

津波応答の過渡特性の解析

高 橋 将*

1. 津波入力に対する線形応答共振系の「Q-値」と γ

線形応答共振系に津波が入射して、異なる周波数を持つ多くの応答振動が励起される場合を考える。この場合共振系に励起される応答振動は、津波中の異なる周波数成分波の存在には無関係として取り扱えるから、各成分波の応答振動 $y(t)$ を海底摩擦と応答共振域外へのエネルギー漏出による減衰を伴う単振動と見なして、振動方程式を

$$a_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 y = b f(t) \quad (1)$$

とできる。ここに左辺の各項はそれぞれ慣性力、抵抗力および復元力、また右辺の $f(t)$ は入射津波中の同一周波数成分の振幅である。

$y(t)$ と $f(t)$ をラプラス変換し、これを $\mathcal{Y}(s)$ 、 $\mathcal{F}(s)$ と表せば

$$\mathcal{F}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

$$\mathcal{Y}(s) = \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt \quad (3)$$

初期値が0ならば、式(1)をラプラス変換し、整理して

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{H}(s) \mathcal{F}(s) \quad (4)$$

とできる。ここに、 $\mathcal{H}(s)$ は伝達関数

$$\mathcal{H}(s) = \frac{b}{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

である。式(4)の逆ラプラス変換により

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

が得られる。ここに、

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\beta}^{\sigma+i\beta} \mathcal{H}(s) e^{st} ds \quad (5)$$

$$\mathcal{H}(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt \quad (6)$$

である。したがって、伝達関数 $\mathcal{H}(s)$ の逆ラプラス変換 $h(t)$ は応答関数である。 $t < 0$ で応答関数は $h(t) = 0$ でなければならないから、式(6)の右辺の積分の下限を $-\infty$

と置き換えてできる。

$$\mathcal{H}(s) = \int_{-\infty}^\infty h(t) e^{-st} dt \quad (7)$$

ここで $s \rightarrow i\omega$ とおけば、式(7)は $h(t)$ のフーリエ変換となり、 $\mathcal{H}(i\omega)$ は周波数応答関数となる。

$$H(\omega) = \mathcal{H}(i\omega)$$

故に、式(1)で記述される系の周波数応答関数 $H(\omega)$ は

$$H(\omega) = \frac{b}{a_1(i\omega)^2 + a_2(i\omega) + a_3} \quad (8)$$

なる複素関数で表される。

よって $H(\omega)$ の絶対値、すなわち系のゲイン $|H(\omega)|$ は

$$\sqrt{(\operatorname{Re} H)^2 + (\operatorname{Im} H)^2} = \frac{b}{\sqrt{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + a_2^2 \omega^2}} \quad (9)$$

となる。また $H(\omega)$ の偏角、すなわち系の位相 $\phi(\omega)$ は

$$\tan^{-1} \frac{\operatorname{Im} H}{\operatorname{Re} H} = -\frac{a_2}{a_3 - a_1 \omega^2} \quad (10)$$

である。

$|H(\omega)|$ は、入力振動エネルギーに対する応答系の振動エネルギーの比を表し、その意味でゲイン(利得)と呼ばれる。

式(1)の各係数間について海水の単位質量 $m = a_1$ 、対数減衰率 $\gamma = a_2/2a_1$ および減衰が無い場合の自由共振振動数の二乗 $\omega_0^2 = a_3/a_1$ なる関係が定められる。

共振系の振動は、 $f(t)$ によって励起され発達するが、入力が0となった後($t < T_1$)は、系の持つ振動エネルギーは指数関数的に減衰する。この発達と減衰は、二つのパラメーター ω_0 と対数減衰率 γ によって特徴付けられる。

そこで ω_0 と γ の比である無次元量 $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\sqrt{2a_1 a_3}}{a_2}$ いわゆる共振の鋭さを表す「Q-値」を導入する。

