

変分法を用いた潮流観測データの同化

川 西 澄\*・藤 野 智 亮\*\*・余越正一郎\*\*\*

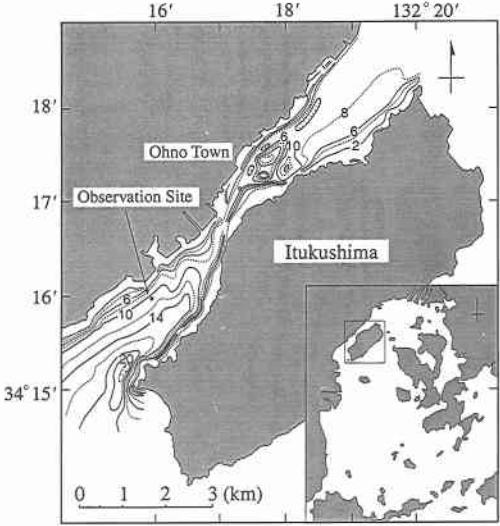
1. はじめに

データ同化手法は、気象学において数値予報の初期値を求める目的で使われてきたが、近年、海洋モデルにおける数値計算の発展の鍵となる方法とも考えられている。海洋観測では自然条件などの制約のために、気象観測のように数多くの精度よいデータが得られないので、観測データの同化を行うことによって流速場の最適値を求めるとともに、モデル方程式に現れるパラメーターの値を逆解析的に推定する方向で研究が行われている。本研究で用いるアジョイント法（Le Dimet ら, 1986；Yu ら, 1991）は、変分法を用いるデータ同化手法であり、モデルの力学を満たし、かつモデルの力学トラジェクトリーを観測と整合性よく求めることができる。また、力学、境界条件とモデルの解に関連があれば、どのような観測でも用いることができるという利点がある。

本研究では、瀬戸内海の中でも特に赤潮などの被害が頻繁に起こり問題となっている広島湾北西部に位置する大野瀬戸において現地観測を行ない、流速プロファイラーの観測データを用いて連続的データ同化を行い、モデルの中にパラメーター化されている鉛直渦動粘性係数の鉛直分布、水面勾配の時間変化の振幅の最適値の推定を試みた。

2. 観 測 概 要

観測の対象として選んだ大野瀬戸は広島湾北西部に位置する厳島（宮島）と対岸の大野町に挟まれた、延長約 9 km、最狭部約 500 m、最深部 20 m の海峡である。観測は 1995 年 8 月 29 日、水道南部にある南西海区研究所の沖合いおよそ 400 m の位置に係留されているかき筏の上で行った（図一）。当日は大潮で広島湾（宇品）の干満の時刻は満潮 11 時 28 分、干潮 17 時 40 分であり、大野瀬戸においてもほぼ同時刻であったと思われる。観測は 9：10～18：00 までおよそ半潮汐間行なっている。観測地点の水深は最大 13.3 m、最低 10.5 m であった。



図一 観測地点

流速分布の測定には米国 SonTek 社製の流速プロファイラー（ADP）を使用した。さらに、乱流量を測定するため、SonTek 社製の超音波ドップラー流速計（ADV）を筏から吊り下げて流速 3 成分を 25 Hz のサンプリング周波数で測定した。なお、水深の測定には圧力変換器を使用した。

3. 解析方法

深さ  $h$  の潮流境界層を考える。 $z$  軸を鉛直上向きにとり、 $z=0$  を底面、 $z=h$  を水面とする。解析において非定常性の取り扱いが難しく、しかも時々刻々と変わる渦動粘性係数を逆解析的に推定することは容易ではない。今回は同化に対する最初の試みであるので、次に示す非線形項を無視した単純な 1 次元モデルを基礎方程式として使用することにした。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $u$  は水平方向の流速、 $N_z$  は鉛直渦動粘性係数である。 $A$  を水面勾配の時間変化の振幅として、水面勾配

\* 正会員 工博 広島大学助教授 工学部第四類  
\*\* 正会員 工修 東洋建設株式会社  
\*\*\* 正会員 工博 広島大学教授 工学部第四類

を次式で与える：

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

初期条件, 境界条件は  $u=0$  at  $t=0$ ,  $\partial u/\partial z=0$  at  $z=h$ ,  $u=0$  at  $z=0$  で, アジョイント法を用いて評価されるべきパラメーターは鉛直渦動粘性係数  $N_z$  および水面勾配の振幅  $A$  である。

