

カルマンフィルター有限要素法による浅水域の流況推定

高木利光*・稲本耕介**・早川 豊***・川原睦人****

1. はじめに

海岸の浅水域の流れは複雑であり、またそれゆえにその流れを予測する数値モデルは数多く提案されている。特に、長波を対象とした場合、水深方向にはほぼ一様な流速分布が仮定され、さらに圧力分布が静水圧分布であると仮定できることから、水深方向に流速を平均化したいわゆる浅水長波方程式が導け、それを基礎方程式として種々のモデルが提案されている。そのようなモデルを現地へ適用する場合、差分法や有限要素法などにより対象水域を離散化して解く方法が一般的である。しかしながら、基礎方程式においても先に述べたような仮定から導かれたものであり、数値解法においても地形や境界条件をある精度で近似することから、計算結果は実際の現象と多少異なってくることは避けられない。

一方、対象水域において流速や水位変動などが観測されている場合も多い。しかし、観測は通常数点での定点観測となることから、観測結果のみから広範囲の流況を把握することは困難となる。また、観測には観測誤差が多少なりとも含まれる場合があり、場合によってはそれら誤差を取り除く必要がある。一般に流況を推定する場合、観測点での計算値と観測値を比較し、適切な境界条件や海底摩擦係数などのパラメータを設定し、流況を再現することが試みられる。しかし、どの程度観測値と計算値が一致すれば現象が再現されたかは、数学的に根拠が乏しく、技術者の判断に委ねられている。さらに、このような検証計算は経験ある技術者にしても多大な労力を必要とする。このような流況の推定方法は、順解析的な方法に基づいており、試行錯誤的な手段である。ここで提案するモデルは、最適推定手法の一つであるカルマン・フィルターを用いて、誤差を含む観測データからの情報を有効に抽出するとともに、観測点のみならず対象とする流れ場全域を確率場として推定する手法を提案するものである。

カルマン・フィルターは Kalman (1960) が提案した線

型確率システムの状態推定手法である。カルマン・フィルターを水理現象に適用した例としては、Hino(1973)が水文流出予測に、また、Mizumura (1982)は感潮湖における水位変動の予測に適用している。これらは、あるパラメータを用いて状態量を表現したものを観測方程式とし、パラメータの定常条件式をシステム方程式に当てはめ、状態量の推定をパラメータの同定問題に置き換えて解析している。いわゆる拡張カルマン・フィルターによるパラメータ同定問題として取り扱っている。一方、状態方程式に物理モデルを直接用いている例として、Chaoら(1978)は状態方程式に1次元の不等流式を用いて、マンギングの粗度係数を同定しながら河川水位を推定している。Budgellら(1980)、Heeminkら(1988)は浅水長波方程式を状態方程式とし、高潮時の海域の水位を推定している。

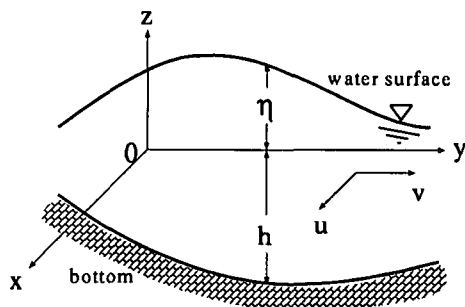
本研究は状態方程式に浅水長波方程式を用い、浅水長波方程式の離散化に有限要素法を適用したカルマン・フィルター有限要素法を提案し、その適用性について実際の観測データを用いて検討する。

2. 状態方程式

ここで対象とする流れは浅海長波流れであることから、以下に示す移流項等を見捨て簡単化した平面2次元場の浅水長波方程式を状態方程式とする。

$$\dot{u}_i + g\eta_i = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\dot{\eta} + (hu)_i = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$



図一 座標および変数の説明

* 正会員 工修 (株)アイ・エヌ・エー 海岸環境部
 ** 正会員 工修 JR東日本
 *** 学生会員 中央大学 大学院土木工学科
 **** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

