

2 次長周期波による港湾の振動について

木村 晃*・喜田 昌裕**・山崎樹実也***

1. はじめに

港・湾・入江が共振する現象は副振動,あるいはセイシュとよばれ,周期が非常に長い場合には水粒子の水平運動が大きく,係留中の船舶を動揺させて荷役に支障をきたす原因となっている。この現象の基本的なメカニズムは1960年代の初頭にLe-Mehaute (1961), Ippen-Goda (1963)らにより理論的に解明されている。これらの理論によれば湾長が入射波の波長のほぼ1/4の長さの場合に基本モード(最大)の共振現象が発生する。しかし通常,風波の周期は高々10 s程度であるため,数百 m以上の規模をもつ港湾で発生する数分のオーダーの副振動は風波が直接の原因とは考えにくい。気象擾乱,風のガスト,津波あるいはうねり等が原因となることが指摘されているが,最近になって浅海域にごく普通に観測される2次の非線形長周期波も港湾の副振動の原因となり得ることがBowers (1977)らによって示された。最近ではMei-Agnon (1989), Wu-Liu (1990), 喜岡ら (1993)がそれぞれ状況は異なるもののmulti-scale摂動法を用いて,2次以上の高次の非線形波による港湾の振動問題を取り扱っている。この方法では境界条件を与える支配方程式を数値的に解くので,自由な港湾形状を取り扱うことが出来るが,現状では1次波の振幅,角周波数を緩やかに変化させることで波の不規則性を間接的に表現するに留まっているので,我々にとってなじみ深い状況,すなわち特定の合成波が港に入射した場合,成分波の非線形干渉による2次の長周期波(周波数差の波)が港湾の振動にどのように関与しているかを簡単に計算することは難しい。本研究は2次の非線形長周期波による港湾の振動特性を明らかにすることを目的として行ったもので,長方形の単純な形状の港湾に任意の合成波が作用した場合の共振現象について基礎的な検討を行ったものである。

2. 1次波による湾水振動

解析の対象としたのは図-1に示す矩形の港湾である。港の諸元を表す記号 d, b, l, ε ならびに座標系は図に示すようにIppen-Goda (1963)と同じものを用いた。水深は港内外とも一様で,波は微少で港口に対して直角入射し,すべての境界で波は完全反射する。底面摩擦あるいは港口部でのエネルギーロスを見捨てるならば港内外の波の場合は以下の各式で与えられる(Ippen-Goda, 1963)。すなわち,振幅 a ,波数 k ,角周波数 σ の波

$$\eta = \frac{a}{2} \exp \{i(ky + \sigma t)\} \quad \cdots \cdots (1)$$

が入射した場合,港外の波の水面形は

$$\eta_1 = a \cos ky \exp \{i\sigma t\} + akc(iI_1 - I_2) \exp \{i(\sigma t + \omega)\} \quad \cdots \cdots (2)$$

となる。ここに $i = \sqrt{-1}$ および

$$c = \frac{1}{\sqrt{[(d/b)(\cot kl - S_1) - \phi_2]^2 + \phi_1^2}} \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\omega = -\tan^{-1} \frac{\phi_1}{(d/b)(\cot kl - S_1) - \phi_2} \quad \cdots \cdots (4)$$

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^k \frac{\sin ud}{u\sqrt{k^2 - u^2}} \cos ux \times \exp \{-i\sqrt{k^2 - u^2}y\} du \quad \cdots \cdots (5)$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_k^\infty \frac{\sin ud}{u\sqrt{u^2 - k^2}} \cos ux \times \exp \{-\sqrt{u^2 - k^2}y\} du \quad \cdots \cdots (6)$$

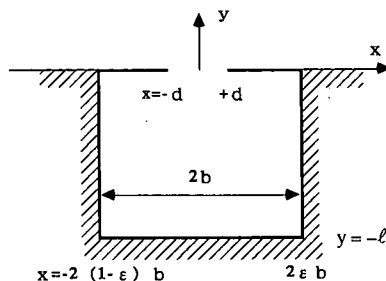


図-1 記号と座標系

* 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部社会開発システム
 ** 正会員 工修 センtralコンサルタント
 *** 鳥取大学大学院

$$\phi_1 = \frac{2}{\pi} kd \int_0^{kd} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \sqrt{(kd)^2 - \alpha^2}} d\alpha \dots\dots\dots (7)$$

$$\phi_2 = \frac{2}{\pi} kd \int_{kd}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - (kd)^2}} d\alpha \dots\dots\dots (8)$$

