きく、現在の計算機能力からしても実用性に欠ける。そこで、平面2次元モデルと鉛直1次元モデルに分離して解く準3次元的なモデルがいくつか提案されている。De Vriend ら(1987)、沼野ら(1989)は surface roller というアイデアを導入し計算している。岡安ら(1993)は砕波による岸向きの質量輸送を評価し、従来のラディエーション・ストレスに付加することで平面場の海浜流を計算し、鉛直1次元モデルには岡安ら(1989)の戻り流れモデルを用いている。Sánchez ら(1992)は鉛直1次元モデルに底面境界層を考慮した渦粘性モデルを用いている。Briand ら(1993)は、鉛直方向に流れの特性から3層に分け、同じく渦粘性モデルを用いて流れの鉛直分布を計算し、平面計算により求めた平均流と重ね合わせている。

当モデルはモードスプリット法により、3次元海浜流場を平面2次元場と鉛直1次元場に分離し、各々の計算を交互に解き重ね合わせることで、3次元的な海浜流場を求めるモデルである。モードスプリット法は、Sheng ら(1978)が湖における吹送流の計算に適用しており、また村上ら(1994)は東京湾の潮流解析に適用している。このモデルは、鉛直方向の流速分布を一様成分とそれからの偏差成分に分離して解くことにより鉛直方向モデルから圧力項を消去でき、よって非定常計算における時間間隔を水平モデルより大きくとることができる点に特徴が

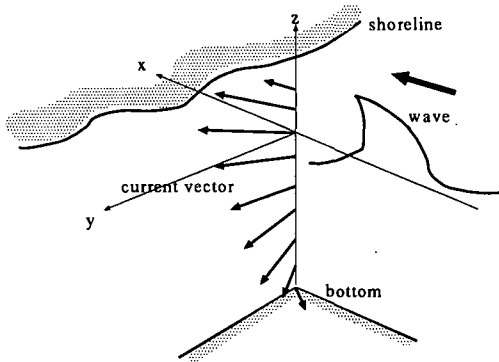


図-1 海浜流の3次元構造

ある。このことにより平面的に広範囲な大規模な計算に対しても、より効率的な計算が可能となる。

モードスプリット法により分離した平面2次元場の海浜流計算には有限要素法を、また鉛直1次元場の計算には、流速分布を級数展開したスペクトル法を用いた。当モデルの検証には、岡安らの水理模型実験結果(Okayasu ら, 1988; 岡安ら, 1992)を用い、モデルの適用性を検討した。

2. 基礎方程式

一般に、浅水域の長波流れは鉛直方向の運動よりも水平方向流速が卓越していることから、静水圧分布を仮定することが可能となる。従って、圧力 p は平均水位変化量 η で表すことができ、運動方程式、連続の方程式は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = -g \eta_{,i} + (N_v u_{i,z})_{,z} + F_i \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\int_{-h}^{\eta} u_i dz \right)_{,i} = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

F_i は水平方向の渦動粘性であり、

$$F_i = (N_h u_{i,j})_{,j} \quad \cdots \cdots (3)$$

と表せる。ここに、 N_h , N_v は水平および鉛直方向の渦動粘性係数であり、座標系は図-2 に示すとおりである。

鉛直方向座標に図-3 に示す σ 座標を導入すると運動

* 正会員 工修 (株)アイ・エヌ・エー 海岸環境部

** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

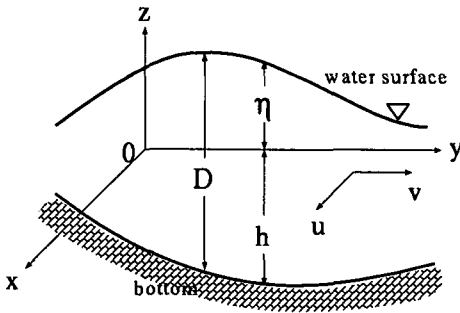


図-2 座標系および変数

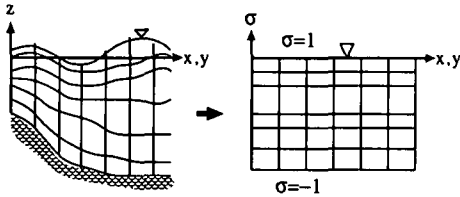


図-3 σ座標変換

方程式は,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + \omega u_{i,\sigma} = -g \eta_{,i} - \frac{4}{D^2} (N_{ij} u_{i,\sigma})_{,\sigma} + F_i \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (Du_i)_{,i} + D\omega_{,\sigma} = 0 \quad (5)$$