ここに、座標系は図-1に示す通りであり、 u_i は流速、 η は平均水位からの水位変動量、 g は重力加速度、 h は水深を表す。添字の $i=1, 2$ は x, y 方向を各々示す。

3. 有限要素方程式

状態方程式を離散化するに当り、有限要素法を適用する。流速および水位変動量に対してその空間近似には、三角形一次内挿補間関数を用いたガラキン法を適用する。時間積分に一段階の陽的解法を用いる事により、以下の時間方向に離散化された有限要素方程式が得られる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{k+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta i}^k - \Delta t g H_{\alpha\beta i} \eta_{\beta}^k \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{k+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^k - \Delta t \bar{h} H_{\alpha\beta i} u_{\beta i}^k \quad \cdots \cdots (4)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_V \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} dV, \quad H_{\alpha\beta i} = \int_V \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta i} dV$$

Φ_{α} は内挿補間関数、 Δt は微小時間間隔、 $\bar{h}$ は要素内平均水深、 k は時間方向ステップを表す。 $\bar{M}_{\alpha\beta}$ は $M_{\alpha\beta}$ の各要素を対角項に集中させた行列、 $\bar{M}_{\alpha\beta}$ は解の安定化のために導入したランピングパラメータを用いて変形した行列である (Kawahara ら, 1982)。

4. カルマン・フィルター

一般に状態ベクトル x_k および観測ベクトル y_k に対するカルマン・フィルターの状態方程式と観測方程式は以下のように表される。

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k w_k \quad \cdots \cdots (5)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad \cdots \cdots (6)$$

ここに、 F_k は状態遷移行列、 H_k は観測行列、 G_k は駆動行列である。 w, v はそれぞれの方程式の不確実性を考慮して付加されるシステムノイズベクトルおよび測定時に含まれる観測ノイズベクトルである。これらのノイズは以下の統計量を有する白色雑音とし、 w, v は互いに独立であると仮定する。

$$E\{w_k\} = 0, \quad \text{cov}\{w_k, w_j\} = Q_k \delta_{kj} \quad \cdots \cdots (7)$$

$$E\{v_k\} = 0, \quad \text{cov}\{v_k, v_j\} = R_k \delta_{kj} \quad \cdots \cdots (8)$$

ここに、 Q_k, R_k は正定値対称行列である。なお、 $E\{\cdot\}$ は期待値、 $\text{cov}\{\cdot\}$ は共分散、 δ はクロネッカーのデルタを示す。

このダイナミック・システムを浅海長波方程式に適用する。三角形要素で空間的に離散化された要素の全節点での流速成分 u, v および水位変動量 η を状態量 $x = \{u \ v \ \eta\}^T$ とし、これらの状態量の時間変化を表す状態方程式に前述の離散化された有限要素方程式をあてはめる。すると状態遷移行列は、

$$F = \begin{bmatrix} \bar{M}_{\alpha\beta} & & \\ & \bar{M}_{\alpha\beta} & \\ & & \bar{M}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{M}_{\alpha\beta} & -\Delta t g H_{\alpha\beta}^x \\ & \bar{M}_{\alpha\beta} & -\Delta t g H_{\alpha\beta}^y \\ -\Delta t \bar{h} H_{\alpha\beta}^x & -\Delta t \bar{h} H_{\alpha\beta}^y & \bar{M}_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad \cdots (9)$$

となる。一方、 y_k は観測量ベクトルであり、状態量の一部が直接観測されるとすると、観測行列 H_k は観測節点の配置に対応する行列要素の対角項成分が1、それ以外で0となる行列となる。

推定計算に際しては、以下のカルマン・フィルターのアルゴリズムにしたがって計算する (例えば Frank, 1986)。状態量推定値 $\hat{x}_{k|k}$ 、推定誤差共分散 $P_{k|k}$ は時間更新、観測更新としてまとめられ、各々ある初期値から逐次計算により計算を進め、推定誤差分散値およびカルマン・ゲイン値の収束値を求める。