$$S_1 = 8 \left(\frac{b}{\pi d} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sin(n\pi d/2b) \cos \epsilon n\pi]^2}{n^2 \beta_n \tanh \beta_n kl} \dots\dots\dots (9)$$

$$\beta_n = \sqrt{(n\pi/2kb)^2 - 1} \dots\dots\dots (10)$$

である。一方、港内の波の水面形は

$$\eta_2 = -\frac{acd}{b \sin kl} \exp \{i(\sigma t + \omega)\} \\ \times [\cos k(y+l) - S(x, y)] \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。ここに

$$S(x, y) = \frac{4b \sin kl}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(n\pi d/2b) \cos \epsilon n\pi}{n \beta_n \sinh \beta_n kl} \right. \\ \left. \times \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\epsilon b) \cosh \beta_n k(y+l) \right\} \\ \dots\dots\dots (12)$$

である。(2)式で与えられる波のうち自由波の項は第1項の重複波だけである。(11)式で与えられる波でも自由波は〔 〕内の第1項の重複波だけである。第2項にはx軸方向の自由波が存在する可能性があるが、これについては5.で説明する。

3. 2次長周期波

いま外海から波形が

$$\frac{a_1}{2} \exp \{i(k_1 y + \sigma_1 t + \theta_1)\} \\ + \frac{a_2}{2} \exp \{i(k_2 y + \sigma_2 t + \theta_2)\} \dots\dots\dots (13)$$

なる合成波(θ は初期位相角)が海岸線に直角に入射した場合、成分波ごとに上で説明した重複波が発生する。一般に2つの規則波が干渉すると、それぞれの成分波の2倍周波数、両波の周波数とおよび差の2次波が発生する。2波の周波数差が小さい場合、周波数差の波は他の波に比して周期が非常に大きいので、長周期の振動について検討する場合には1次波および他の2次波の成分は無視できて、港外には速度ポテンシャルが次式で与えられる2次長周期波の重複波が残る。

$$\phi_2^{(2)} = -i \frac{a_1 a_2}{4 \sigma^-} \frac{D^- g}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\cosh k^-(h+z)}{\cosh k^- h} \\ \times \cos k^- y \exp \{i(\sigma^- t + \theta^-)\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに g は重力加速度、 h は水深、

$$\sigma^- = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \theta^- = \theta_1 - \theta_2, \quad k^- = |k_1 - k_2| \\ \dots\dots\dots (15)$$

$$R_i = \sqrt{k_i \tanh k_i h} \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (16)$$

$$D^- = [(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})\{\sqrt{R_2}(k_1^2 - R_1^2) - \sqrt{R_1}(k_2^2 - R_2^2)\} \\ + 2(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2(k_1 k_2 - R_1 R_2)] \\ / \{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2 - k^- \tanh k^- h\} \dots\dots\dots (17)$$

である。(木村, 1985)

さらに港内にはポテンシャルが

$$\phi_{2b}^{(2)} = -i \frac{a_1 a_2}{4 \sigma^-} \frac{D^- g}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\cosh k^-(h+z)}{\cosh k^- h} \\ \times \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^-(y+l) \\ \times \exp \{i(\sigma^- t + \theta^- + \omega^-)\} \dots\dots\dots (18)$$

で与えられる2次拘束波の重複波が発生する。ここに $\omega^- = \omega_1 - \omega_2$ である。添え字1, 2はそれぞれ(13)式の2つの波に対応するものである。周波数が σ^- で波数が $k_1 + k_2$ の波も発生するが波長が1次波より短いのでここでは無視する。

4. 2次長周期波による湾水振動

(14)式と(18)式は港口で等しくならず、 $y=0$ でポテンシャルの不連続がおこる。ここではBowersにならってこの不連続を埋めるような周波数が σ^- の波が新たに発生するものとする。この波の速度ポテンシャルを求めるにあたっては、港内側と港外側のものに分けて計算し、最後に(14)、(18)式も含めて港口で接続させる。まず港外側のものを次のように仮定する。

$$\phi_{1r} = \frac{-i}{\sigma^-} f_1(x, y) Z_r(z) \exp \{i\sigma^- t\} \dots\dots\dots (19)$$

(19)式をLaplaceの式に代入し、底面の不透過境界条件を用いると

$$Z_r(z) = g \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (20)$$

および

$$(\sigma^-)^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (21)$$

を得る。港内側の速度ポテンシャルを同様に

$$\phi_{2r} = \frac{-i}{\sigma^-} f_2(x, y) Z_r(z) \exp \{i\sigma^- t\} \dots\dots\dots (22)$$