となる。ここに、 $D = h + \eta$ であり、

$$\omega(x_i, \sigma, t) = \left\{ u_i \gamma_i - \frac{(1+\sigma)}{D} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{D} w \right\} \quad (6)$$

である。

次に図-4に示すように水平流速を鉛直方向に平均した量とその平均量からの偏差成分との和で表す。ここに、 U_i は水深および波周期間隔で平均した流速成分、 u'_i は平均流からの偏差(ただし、波による軌道流速成分は含まない)、 $\hat{u}_i$ は波の軌道流速成分とする。運動方程式および連続式を鉛直方向に積分すると、次の平均流速に関する方程式を導くことができる。

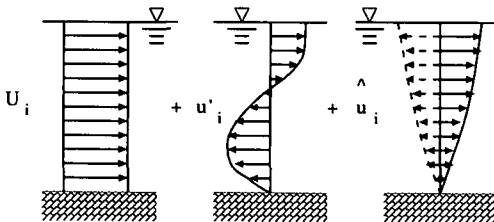


図-4 流速成分

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} = & -g \eta_{,i} - \frac{1}{D} \left(\int_{-h}^{\eta} u'_i u'_j dz \right)_{,j} \\ & + \frac{1}{\rho D} (-S_{ij} + \tau_{si} - \tau_{bi}) + \bar{F}_i \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (DU_i)_{,i} = 0 \quad (9)$$

ここに、 τ_{si} 、 τ_{bi} は海面および底面におけるせん断力、 S_{ij} はラディエーション・ストレスである。微小振幅波理論からラディエーション・ストレスは次のように定義できる。

$$S_{ij} = E \frac{c_g}{c} \frac{k_i k_j}{k} + E \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2} \right) \delta_{ij} \quad (10)$$

ここに、 $E = \rho g H^2 / 8$ は波のエネルギー密度、 H は波高、 c は波速、 c_g は波の群速度、 k は波数ベクトルであり、各波数成分は波向 α により、 $k_1 = k \cos \alpha$ 、 $k_2 = k \sin \alpha$ となる。

3. モードスプリット法

モードスプリット法により3次元場を平面2次元場と鉛直場に分離し、平面2次元モデル(External mode)と鉛直モデル(Internal mode)の計算を交互に解くことにより、3次元的な海浜流場を計算する(図-5)。

このモデルの特徴は、鉛直方向の流速分布を一様成分 U_i と偏差成分 u'_i に分離して解くことにより鉛直方向の渦粘性モデルから圧力項を消去でき、よって非定常計算における時間間隔を大きくとることができる点である。以下にその導出を示す。

まず、鉛直モデルを、3次元場の基礎方程式(4)から先に示した平面場の基礎方程式(8)を差し引くことで、次のように求めることができる。

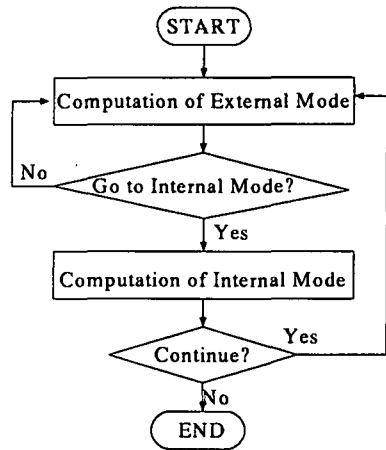


図-5 計算フロー

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} = \frac{4}{D^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N_v \frac{\partial u_i}{\partial \sigma} \right) + C_i \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに,

$$C_i = \frac{1}{D} \left(\int_{-h}^{\eta} u_i' u_j' dz \right)_j + \frac{1}{\rho D} (\tau_{Bi} - \tau_{Si} + S_{ij}) - \bar{F}_i \quad \dots\dots\dots (12)$$