初期値：

$$x_{0|-1} = \bar{x}_0 \quad \cdots \cdots (10)$$

$$P_{0|-1} = V_0, \quad \cdots \cdots (11)$$

観測更新：

$$K_k = P_{k|k-1}^* H^T (H P_{k|k-1}^* H^T + R)^{-1} \quad \cdots \cdots (12)$$

$$\hat{x}_{k|k} = x_{k|k-1}^* + K_k (y_k - H x_{k|k-1}^*) \quad \cdots \cdots (13)$$

$$P_{k|k-1} = (I - K_k H) P_{k|k-1}^* \quad \cdots \cdots (14)$$

時間更新：

$$x_{k+1|k}^* = F \hat{x}_{k|k} \quad \cdots \cdots (15)$$

$$P_{k+1|k}^* = F P_{k|k} F^T + G Q G^T \quad \cdots \cdots (16)$$

ここで、状態遷移行列および観測行列は観測値に依存せず時間的に変化しない定常な行列であることから、状態量を推定する前にあらかじめ推定誤差分散行列とカルマン・ゲインの収束値を求めることが可能である。したがって、状態量はカルマン・ゲインの収束値と逐次得られる観測値を用いて (13)、(15) 式により別途計算可能となる。

5. 計 算 例

(1) 長方形水路における長波伝播推定

提案したモデルの適用性の検討のため、まず図-2に示す水深10mの一樣長方形水路における長波の伝播の推定を試みる。まず順解析により、水路左端境界より、周期20s、振幅0.1mの周期波を入射させ、得られた流

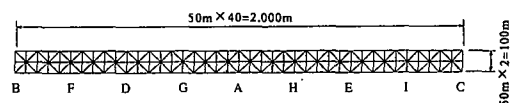


図-2 観測点と有限要素分割図

速および水位の時系列データに正規乱数により発生させたノイズを付加して疑似観測データを作成する。図-3に共分散値 10^{-2} , 10^{-3} および 10^{-4} をもつノイズを各々付加して作成した、水路中央における水位の観測データ例を示す。このように作成した疑似観測データを用いて、以下に種々の検討を実施する。

まず、システムノイズが計算結果にどのような影響を及ぼすかを、共分散値 10^{-3} をもつ観測値を用い、システムノイズの共分散値を変化させて検討する。なお、観測方程式中の観測ノイズの共分散値は用いる観測値の共分散値と同様とし、観測点は図-2中のA-Eの5点とする。図-4に推定誤差共分散の収束状況を、図-5にこのようにして得られたカルマン・ゲインを使って推定したSt. A地点の水位の時系列を、順解析結果と比較して示す。この結果から共分散値 10^{-4} の場合、推定値から観測

ノイズがある程度消去され、かつ順解析結果と良い一致を示していることがわかる。また、カルマン・フィルターのアルゴリズムの中で設定している観測分散値と異なる分散値を持つ観測データを用いた推定結果を図-6に示す。この結果から、設定された分散値よりも小さい分散値を持つ場合は、ノイズが消去されているが、大きい場合はかなりノイズが残った結果となっている。

次に観測点の配置による影響を、観測点をSt. Aの1点、St. A-Cの3点、St. A-Eの5点およびSt. A-Iの9点とした場合について、同様に共分散値の収束状況およびSt. I地点の水位の推定値について調べてみる(図-7)。この結果からこの解析領域においては5点程度の観測点で良好な推定結果が得られることがわかる。