Q-値は、強制振動が継続して応答系に作用し、系の過渡振動が一定の振幅(飽和値)まで成長した時点での入出力エネルギー比、すなわち系のエネルギー増幅度を与えるものである。したがって、Q-値は共振系に固有の一定値をとる。

共振周波数上において、ゲイン $|H(\omega)|$ はエネルギー共

振曲線のピーク値そのものであるが、 Q -値はエネルギースペクトル曲線におけるピーク値の $1/2$ の値を持つ点での曲線幅、すなわち半値幅 $\Delta\omega$ により

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\gamma} \dots\dots\dots (11)$$

と定義される。

ゲイン $|H(\omega)|$ は式 (9) の分子に強制力中の係数 b を含むので、共振系固有の値ではなく一般に入力依存の関数である。

振幅利得 $|H(\omega)|^{1/2}$ と振幅増幅度 $Q(\omega)$ の比をとると、式 (9) と式 (11) から、共振周波数 ω_0 において

$$\frac{|H|^{1/2}}{Q} = \pm \frac{b}{\omega_0^2} \dots\dots\dots (12)$$

と表される。

強制力 $f(t)$ は成分波波高の関数なので、 b は $\frac{\text{加速度}}{\text{変位}}$ でなければならない。いま入力成分波の振幅を $A(t)$ とし、簡単に

$$f(t) = A(t) \sin \omega_0 t \dots\dots\dots (13)$$

と表すことにすれば、式 (12) において正の値をとることにし、

$$\begin{aligned} \frac{|H|^{1/2}}{Q} &= \frac{b}{\omega_0^2} = \frac{\ddot{f}}{\omega_0^2 f} \\ &= 1 + \frac{2\dot{A}}{\omega_0 A} - \frac{\ddot{A}}{\omega_0^2 A} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる。振幅 $A(t)$ が一定ならば、 $\dot{A} = \ddot{A} = 0$ となるからゲインは Q -値に等しくなる。例えば、造波水槽で港湾模型に一定振幅の単一波を繰り返し入射させ、波高を測定して得られる波高増幅係数は、 Q -値そのものである。

津波波動は短期間にもみ存在する非定常不規則過程であり、また $f(t)$ の振幅が一定ではあり得ない。

そこで、過渡的不規則過程データのエネルギースペクトル推定に、定常不規則過程から得られるデータのスペクトル推定法 (Bendat and Piersol, 1971) を適用する。

即ち、 $(0 \leq t \leq T_1)$ の範囲でだけ 0 でない値をとる過渡過程、 $\{f(t)\}$ からの計測記録 $f(t)$ のフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{T_1} f(t) e^{-i\omega t} dt \dots\dots (15)$$

において、津波の場合のような過渡過程では

$$\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{T_1}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 0 \dots\dots\dots (16)$$

であるから、式 (15) の積分は一般に存在する。

$f(t)$ のスペクトル表示を与える $F(\omega)$ は複素極形式で

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{-i\theta(\omega)}$$

と表されるが、これは定常確率過程のスペクトルと異なり、過程 $\{f(t)\}$ からの異なる測定記録 (異なるデータ長、異なる標準化時間長など) に対しては、異なる $F(\omega)$ を持

つ。

$f(t)$ の解析において、定常不規則過程におけるパワースペクトル密度関数

$$G_f(\omega) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|F(\omega, T)|^2] \dots\dots\dots (17)$$

と類似性を持つ

$$\mathcal{G}_f(\omega) = \begin{cases} 2E[|F(\omega)|^2] & f \geq 0 \\ = 0 & f < 0 \end{cases}$$