今, u_i' を次のような級数和として考える.

$$u_i(x_i, \sigma, t) = \sum_{r=1}^M A_{ri}(x_i, t) f_r(\sigma) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに, $f_r(\sigma)$ は水深方向のみの関数, $A_{ri}(x_i, t)$ は時間および水平位置のみの関数である. 基礎方程式に任意関数 f_r を掛け水深方向で積分し, さらに粘性項に部分積分を施し, 水面と海底の境界条件を入れると, 次式が導ける.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial u_i'}{\partial t} f_r d\sigma &= \frac{2}{\rho D} \tau_{Si} f_r(+1) - \frac{2}{\rho D} \tau_{Bi} f_r(-1) \\ &- \frac{4}{D^2} u_{Si} N_v \left. \frac{\partial f_r}{\partial \sigma} \right|_{+1} + \frac{4}{D^2} u_{Bi} N_v \left. \frac{\partial f_r}{\partial \sigma} \right|_{-1} \\ &+ \frac{4}{D^2} \int_{-1}^{+1} u_i' \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N_v \frac{\partial f_r}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_{-1}^{+1} C_i f_r d\sigma \quad \dots (14) \end{aligned}$$

ここでは関数 f_r に直交関数を選ぶこととする. その場合, 関数は次の固有値問題を満足する固有関数であることが必要条件となる.

$$\frac{d}{d\sigma} \left[N_v \frac{df_r}{d\sigma} \right] = -\lambda_r f_r \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに境界条件は,

$$f_r|_{+1} = 1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$N_v f_r' + \beta_1 f_r|_{+1} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$N_v f_r' + \beta_2 f_r|_{-1} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

であり, β_1, β_2 は定数である. (13) 式を (14) 式に代入し, さらに境界条件を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ki}}{\partial t} + \frac{4}{D^2} \lambda_k A_{ki} &= \left\{ \frac{\tau_{Si}}{\rho D} (2 - a_k) \right. \\ &+ \frac{\tau_{Bi}}{\rho D} [a_k - 2f_k(-1)] \\ &+ \frac{4}{D^2} [\beta_1 u_{Si} - \beta_2 u_{Bi} f_k(-1)] - \frac{4}{D^2} \lambda_k U_i a_k \\ &\left. + \frac{a_k}{D} \left(\int_{-h}^{\eta} u_i' u_j' dz \right)_j + \frac{a_k}{\rho D} S_{ij} \right\} \phi_k \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となる. ここに, u_{Si}, u_{Bi} は水面および海底面の流速である. また,

$$a_k = \int_{-1}^{+1} f_k d\sigma \quad \phi_k = 1 / \int_{-1}^{+1} f_k^2 d\sigma \quad \dots\dots\dots (20)$$

である. 今, 境界条件を満足するような関数 f_k を次に示す関数とする.

$$f_k(\sigma) = \cos p_k(1 - \sigma) - \frac{\beta_1}{N_v p_k} \sin p_k(1 - \sigma) \quad \dots (21)$$

ここに,

$$p_k = \sqrt{\lambda_k} / N_v \quad \dots\dots\dots (22)$$

であり, p_k は次式を満足するよう求められる.

$$\tan 2p_k \equiv \tan \alpha_k = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\frac{N_v a_k}{2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{N_v a_k / 2}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

4. 数値計算手法

外部モード, すなわち平面2次元モデルの計算には, ガレルキン法に従って定式化した有限要素法を用いた. 空間方向には三角形1次要素を用いると, 次の有限要素方程式が導ける.