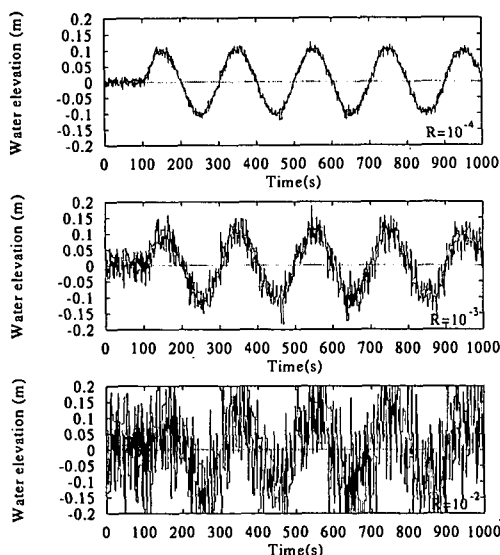


図-3 疑似観測データ例

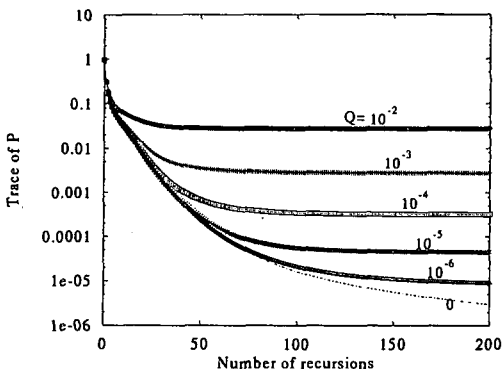


図-4 推定誤差分散の収束状況

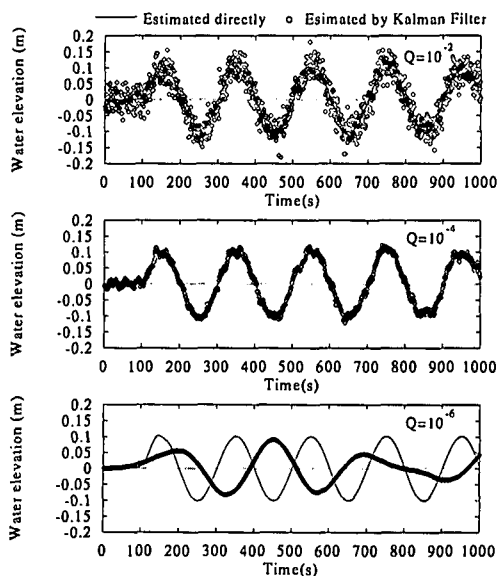


図-5 推定値と順解析結果との水位比較

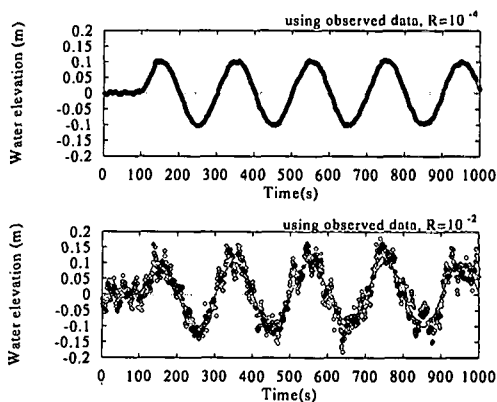


図-6 異なる分散値を持つ観測データを用いた場合の水位の推定値と観測値との比較

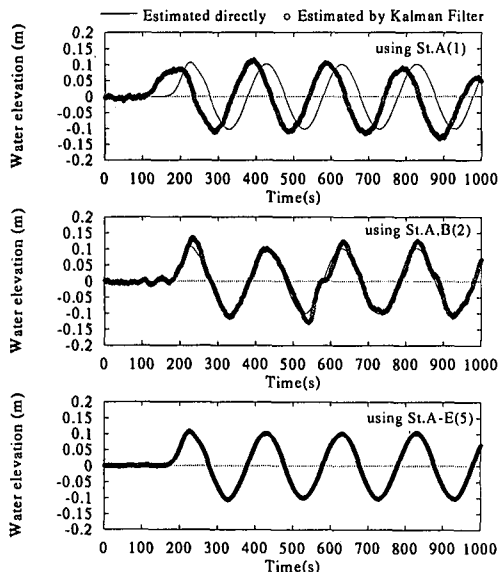


図-7 観測点配置の違いによる水位の推定結果

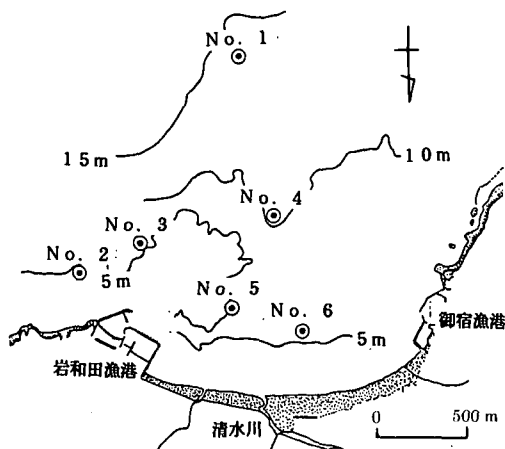


図-8 対象海岸の地形および計器設置位置

(2) 実地形における流況推定

本手法の現地への適用性を検討するため、千葉県御宿海岸(図-8)における流況場の推定を実際に観測されたデータを用いて行う。