と仮定する。(19)、(22)が満たすべき境界条件は境界面での条件

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \quad x = 2\epsilon b, -2(1-\epsilon)b, -l \leq y \leq 0 \\ \dots\dots\dots (23a)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad |x| > d, y = 0, (i=1, 2) \dots\dots\dots (23b)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \quad -2(1-\epsilon)b \leq x \leq 2\epsilon b, y = -l \dots\dots\dots (23c)$$

$$f_i \rightarrow 0 \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \dots\dots\dots (23d)$$

および港口での条件

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad (y=0) \dots\dots\dots (23e)$$

である。いま合田にならって

$$f_1 = kC \exp \{i\Omega\} f_3 \dots\dots\dots (24)$$

と置く。ここに C は振幅に関係する定数、 Ω は (14) 式の波と (19) 式の波の港口部 ($y=0$) での位相差である。(24) のように置くと f_3 に関する次の条件が得られる。

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \begin{cases} 1 & |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases} \dots\dots\dots (25a)$$

$$f_3 \rightarrow 0 \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \dots\dots\dots (25b)$$

港内外の速度ポテンシャルを Laplace の式に代入し (24) を考慮すると、

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} + k^2 f_i = 0 \quad (i=2, 3) \dots\dots\dots (26)$$

を得る。この式を与えられた境界条件の下で合田と同じフーリエ変換法を用いて解くと

$$f_2 = -\frac{Cd \exp \{i\Omega\}}{b \sin kl} [\cos k(y+l) - S(x, y)] \dots\dots\dots (27)$$

$$f_3 = iI_1 - I_2 \dots\dots\dots (28)$$

を得る。(27) の $S(x, y)$ は σ^- に対応する自由波の波数 k を (12) 式に、さらに (12) 式中の β_n は (10) 式に同じ k をそれぞれ代入して計算する。(28) の I_1 および I_2 は (27) と同じ k を (5), (6) 式に代入して計算する。(27), (28) および (20) 式を (19) および (22) 式に代入すると港内外の速度ポテンシャル

$$\phi_{1f} = -\frac{i}{\sigma^-} \{iI_1 - I_2\} k C g \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \times \exp \{i(\sigma^- t + \Omega)\} \dots\dots\dots (29)$$

$$\phi_{2f} = \frac{ig}{\sigma^-} \frac{Cd \exp \{i\Omega\}}{b \sin kl} [\cos k(y+l) - S(x, y)] \times \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \exp \{i\sigma^- t\} \dots\dots\dots (30)$$

を得る。この段階では (29), (30) の両式に含まれる C および Ω が未定であるので、ここでは (29), (30) の両式を接続してこれらの定数を決める。(1) 式は港口部での流体の運動が x 軸方向に一樣であるとして導かれているので、ここでも同様にこれらの定数を決める。すなわち

$$\phi_{1f}^{(2)} + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} dx = \phi_{2f}^{(2)} + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2f} dx \quad (y=0) \dots\dots\dots (31)$$

とする。さらに式の形を簡単にするために次の関係を用いてポテンシャルに変えて水位の接続を行う。

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (z=0) \dots\dots\dots (32a)$$

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right) \quad (z=0) \dots\dots\dots (32b)$$

(32b) の $\eta^{(2)}$ および $\phi^{(2)}$ はそれぞれ 2 次長周期拘束波の波形及び速度ポテンシャルである。いま港外側の波の港口での平均水位を ζ_1 , 港内側のものの平均水位を ζ_2 とすると、

$$\zeta_1 = \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp \{i(\sigma^- t + \theta^-)\} + C [\phi_1 - \phi_2] \exp \{i(\sigma^- t + \Omega)\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\zeta_2 = \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \times \cos k^- l \exp \{i(\sigma^- t + \theta^- + \omega^-)\} + C(d/b) [\cot kl - S_1] \exp \{i(\sigma^- t + \Omega)\} \dots\dots\dots (34)$$

となる。両辺を等しいと置いて、実部および虚部に分けて 2 つの式を導いて解くと、

$$C = \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\{P_1^2 - 2P_1 \cos \omega^- + 1\}^{1/2}}{[(P_2 - \phi_2)^2 + \phi_1^2]^{1/2}} \dots\dots\dots (35)$$

および

$$\Omega = \tan^{-1} \left\{ \frac{P_1 \sin(\theta^- + \omega^-) - \sin \theta^-}{P_1 \cos(\theta^- + \omega^-) - \cos \theta^-} \right\} - \tan^{-1} \left\{ \frac{\phi_1}{P_2 - \phi_2} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