$$M_{a\beta} \dot{U}_{\beta i} + K_{a\beta r j} U_{\beta j} U_{r i} + H_{a\beta i} \eta_{\beta} + N_h E_{a i \beta j} U_{\beta j} + F_{a\beta} U_{\beta i} + R_{a i \beta j} S_{ij\beta} = \bar{Q}_{a i} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$M_{a\beta} \dot{\eta}_{\beta} + [B_{a\beta r i} + C_{a\beta i r}] (h_{\beta} + \eta_{\beta}) U_{r i} = 0 \quad \dots\dots (25)$$

ここに, $M_{a\beta}, H_{a\beta r i}, K_{a\beta r j}, F_{a\beta}, E_{a i \beta j}, R_{a i \beta j}, \bar{Q}_{a i}, B_{a\beta r i}, C_{a\beta i r}$ は係数マトリックスである. 時間方向の離散化には, 2段階陽解法 (Kawahara ら, 1982) を用いた.

内部モード, いわゆる鉛直モデルの計算には差分法を用いた. (19) 式の時間微分項を中央差分で近似すると, 次式が導ける.

$$A_{ki}^{n+1} = \frac{1 - 2\Delta t \lambda_k / D^2}{1 + 2\Delta t \lambda_k / D^2} A_{ki}^n + \frac{\Delta t C_{ki}^n \phi_k}{1 + 2\Delta t \lambda_k / D^2} \quad \dots (26)$$

ここに,

$$\begin{aligned} C_{ki}^n &= \frac{\tau_{Si}}{\rho D} (2 - a_k) + \frac{\tau_{Bi}}{\rho D} [a_k - 2f_k(-1)] \\ &+ \frac{4}{D^2} [\beta_1 u_{Si} - \beta_2 u_{Bi} f_k(-1)] - \frac{4}{D^2} \lambda_k U_i a_k \\ &+ \frac{a_k}{D} \left(\int_{-h}^{\eta} u_i' u_j' dz \right)_j + \frac{a_k}{\rho D} S_{ij} \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

である.

5. 数値計算例

モデルの検証として, 岡安らが実施した断面2次元水路実験 (Okayasu ら, 1988) および平面水槽実験 (岡安ら, 1992) と比較した. なお, ラディエーション・ストレスを含めた波の場の計算には, 対象とする地形が一樣勾配であることから, 簡易的方法として, 規則波, 微小振幅波としての浅水, 屈折変形をスネル則により考慮し, 碎波判定および碎波帯内の波高については $H = \gamma h$ ($\gamma = 0.78$) を用いた.

まず, 図-6 に示す水路モデルで検証計算を行った. 鉛直モデルの計算は, 水深方向に20分割し, 40モードを用い, 平面場計算10回毎に実施した. 図-7 に計算条件として与えた波高分布と, 平面場計算により得られた平均水位分布を示した. 図-8 には図-7 中に示す3地点の鉛直方向の岸沖流速分布を実験値と比較して示した. なお,

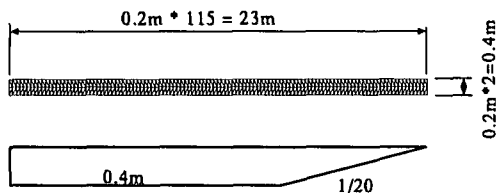


図-6 水路モデルとその要素分割

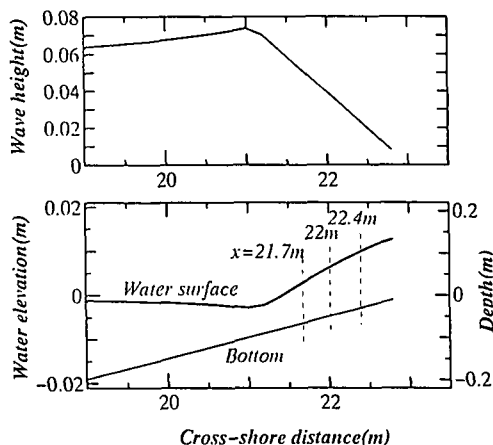


図-7 波高分布および平均水位分布

鉛直動渦粘性係数は水深方向には一定であり、かつ水深の関数であるとした。図中には $N_v=0.001D$, $0.002D$ とした場合の結果を示した。計算結果は平均水面下で水深方向に質量が保存されていることから、流速の中立点が水深のほぼ中央に位置するのに対し、実験結果はそれより上方のトラフレベル付近である。しかしながら、そのような違いは認められるものの、 $N_v=0.002D$ とした場合、実験値との適合性が比較的良好。本モデルは鉛直動渦粘性係数を水深方向に一定と言う単純な設定であるものの、適切な渦粘性を設定するならば、鉛直方向の流速分布をある程度実験と定性的、定量的に一致させることが可能である。