観測は図中のNo.1~No.6の6地点に設置した水圧センサー付電磁流速計により26日間実施されている。データは海底面上約1m地点の平面2成分流速と水圧であり、毎正時10分間、サンプリング間隔0.5秒で取得されている。このデータを利用するに当たり、1995年5月19日から4日間の水位変動量と流速データについて、1時間毎の10分間の平均値を作成し観測データとする。解析は、図-9に示す沿岸方向約2.3kmの水域を、節点数159、要素数268で離散化された領域で行う。

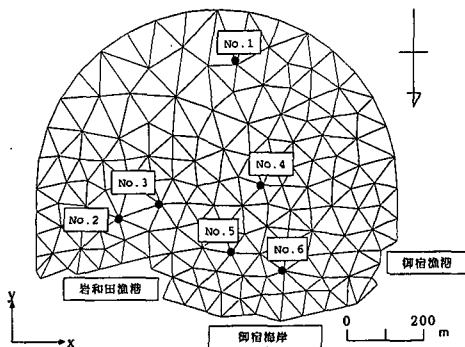


図-9 解析領域および有限要素分割図

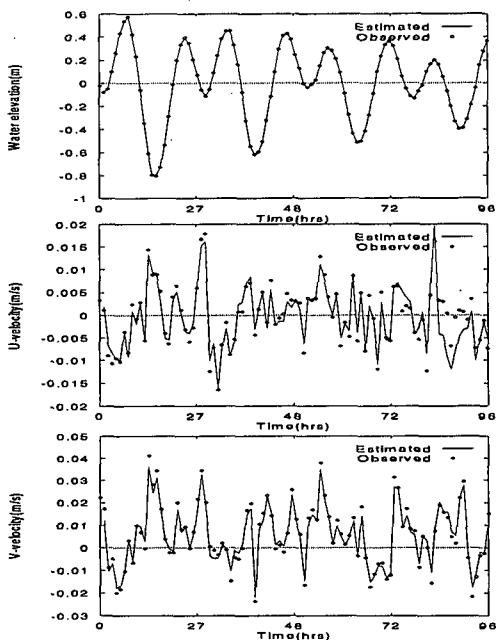


図-10 No.5での水位・流速の推定値と観測値

計算の観測点にはNo.1~No.6の6点用い、推定値出力は各観測点と同じとする。初期状態量 $\bar{x}=0$ 、初期共分散 $P_0=I$ とし、観測ノイズの共分散は $R=10^{-3}I$ 、システムノイズの共分散は $Q=10^{-1}I$ と設定して計算を行う。なお、 I は単位行列である。