評価関数 (cost function) としてモデル変数と観測値の差の2乗の関数形を選ぶ：

$$\begin{aligned} J(u, N_z, A) = & \frac{1}{2} K_m \int_t \int_z (u - u_0)^2 d\zeta dt \\ & + \frac{1}{2} K_n T \int_z (N_z - N_{ze})^2 d\zeta \\ & + \frac{1}{2} K_a TH (A - A_e)^2 \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで  $u_0$  は観測値,  $N_{ze}$  は後に評価される渦動粘性係数の値を表す。係数  $K_m, K_n, K_a$  は定数で, ガウスの決定係数と呼ばれている。パラメーター  $T$  は積分時間を表す。評価関数は2つの項からなり, 最初の項はデータミスフィットと呼ばれるモデルの解と観測値との2乗誤差を表す。拘束条件として (1) 式のモデル方程式を満足し, (3) 式で表される評価関数を最小にするモデル変数  $u, N_z, A$  を求めるのが目的である。

ラグランジュの未定乗数  $\lambda$  を導入し, 増加ラグランジュ関数を

$$\begin{aligned} L(u, N_z, \lambda, A) = & J + \int_t \int_z \lambda \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. - gA \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right\} d\zeta dt \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

と定義すると, 条件付き変分問題は (3) 式を最小にする条件なし変分問題となる。  $\partial L/\partial \lambda = 0$  から (1) 式のモデル方程式が,  $\partial L/\partial u = 0$  より随伴方程式

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( N_z \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) + K_m (u - u_0) \quad \dots\dots\dots (5)$$

が導かれる。随伴方程式を導く過程で, 次のような初期, 境界条件が求まる：

$$\lambda = 0 \text{ at } t = T, \quad \partial \lambda / \partial z = 0 \text{ at } z = 0, h.$$

上述の随伴方程式はもとのモデル方程式と似た構造をしているが, 粘性項がモデル方程式と逆の符号を持っている。そのため, モデル方程式は時間反転して解くことが必要となる。また, 随伴方程式の強制項はモデルと観測値の差になっている。未定乗数  $\lambda$  は観測データに関する情報を初期時間にまで遡って, データミスフィットの情報を伝え, モデルの状態の再構築に影響する。

$\partial L/\partial N_z = 0$  より以下のように  $N_z$  に関する評価関数の

勾配が求まる。

$$\frac{\partial J}{\partial N_z} = - \int_t \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} dt \quad \dots\dots\dots (6)$$

(3) 式と (6) 式より

$$\begin{aligned} N_z &= N_{ze} + \frac{1}{K_n T} \frac{\partial J}{\partial N_z} \\ &= N_{ze} - \frac{1}{K_n T} \int_t \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} dt \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$\partial L/\partial A = 0$  より以下のように  $A$  に関する評価関数の勾配が求まる。

$$\frac{\partial J}{\partial A} = \int_t \int_z \frac{g}{\rho} \lambda \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) d\zeta dt \quad \dots\dots\dots (8)$$

(3) 式と (8) 式より

$$\begin{aligned} A &= A_e + \frac{1}{K_a TH} \frac{\partial J}{\partial A} \\ &= A_e + \frac{1}{K_a TH} \int_t \int_z g \lambda \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) d\zeta dt \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

(7) 式と (9) 式から, 新たな  $N_z, A$  が評価される。

以上に示したデータ同化の手順は次のようである：

1) コントロールパラメーター  $N_z$  の初期推定値を選ぶ。2) モデル方程式 (1) を時間を前方に積分する。3) データミスフィット  $(u - u_0)$  を計算する。4) 随伴方程式 (5) を時間反転して積分する。5) ステップ2) と4) で求められた解  $u$  と  $\lambda$  を使って評価関数の勾配を計算する。6) 新しい  $N_z, A$  の値を求めるためにこの勾配の情報をを用いる。7) 評価関数が最小値になっているか調べる。8) 最適解が求まっていないときはステップ2) に戻る。