次に、岡安らの平面実験とほぼ同様の条件での検討結果について示す。なお、平面実験で海浜流の3次元流速場を計測した例は少なく、また岡安らの実験も1ケースのみである。平面場は図-9に示す要素分割で計算し、また鉛直場は先の断面2次元水路の計算と同様の条件とした。また、鉛直動渦粘性係数は先の計算で比較的实验値が再現された $N_v=0.002D$ を用いた。図-9中に示す4地点における鉛直方向 x - y 流速分布を図-10に、また平均流、底面流および表層流の流速ベクトルを図-11に示す。底面近傍の流速ベクトルは、岡安らの実験結果と同様、斜め沖合いへ約 20 cm/s 程度の流速が計算されてい

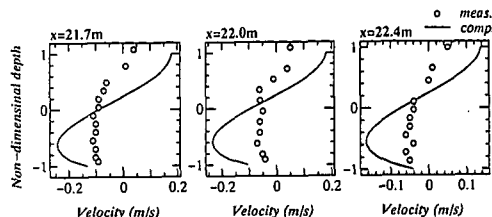
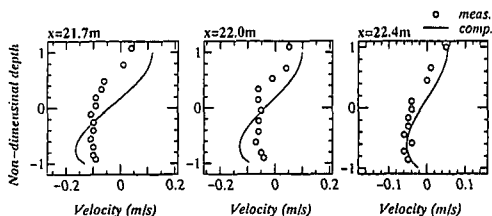
 $N_v=0.001D$  $N_v=0.002D$

図-8 鉛直方向の岸沖流速分布

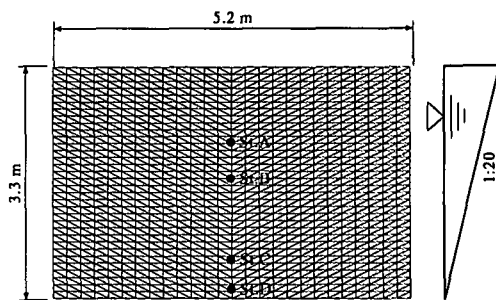
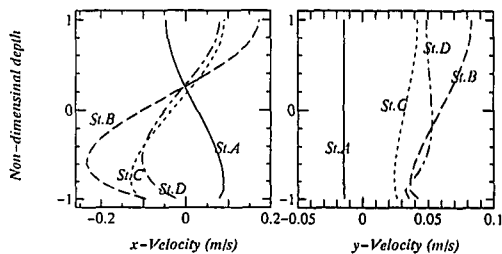


図-9 メッシュ分割

図-10 鉛直方向 x - y 流速分布

る。一方、表層では碎波線を境に岸側では岸向き流れが、また沖側では弱いながら沖向き流れが計算されている。また、碎波帯内の沿岸方向流速の鉛直分布はやや表層が速いものの、岸沖方向の流速分布と比較し、ほぼ水深方向に様な分布となっている。