推定結果の例として、No.5での流速および水位変動量の時系列結果を観測値とともに図-10に示す。観測点での推定値は6地点とも観測値に追従しており、特に水位の推定結果は良好である。推定された流速の時系列データを平均した平均流ベクトル図を図-11に示す。図中の太字のベクトルは観測値を平均したものである。沖側では観測点No.1,2での大きな岸向きの流速を反映し、岸側ではNo.4,5の強い沖向きの流速を反映した流速分布となっている。領域全体の流況は観測値をよく反

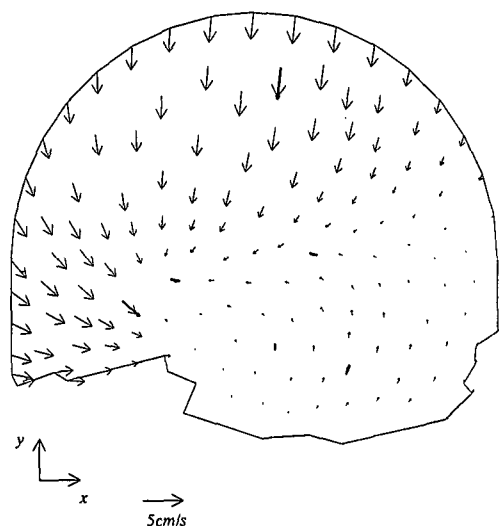


図-11 平均流ベクトル図

映した推定結果であると言える。

6. おわりに

本研究ではカルマン・フィルターを用いた浅水域の流況の推定手法を提案した。本手法は、状態方程式に有限要素法により離散化された物理モデルを用いており、この状態方程式に不確定さを表すシスィムノイズを考慮した点、さらに、観測点のみならずその周辺を含めた平面的な流況を推定できる点に特徴を有する。長方形水路における検討では、ある程度の観測ノイズが消去可能であり、また観測ノイズの分散値がカルマン・フィルターで設定する分散値と多少異なっても、その値が小さければフィルタリングの効果は十分発揮されることがわかった。また、ここで用いた簡単化した浅水長波方程式と有

限要素法により離散化した手法を用いる場合においては、システムノイズの共分散値を $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 程度に設定すればフィルタリングの効果があることがわかった。さらに、実際の観測データを用いた場合、観測結果を反映した、推定誤差共分散が最小となるような平面流況が推定された。今後、流況推定における適切な観測点配置などにも本手法の有効性が発揮されるものと考えられる。

最後に本研究に用いた観測データは、中央大学理工学研究所が千葉県御宿町からの委託研究として実施した観測データの一部であることを付記するとともに、調査でご協力頂いた御宿町役場および岩和田、御宿漁協の関係者に対し、深く感謝致します。

参考文献

- Chao-Lin Chiu and E. O. Isu (1978): Kalman filter in open channel flow estimation, J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 104, pp. 1137-1152.
- Budgell, W. P. and T. E. Unny (1980): A stochastic-deterministic model for predicting tides in branched estuaries, Third Int. Symp. on Stochastic Hydraulics, pp. 485-496.
- Frank, L. L. (1986): Optimal Estimation, A Wiley-Interscience Publication, JOHN WILEY & SONS, New York.
- Kalman, R. E. (1960): A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 82, pp. 35-45.
- Mizumura, K (1982): Prediction of water level in tidal inlet, Jour. of WW Div., ASCE, Vol. 108, No. WW1, pp. 97-107.
- Heemink, A. W. (1988): Two-dimensional shallow water flow identification, Appl. Math. Modelling, Vol. 12, pp. 109-118.
- Hino, M. (1973): On-line prediction of hydraulic system, Proc. 15th Conf. of IAHR, Istanbul, pp. 121-129.
- Kawahara, M., H. Hirano, K. Tsubota and K. Inagaki (1982): Selective lumping finite element method for shallow water flow, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 2, pp. 89-112.