を得る。ここに

$$P_1 = \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^- l \dots\dots\dots (37)$$

$$P_2 = (d/b) [\cot kl - S_1] \dots\dots\dots (38)$$

である。

(35) 式の ϕ_1 , ϕ_2 および (38) 式の S_1 は (21) 式の関係から計算した k の値を (7), (8) および (9) 式に代入して計算する。 a_1 , a_2 , k_1 , k_2 は 2 つの 1 次波の振幅および波数、 c_1 , c_2 はそれぞれの波に対して (3) 式で計算される定数および ω^- は (4) 式で計算される 1 次波の ω の差 ($\omega_1 - \omega_2$) である。

最後に港の共振による振幅の増幅率を計算する。一般に (13) 式の 2 波の干渉により生じる 2 次の長周期拘束波の振幅は

$$\frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \dots\dots\dots (39)$$

で与えられる。港内での水位とこの振幅の比を R とすると、 $y = -l$, $x = 2\epsilon b$ での値は

$$R = \left| \frac{(d/b) \left\{ \frac{P_1^2 - 2P_1 \cos \omega^- + 1}{(P_2 - \phi_2)^2 + \phi_1^2} \right\}^{1/2}}{\sin kl} \right| \times [\cos k(y+l) - S(x, y)] \dots\dots\dots (40)$$

となる。

5. 理論式の特性

ここでは若干の計算を通じて理論の特性を示す。簡単のためすべて $d=b$ とした。図-2は表-1の case 1~4に示すように周波数差が0.005 Hzとなるような2波のいくつかの組み合わせについて湾の奥行き長さ l と長周期の自由波の波数 k の積 kl と R の関係を示したものである。図からわかるように周波数差が等しい場合、基本モードのピーク付近の R の様子にはあまり大きな差はない。これをふまえて入射波の周波数差を変化させて R の変化を見たものが図-3である (case 5~8)。水深、湾幅は図-2と同じ値を用いた。いずれも波長の1/4の付近

に第1のピークが現れていること、周波数差が大きくなるほど1次の resonance 時の R の値が小さくなることなどがわかる。湾幅 (2b) による R の変化の差を見たものが図-4である (case 9~12)。入射波の周期、位相差、水深は Case-1と同じにした。図からわかるように b の値が小さくなると R のピーク値が増加する。基本的には自由波の resonance と似た結果が得られる。ただ基本モードに比べて高次の共振モードでの R の低下は自由波のものに比べて顕著でない。非線形干渉による2次長周期波の振幅は1次波の組み合わせで変化するが、水深が十分浅く2波の周波数・振幅がほぼ等しい場合には近似的に次の式で計算できる。(Kimura, 1984)

$$a^2k/(4kh-1) \dots\dots\dots (41)$$

ここに a, k は1次波の振幅、波数である。たとえば Case-1の場合、 $a_1=a_2=1$ m とすれば約4 cm となり、図-2の基本モードの共振時には湾奥での波高が約0.5 m となり大きな値となる。

最後に x 軸方向の共振の可能性について説明する。(12) 式に含まれる

$$\cos \frac{n\pi}{2b}(x-2\epsilon b) \dots\dots\dots (42)$$

の項において、1次波の波長が $L=4b/n$ (n は正の整数) の場合、この波は自由波となる。(13) 式の2つの1次波がともにこの条件を満たす場合、それらの波の干渉により周波数差の拘束波が発生する。この波により港口部で