## 4. 結果および考察

### (1) 双子実験

現実の観測値を用いた場合, 評価関数の最小値が零になることは一般に期待されない (観測には誤差があり, モデルは理想的なものである, どちらが正しいかわからない)。モデルでシミュレートされた観測値を使う場合には, その観測値とモデルの力学とは厳密に一致するので, 評価関数の最適値が零となりうる。そのため, モデル解はこれらのテストケースでの観測の特性を満たすと期待される。こうした双子実験を行うことにより, 同化手法の実行可能性が明らかになる。つまり, 使用した条件 (同化手法, コントロールパラメーターの初期推定値, 同化期間等) のもとで, 全ての領域で, 全ての変数が改善されているか調べられる。もし改善されなければその原因として, 同化手法自体の不備, 観測量の不足, 同化期間による違い等々明らかになる。こうした情報が, いろいろな力学と誤差を含んだ現実の観測データを用いる場合の判断基準となる。

本論文では、流速の「観測値」として、周期  $T=12.4$  時間の条件で、(1)式で表わされるモデルを時間積分して求められたものを用いた。鉛直渦動粘性係数は図-2に示す  $N_{z0}(z)$  を、また水面勾配の振幅として 0.025 を与えた。同化において、渦動粘性係数および水面勾配の振幅は未知のものとして扱われる。渦動粘性係数の初期推定値としては図-2に示す  $N_z(z)$  を、水面勾配の振幅の初期推定値を  $A=0.030$  として同化を行った。

同化シミュレーションの結果を図-3~5に示す。図-3は鉛直渦動粘性係数の鉛直分布の反復毎の変化である。 $N_z(z)$  の分布は、徐々に補正されて  $N_{z0}(z)$  に近づいていく。 $N_z(z)$  が収束値である。比較的渦動粘性係数の値の大きい中層に比べて、底面および水面付近の収束は早い傾向が見られたが、 $N_z(z)$  は「真の値」に接近した時点でその値を大きく変えることなく「真の値」付近での分布を保っている。

図-4は評価関数の極小値を求める最適化の過程において、評価関数の勾配の収束の度合いを調べ、その値を反復回数に対してプロットしたものである。 $J_0$  は最初の反復のときの勾配の値、 $J$  は各反復における勾配の値であ

る。勾配は最初の 100 反復程で急激に減少している様子がわかる。水面勾配の振幅の収束の結果を図-5に示す。 $A$  は最初に急激な変化を見せ、その後は緩やかに収束する。0.025 で完全に収束し、同化の過程において水面勾配の振幅の評価も十分に可能である。

以上の実験により、潮流観測データを用いてのアジョイント法によるデータ同化の実行可能性が得られ、同化の過程において鉛直渦動粘性係数および水面勾配の振幅の最適値の推定ができることが示された。

なお、本論文ではパラメータを更新するのに(7)、(9)式を使ったが、反復の途中では  $\partial L / \partial N_z \neq 0$ 、 $\partial L / \partial A \neq 0$  であり、これらの勾配を共役勾配法に使えば、ずっと少ない反復回数で収束するようである (Schröter, 1989)。

## (2) 観測値を用いたデータ同化解析

流速プロファイラーから得られた流速データを使って、同化を行った。鉛直渦動粘性係数  $N_z$  の初期推定値は図-6に示す直線のように  $N_z = 3.0 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  と高さにかかわらず一定とした。また、 $A$  の初期推定値は 0.0035 を用いた。評価関数の勾配の変化を図-7に示す。1000 回の反復の後、評価関数の値は初期の値の 54% にまで減少している。また、最初の反復で勾配は急激に減少している。