なる量を定義する。ここに $E[\quad]$ は期待値を意味する。

この量には、 $\mathcal{G}_f(\omega)$ に時間平均処理と極限化操作が含まれていない。したがって、関数 $\mathcal{G}_f(\omega)$ は過渡過程 $\{f(t)\}$ のエネルギーそのものであり、エネルギースペクトル密度関数とよばれる。過渡的データに対しては $|F(\omega)|^2$ が一般に有界で、 $t \geq T_1$ の値に対し定数であるから両者が異なるのは明らかであるが、この二つの量は同一の手法で推定できる。特に過渡過程 $\{f(t)\}$ から長さ $T \geq T_1$ の標本記録 $f(t)$ を得たときには、エネルギースペクトルを

$$\mathcal{G}_f(\omega) = 2|F(\omega)|^2 = TG_f(\omega) \dots\dots\dots (18)$$

によって推定できる。

入出力過渡過程 $\{f(t)\}$ と $\{y(t)\}$ の相互スペクトル密度関数は

$$\mathcal{G}_{fy}(\omega) = 2E[F^*(\omega)Y(\omega)] \dots\dots\dots (19)$$

により定義される。ここに、 $F(\omega)$ と $Y(\omega)$ は、それぞれ入力標本関数 $f(t)$ と出力標本関数 $y(t)$ のフーリエ変換である。長さ $T \geq T_1$ の二つの記録 $f(t)$ と $y(t)$ の相互スペクトルは

$$\mathcal{G}_{fy}(\omega) = 2F^*(\omega)Y(\omega) = TG_{fy}(\omega) \dots\dots\dots (20)$$

により推定される。ここに $*$ は複素共役関係を表す。

Q -値並びに γ を求めるために必要な周波数応答関数の決定には、将来沖合設置型の津波計が普及した時点であれば、実測津波記録が利用できるが、現在迄のところ津波数値シミュレーション結果をフーリエ解析して得るのが最も実際的方法であろう。

入出力波振幅 $f(t)$ 、 $y(t)$ に関し、自己相関関数をそれぞれ $R_f(\tau)$ 、 $R_y(\tau)$ 、またスペクトル密度関数をそれぞれ $G_f(\omega)$ 、 $G_y(\omega)$ 、および $f(t)$ 、 $y(t)$ の相互相関関数を $R_{fy}(\tau)$ 、クロススペクトル密度関数を $G_{fy}(\omega)$ と表せば

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} G_f(\omega) d\omega \dots\dots\dots (21)$$

であり、同様に

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} G_y(\omega) d\omega \dots\dots\dots (22)$$

また

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 G_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad \dots\dots\dots (23)$$

であるから、式 (22) および (23) より

$$G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 G_f(\omega) \quad \dots\dots\dots (24)$$

また、 $f(t)$ 、 $y(t)$ の関係から

$$R_{yf}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} H(\omega) G_f(\omega) d\omega \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。

$R_{yf}(\tau)$ と $G_{yf}(\omega)$ は

$$R_{yf}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} G_{yf}(\omega) d\omega \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$G_{yf}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yf}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (27)$$

なので

$$G_{yf}(\omega) = H(\omega) G_f(\omega) \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。したがって、過渡不規則過程である津波入力による固有振動域の周波数応答関数 $H(\omega)$ を推定するには

$$H(\omega) = \frac{G_{yf}(\omega)}{G_f(\omega)} = \frac{G_y(\omega)}{G_f(\omega)} \quad \dots\dots\dots (29)$$

または

$$|H(\omega)|^2 = \frac{G_y(\omega)}{G_f(\omega)} = \frac{G_y(\omega)}{G_f(\omega)} \quad \dots\dots\dots (30)$$

を計算し、式 (24) または (28) により求めた $G_f(\omega)$ 、あるいは $G_f(\omega)$ と $G_{yf}(\omega)$ を用いればよい。