6. おわりに

モードスプリット法により海浜流3次元場を平面場と鉛直場を分離し、平面場計算に有限要素法を用いたモー

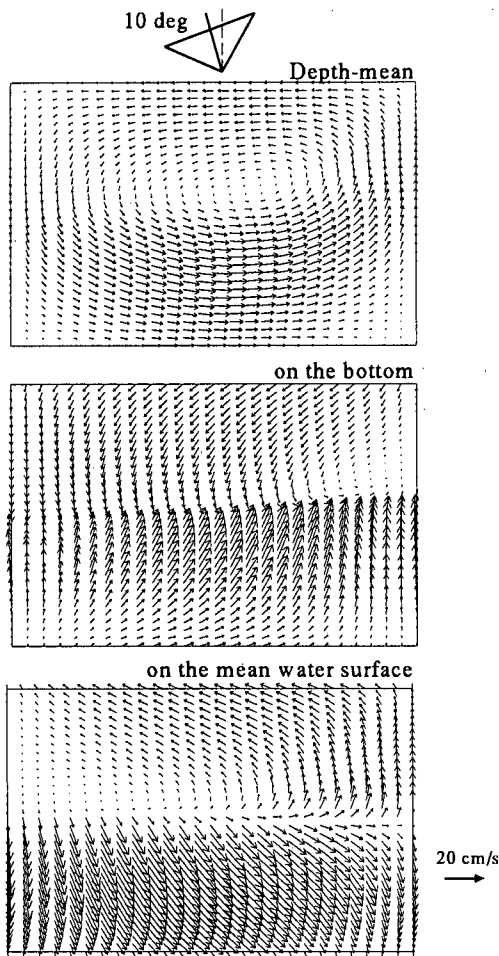


図-11 流速ベクトル

ドスプリット有限要素法を提案した。本計算手法は、鉛直モデルの非定常計算において設定する時間間隔を水平2次元モデルよりも大きく設定可能なこと、例えば平面場計算10回毎に鉛直場計算1回と、間引いて計算が可能なことから、計算効率が良く、大領域の計算に適した手法と言える。また、流速場の3次元性についても、砕波

による質量輸送や砕波による乱れの影響等を考慮していないものの、鉛直渦粘性係数を適切に設定すれば、実験結果とも定性的に良い一致を示していることがわかり、実用的なモデルと考えられる。今後、モデルの精度を向上させるには、鉛直渦粘性係数の鉛直分布の考慮、さらには砕波による質量輸送等を考慮する必要があると考えられる。また、このモデルの計算効率の良さを生かし、地形変化計算に利用することが考えられる。

参考文献

- 岡安章夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1989): 砕波帯におけるエネルギー収支と戻り流れのモデリング, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 31-35.
- 岡安章夫・原幸司・柴山知也 (1992): 斜め入射波による砕波帯内定常流の3次元分布, 海岸工学論文集, 第39巻, pp. 66-70.
- 岡安章夫・瀬尾貴之・柴山知也 (1993): 砕波による運動量を考慮した海浜流の準3次元数値モデル, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 251-255.
- 沼野祐二・佐藤慎司・柴山知也 (1989): 海浜変形数値シミュレーションにおける浮遊砂の移流過程と undertow の効果, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 394-398.
- 村上和男・清水勝義 (1994): σ 座標系における3次元の潮流計算, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 271-275.
- Briand, M. H. G. and J. W. Kamphuis (1993): Waves and currents on natural beaches: a quasi 3-D numerical model, Coastal Eng., Vol. 20, pp. 101-134.
- De Vriend, H. J. and M. J. F. Stive (1987): Quasi-3D modelling of nearshore currents, Coastal Eng., Vol. 11, pp. 565-601.
- Okayasu, A., T. Shibayama and K. Horikawa (1988): Vertical variation of undertow in the surf zone, Proc. of 21th ICCE., pp. 478-491.
- Kawahara, M., H. Hirano, K. Tsubota and K. Inagaki (1982): Selective lumping finite element method for shallow water flow, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2: 89-112.
- Sánchez-Arcilla, A., F. Collado and A. Rodríguez (1992): Vertically varying velocity field in Q-3D nearshore circulation, Proc. 23rd Conf. Coastal Eng., pp. 2811-2824.
- Sheng, Y. P., W. Lick, R. Gedney and F. Molls (1978): Numerical computation of the three-dimensional circulation in Lake Erie: a comparison of a free-surface and a rigid-lid model, J. Phys. Oceano., 8, pp. 713-727.
- Svendsen, I. A. and R. S. Lorenz, (1989): Velocities in combined undertow and longshore currents, Coastal Eng., Vol. 13, pp. 55-79.