同化後の渦動粘性係数の分布を図-6に示す。1000 回

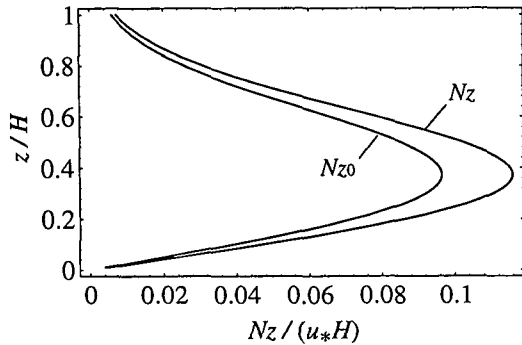


図-2 観測値を作成する際に使用した鉛直渦動粘性係数  $N_{z0}$  と初期推定値  $N_z$

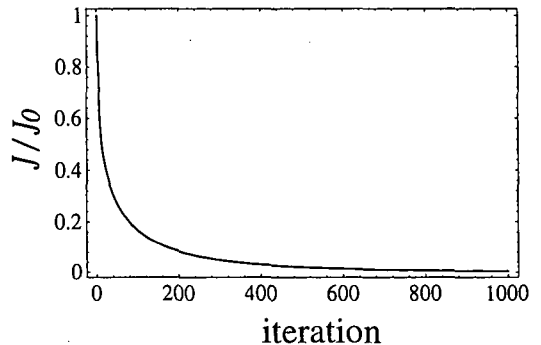


図-4 評価関数の勾配の変化

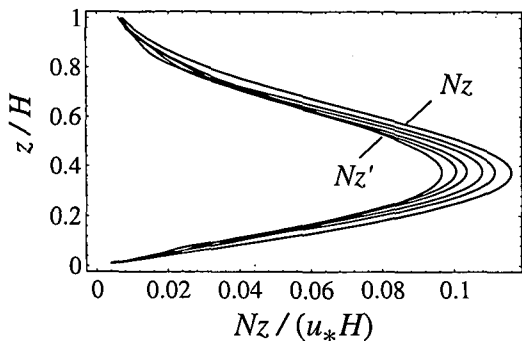


図-3 鉛直渦動粘性係数の反復毎の変化

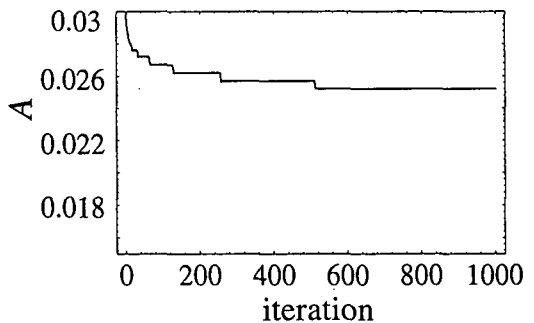


図-5 水面勾配の時間変化の振幅の変化

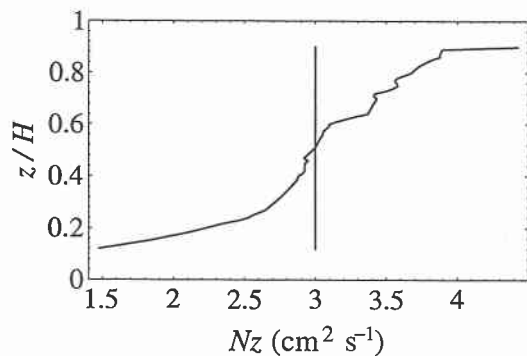


図-6 鉛直渦動粘性係数の初期推定値と同化後の分布

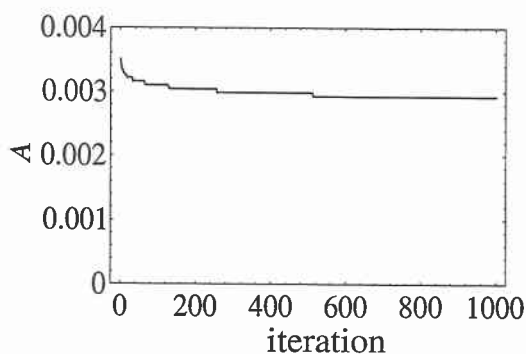


図-9 水面勾配の振幅の変化

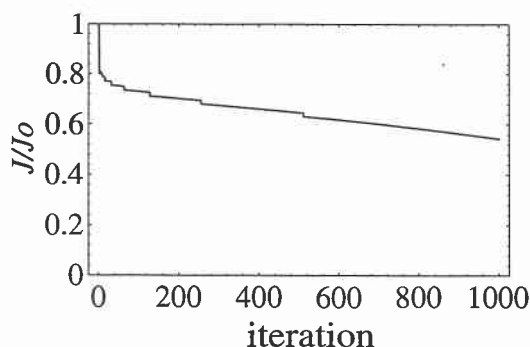


図-7 評価関数の勾配の変化

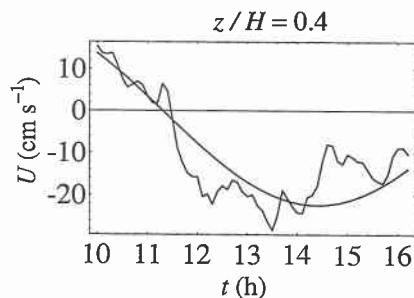


図-10 流速の経時変化の比較

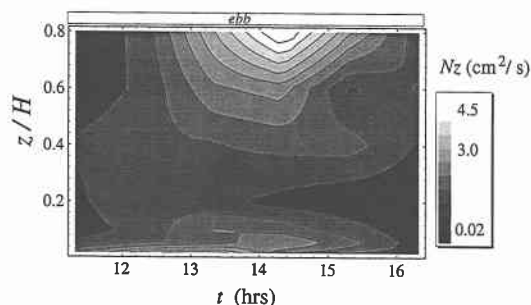


図-8 鉛直渦動粘性係数の観測値

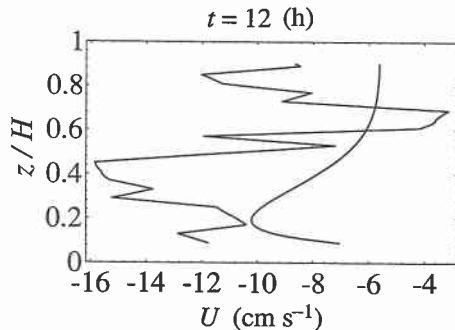


図-11 流速の鉛直分布の比較

の反復後、上層で  $4.4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  の最大値をもち、海底に向かって減少する分布が得られている。図-8はADVによる乱流データからスペクトルピーク法(川西ら, 1995)を用いて求められた  $N_z$  の時空間分布である。 $N_z$  は14時30分付近で最大となっており、上層においておよそ  $5.0 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  を示している。この値は同化の結果と大差ない。また、底面に近づくにしたがって渦動粘性係数の値は小さくなるという傾向も同化の結果と一致している。このことから、単純なモデルを用いた同化シミュレーションでも、鉛直渦動粘性係数は推定できうと考えられる。

図-9は水面勾配の振幅の収束状況を反復毎にプロットしたものである。100回の反復でほぼ収束し、その後は約0.003の値を保つ。収束値は0.00298である。

同化後の結果(流速値の時系列と鉛直分布)と観測値との比較を図-10, 11に示す。滑らかな線が同化後の分布である。ADPの流速値は2分間の平均なので、かなりのばらつきがある。同化後の結果と観測値との一致はよくない(特に図-11の鉛直分布)。これは、潮汐波の変形、密度分布、流れの非線型性などが考慮されていないためであると考えられる。アジョイント法は、未知のパラメータを推定すると同時に、不規則な観測値からモデルに