また、 $H(\omega)$ を求める際のフーリエ展開の過程において、入力成分波は $t = -\infty$ から $t = +\infty$ までの連続波、すなわち単色波として扱われるため、陰に

$$\frac{|H|^{1/2}}{Q} = 1$$

なる条件を満たしている。

ただし、このようにして求められる $H(\omega)$ は、振幅に関する応答関数ではなく、入出力エネルギー間の応答関数である。したがって振幅に関する Q -値と γ を得るには、 $|H(\omega)|^{1/2}$ によらなければならない。また、 $H(\omega)$ を求めるための $G_f(\omega)$ や $G_y(\omega)$ は、津波が目的の共振域に到達するのに要する時間 τ を考慮して、入力津波過程 $\{f(t)\}$ として $f(t; 0 < t \leq T)$ を、また共振域の応答過程 $\{y(t)\}$ として $y(t; \tau < t < T + \tau)$ なる時間標本を用いなければならない。

2. 津軽海峡海域の「 Q -値」と γ

津軽海峡内部の各地で観測された多くの津波記録のフーリエ解析によれば、入射する津波の発生位置や規模などに関わらず、この海域の応答振動には固有の周期を持つ応答振動スペクトルの存在が知られており (高橋, 1976)、それらのスペクトルは津波の線形数値シミュレーションによっても容易に再現される (Takahashi and

Yakuwa, 1981)。そこでこの津波数値シミュレーション結果にもとづいて、津軽海峡内部の主要地点における各応答振動の Q -値と振幅対数減衰率 γ の見積もりを行った。

なおこの津波シミュレーションは、北海道東方沖から三陸はるか沖にまたがる海域に、1968 年十勝沖地震津波を想定して行った計算であって、波源域は長軸 380 km、短軸 170 km を持つ長円で、津波の初期変位はその中心部で最大 60 cm に設定してある。この津波モデルのポテンシャルエネルギーは 2.1×10^{20} erg である。

図-1 に、津波入力波形として用いた格子点と、応答関数を計算した地点を示す。

前節で述べた方法により得られた、応答共振振動の振幅に関する Q -値と対数減衰率 γ を表-1 に示す。

周期 383 分振動以外は全て実測津波スペクトルに対応する周期振動であって、実測津波のスペクトルの多くが、明らかに応答共振振動であると確認される。

ただし、実測津波とモデル津波のフーリエスペクトル解析結果の双方に存在する主要なスペクトルの一つであり、津軽海峡全域を共振域とする周期 49.5 分振動のスペクトルは、周波数応答関数にピークを持たない。その原因は、モデル津波入力波の代表点として選んだ格子点 (図-1) が、この振動の共振域の内部に位置しているためである。この事情のため、49.5 分周期成分波については、数値フィルターにより分離した成分波形の包絡線変化にもとづいて直接 γ を算出した。

Q -値は、多くの地点で 2~4 程度の値を持っているが、4 以上の大きな値を持つ地点も少なくない。特に函館では周期 56.8 分振動で 8.6、稲荷で周期 34.1 分と 24.3 分振動でそれぞれ 5.9 と 7.5、および山背泊では周期 24.3 分振動が 8.7 と大きな値を持っているのが注目される。

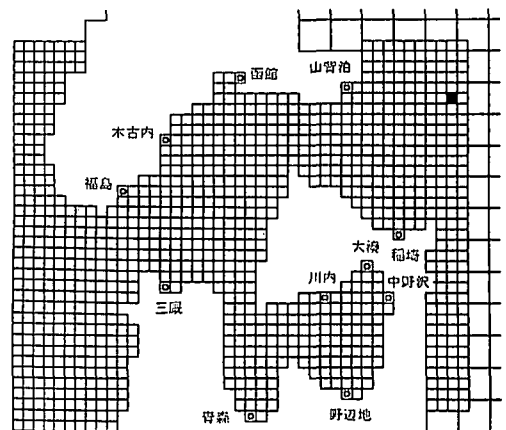


図-1 津軽海峡内応答関数計算地点 (黒点 $f(t)$ 測定点)

表-1 地点ならびに周期ごとの Q -値と γ (min^{-1})