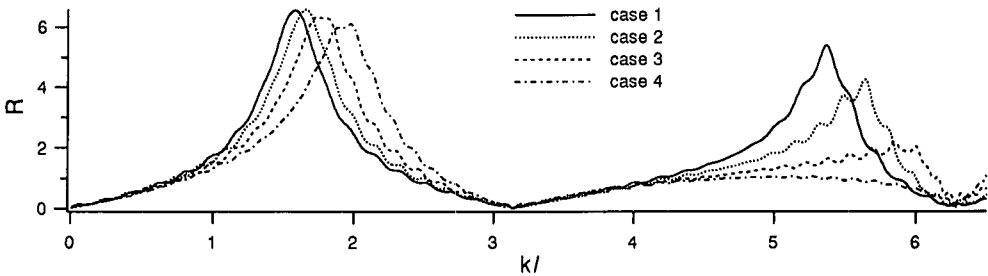


図-2 R と kl の関係

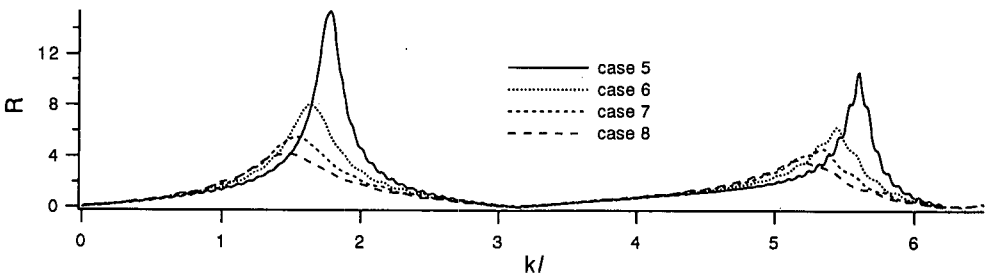
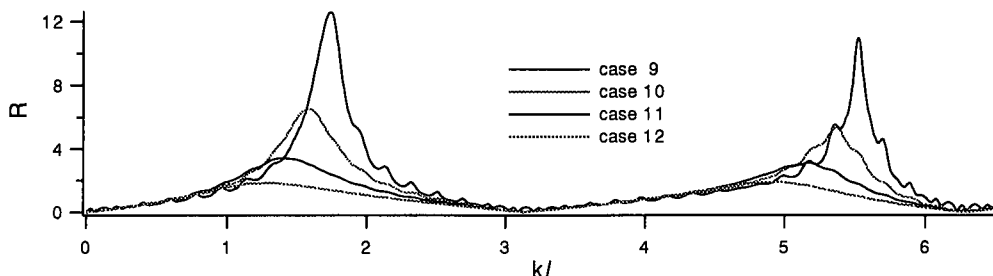


図-3 R と kl の関係 (ω^- を変化した場合)

図-4 R と k/l の関係 (b を変化させた場合)

港内外の波に不連続が生じた場合、同様に x 軸方向に自由波が発生し、条件が満たされると resonance が発生する。ただ、これらの条件を満足する波の組み合わせは限られていること、通常の風波の周期帯の波では n の値が小さい場合、周波数差の波はあまり長周期の波にならない、等の理由で式の煩雑さをさけるためここではこのような状況を考慮しない結果を示した。

6. おわりに

本研究は 2 次の非線形長周期波による港湾の振動特性を理論的に明らかにすることを目的として行ったもので、長方形の単純な形状の港湾に任意の合成波が作用した場合の共振現象について基礎的な検討を行ったものである。従来より数分程度の周期の波による港湾振動が問題とされてきたが、この研究でも示したように通常の周期を持つ 1 次波の非線形干渉により数分のオーダーの周期を持つ波が港湾内に発生する。すなわち非線形干渉による 1 次波の周波数差の拘束波と、港内外の 2 次拘束波の港口部での不連続性に起因する拘束波と同じ周期の自由波である。港内の長周期の拘束波は 1 次波に拘束されているため共振により増幅されることはない。resonance の原因となるのは後者の自由波である。例でも示したように共振時にはこの波の振幅はかなり大きくなる。したがって数分のオーダーの港湾の共振現象の原因としてここで示した 2 次の非線形長周期波は注目する必

要がある。

謝辞：徳島大学村上仁士教授から資料の提供と貴重な助言をいただいた。記して感謝の意を表します。

参考文献

- 喜岡 渉, 柏原謙爾, 岩垣雄一 (1993): 不規則波群に伴う 2 次長周期波の湾水振動, 土木学会論文集, No. 473/II-24, pp. 55-64.
- 木村 晃 (1985): 非線形長周期波の 2 次元スペクトル, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 154-158.
- 合田良実 (1963): 長方形および扇形の港の副振動について, 一フーリエ変換を用いた一解法一, 第 10 回海岸工学講演会講演集, pp. 53-58.
- Bowers, E. C. (1977): Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, J. Fluid Mech., Vol. 79, part1, pp. 71-92.
- Ippen, A. T. and Y. Goda (1963): Wave induced oscillation in harbors, the solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, Hydrodynamics Lab. Rep. No. 59, MIT, 90 p.
- Kimura, A. (1984): Averaged two-dimensional frequency wave spectrum of wind waves, Rept. No. 84-3, Comm. on Hydraulics Dept. of civil eng. Delft. Univ., 54 p.
- Le-Mehaute, B. (1961): Theory of wave agitation in a harbor, Proc. ASCE, Vol. 87, HY2, pp. 31-50.
- Mei, C. C. and Y. Agnon (1989): Long period oscillations in a harbour induced by incident short waves, J. Fluid Mech., Vol. 208, pp. 595-608.
- Wu, J. -K and P. L. -F. Liu (1990): Harbour excitations by incident wave groups, J. Fluid Mech., Vol. 217, pp. 595-613.