適合する（モデルが説明できる）部分を抽出すると考えられる。したがって、図-10, 11の結果から、予想されたことではあるが、(1)式の一次元線型方程式と(2)式の水面勾配では大野瀬戸の流れ場をシミュレート出来ないことがわかる。

## 5. おわりに

双子実験を行いアジョイント法の感潮域への実行可能性を検証した。また、大野瀬戸において流速プロファイラーの観測データを用いて同化を行ない、流動の基本量である鉛直渦動粘性係数などが推定できることが示された。本研究で使用した単純なモデル方程式では、実際の流れ場を再現するには無理がある。今後、密度分布や非線型性などを考慮した解析が必要である。また、非定常流であるから鉛直渦動粘性係数も時々刻々変化しており、非定常性を考慮した解析を行なう必要がある。

流速プロファイラーの登場によって比較的簡単に流速

分布を測定できるようになったことから、流速分布の観測値とアジョイント法の組み合わせは、渦粘性係数などのパラメーターの推定や数値モデルの改良などに有効な手法になると考えられる。

## 参考文献

- 川西 澄・前木 郷・余越正一郎 (1995): 河口内における往復流の鉛直構造, 海岸工学論文集, 42 巻, 1 号, pp. 411-415.
- Le Dimet, F. and Talagrand, O. (1986): Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects, *Tellus*, Vol. 38A, pp. 97-110.
- Schröter, J. (1989): Driving of non-linear time-dependent ocean models by observation of transient tracers-a problem of constrained optimisation, *Oceanic Circulation Models: Combining Data and Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, pp. 257-285.
- Yu, L. and O'Brien, J. J. (1991): Variational Estimation of the Wind Stress Drag Coefficient and the Oceanic Eddy Viscosity Profile, *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. 21, pp. 709-719.