地点	Q -値	γ	地点	Q -値	γ	地点	Q -値	γ
周期 383 分			周期 128 分			周期 102 分		
青森	1.9	2.21×10^{-3}	函館	2.0	6.05×10^{-3}	函館	1.6	9.60×10^{-3}
野辺地	2.2	1.88×10^{-3}	青森	1.5	8.50×10^{-3}	青森	3.3	4.65×10^{-3}
大湊	2.3	1.82×10^{-3}	大湊	1.8	6.80×10^{-3}	大湊	2.7	5.75×10^{-3}
周期 76.7 分			周期 56.8 分			周期 52.9 分		
函館	2.1	9.90×10^{-3}	山背泊	2.6	1.06×10^{-2}	青森	3.0	9.95×10^{-3}
稲崎	2.5	8.05×10^{-3}	函館	8.6	3.22×10^{-3}	野辺地	2.7	1.12×10^{-2}
青森	1.8	1.12×10^{-2}	稲崎	4.6	6.05×10^{-3}	大湊	1.3	2.32×10^{-2}
周期 49.5 分			周期 34.1 分			周期 25.1 分		
函館	2.3	1.41×10^{-2}	山背泊	2.7	1.72×10^{-2}	福島	2.6	2.42×10^{-2}
三厩	2.2	1.44×10^{-2}	函館	4.4	1.05×10^{-2}	三厩	2.9	2.13×10^{-2}
			稲崎	5.9	7.80×10^{-3}	青森	2.5	2.55×10^{-2}
周期 24.3 分			周期 22.5 分			周期 19.9 分		
山背泊	8.7	7.45×10^{-3}	山背泊	4.3	1.62×10^{-2}	山背泊	3.7	2.13×10^{-2}
三厩	3.4	1.89×10^{-2}	青森	2.0	3.46×10^{-2}	福島	3.6	2.20×10^{-2}
稲崎	7.5	8.55×10^{-3}	稲崎	4.2	1.64×10^{-2}	三厩	3.6	2.17×10^{-2}

全般的な傾向として、 Q -値は短周期側の振動成分で大きくなる傾向が見てとれる。

3. 津波応答振動の発達時間と減衰時間の推定

北海道の太平洋沿岸部を襲う津波には非線形現象はほとんど検出されない。このような海域では、津波によって励起される応答振動の過渡現象を、線形性のみを考慮した単純な指数関数的発達と減衰によって記述できる。津波継続時間を予測するような防災上の実用的観点に立脚し、成分波の消長を推測する目的にとって、 Q -値の活用は大いに意味のある事と考えられる。

そこで、各津波応答振動の消長をそれら包絡線の時間発展の観点から考察する。

津波が到達してから、成分波振幅が飽和値 y_h まで成長する間の振幅発展は

$$y(t) = y_h(1 - e^{-\gamma t}) \dots\dots\dots (31)$$

に従う。しかし飽和するのに要する時間 t は ∞ であって、実用的飽和時間 t_h を定められない。そこで振幅が y_h の 99% に達するまでの時間を、飽和時間 t_h と定義する。その後 t_h から t_r まで飽和振幅が保たれ、そこで津波入力が途絶えたとすれば、 t_r 以降の成分波振幅は

$$y(t) = y_h e^{-\gamma(t-t_r)} \dots\dots\dots (32)$$

に従って減衰する。

ゆえに、振幅包絡線の飽和時間は

$$t_h = -\frac{1}{\gamma} \ln(1 - 0.99) \dots\dots\dots (33)$$

で与えられる。式 (33) は、海域の γ のみの関数なので、応答振動の成長時間は入力津波振幅によらないことを示

している。式 (33) より求めた飽和時間 t_h を、表-2 に示す。

t_h をその成分波の振動周期で割れば、振幅が飽和するまでに何波の入射を要したかがわかる。多くの成分波が、おおよそ 5 波から 7 波程度の入射で飽和振幅に達している。しかし、周期 56.8 分振動では函館で 25 波以上、同じく 18.3 分振動では奥内で 13 波以上、また青森では周期 102 分と 52.9 分振動で、それぞれ 9 波と 8 波以上入射した後に飽和点に達する。

振幅減衰は、微分方程式 (1) の解の指数関数部に相当する

$$y(t) = y_0 e^{-\gamma t}$$

に従うので、先ず振幅減衰の速さを実感するために、感覚的に分かりやすい振幅の半減時間 $t_{1/2}$ を示すのが便利である。ここに y_0 は強制外力が途絶えた時点で応答振動が獲得した飽和振幅とする。

表-2 成分波の発達時間 t_h の推算値 (分)

地点	t_h	地点	t_h
周期 383 分振動		周期 128 分振動	
青森	2085	函館	764
野辺地	2451	木古内	724
大湊	2527	大湊	677
周期 102 分振動		周期 56.8 分振動	
青森	991	山背泊	436
中野沢	749	函館	1431
大湊	804	稲崎	764
周期 52.9 分振動		周期 49.5 分振動	
青森	464	函館	327
野辺地	413	三厩	320
川内	363		

表一3 自由減衰期間に移行した後の振幅半減時間 $t_{1/2}$ (分)

地点	$t_{1/2}$	地点	$t_{1/2}$	地点	$t_{1/2}$
周期 383 分振動		周期 128 分振動		周期 102 分振動	
苜森	314	函館	115	函館	72
野辺地	369	木古内	109	苜森	149
大湊	381	大湊	102	大湊	121
周期 76.7 分振動		周期 56.8 分振動		周期 52.9 分振動	
函館	70	山背泊	65	苜森	70
稲基	86	函館	215	野辺地	62
苜森	62	稲基	115	大湊	30
周期 49.5 分振動		周期 34.1 分振動		周期 25.1 分振動	
函館	49	山背泊	40	福島	29
三厩	48	函館	66	三厩	33
		稲基	89	苜森	27
周期 24.3 分振動		周期 22.5 分振動		周期 19.9 分振動	
山背泊	93	山背泊	43	山背泊	33
三厩	37	苜森	20	福島	32
稲基	81	稲基	42	三厩	32

この場合

$$\frac{y(t_{1/2})}{y_0} = \frac{1}{2} = e^{-\gamma t_{1/2}}$$

であるから、半減時間 $t_{1/2}$ は

$$t_{1/2} = -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{2} \dots\dots\dots (34)$$

により与えられ、当然入力波の振幅に無関係である。

表一1に掲げたモデル津波による各地の各共振ピークの γ 値から、式 (34) により求めた $t_{1/2}$ を、表一3 に示す。

これにより、津軽海峡内の津波が振幅が 1/2 にまで減少する時間は、地点および成分波周期によって大幅に異なり、わずか 20 分から 6 時間 21 分と 20 倍近くの幅を持つことがわかる。一般的性質としては、振幅半減時間が長い程、危険度が大きく注意を要する波動であると言える。

y_A が大きな値を持つ場合には、半減時間を経過してもなお危険な波高が持続することもあり得る。したがって各成分波ごとの減衰時間の長短だけから、津波全体の危険度を判定することは出来ない。

しかし、津波の地域的特性や時間的経過を想定し、対策を講ずる際の基礎判断資料として、各応答振動成分波に関する過渡特性の把握は重要と考えられる。

参 考 文 献

高橋 将(1976): 津軽海峡と内浦湾における津波特性, 第 23 回 海岸工学講演会論文集, pp. 459-463.
Bendat, J. S., and A. G. Piersol (1971): Random Data Analysis and Measurement Procedures, John Wiley & Sons.
Takahashi, S. and I. Yakuwa (1981): Tsunami Response of Tsugaru Straits, Proc. Int. Tsunami Sympo., pp. 315-327.