

非線形不規則波列における非分散性拘束モードの役割とその評価法

安田 孝志*・川口 浩二**・森 信人***

1. 緒 言

共鳴を伴う高次（3 次以上）干渉の下では、ストークス波がカオス的に不規則化する（安田・森，1996）だけでなく、スペクトルのバンド幅に関係なく高波高の出現頻度が増し、Freak wave のような単独で突出した波高を持つ異常波が出現し易くなる（安田ら，1994）。このような共鳴を伴う高次干渉の理論自体はフーリエモードに関して既に展開され、スペクトルの発達過程の記述に成果を挙げている。しかし、フーリエモードと波高の関係が定式化されていないため、高次干渉の影響を受けたフーリエモードがどのように高波高の出現頻度の増大などに連がっているのかについては依然として不明な点が多い。

ストークス波や狭帯スペクトルの高周波成分が非分散性を示すようになることは良く知られており、風波の場合にも同様な特徴が現れることは既に実証されている（加藤・鶴谷，1974；Ramamonjiarisoa，1974）。こうした非分散性は非線形高調波に原因しており、高次干渉を介した拘束モードの生成によることが理論的に解明されている（Masuda et al., 1979）。このような非分散性拘束モードは当然ながら波形やその統計量に影響を及ぼすと考えられるが、任意のスペクトルを持つ不規則波の下での生成機構や条件、さらに波形諸量への影響などはなお不明である。

ここでは、広範囲の初期スペクトルを持つ深海波のフーリエモードや波形諸量への非線形干渉の影響について検討を行い、非分散性拘束モードの実態を明らかにする。同時に、このような拘束モードの生成に伴って形成される‘熱平衡スペクトル’についても検討を行い、これに対するスペクトルの飽和度やバンド幅についての考え方を示すとともに、拘束モードを含めたその推定法を明らかにする。

2. 手法の概要

ここで用いる手法は、これまでと同様、非回転運動に対する基礎式を周期境界の下で 2 次（2nd）および 4 次（ $M=4$ ）の非線形干渉まで評価して解くものである（例えば、安田・森，1996）。初期波として Wallops 型スペクトルを持つ深海波を与え、 $k_p a$ を 0.08～0.14、スペクトルのベキ則パラメータ m を 4～100 まで変化させ、2048 個のフーリエモードを $256L_p$ の波列に対して与えた。ここで、 k_p はスペクトルのピーク波数、 a は $H_{1/3}$ の 1/2、 $L_p = 2\pi/k_p$ 。

3. 高次干渉によるエネルギー輸送

共鳴のない 2 次干渉では高調波の生成によるもの以外ではエネルギー輸送は生じないが、共鳴を伴う 3 次干渉以上では全モード間でエネルギー輸送が活発に行われ、各モードのスペクトル $S(k)$ はバンド幅に関係なく不規則に変動する（安田ら，1993）。この伝播過程での変動の強さを表す変動係数 $C.V.[S(k)]$ の値は波数 k に依らずほぼ一定であるが、その値自体は非線形性の強さに支配される。

図-1 は、 $1 \leq k/k_p \leq 3$ の波数域での変動係数の平均値 $\overline{C.V.[S]}$ と非線形性の強さを表す非線形指標 $\Lambda = k_p a \cdot \ln m$ （安田ら，1994）との関係を示したものである。 $\overline{C.V.[S]}$ をモード間のエネルギー輸送量の指標とすれば、エネルギー輸送量は非線形性が強くなるに従って図中の回帰式にほぼ従って増大することがわかる。

このようなモード間のエネルギー輸送によって、各モードのスペクトルは全波数域にわたって不規則な変動

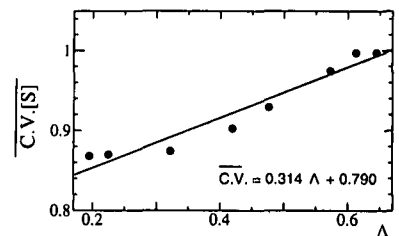
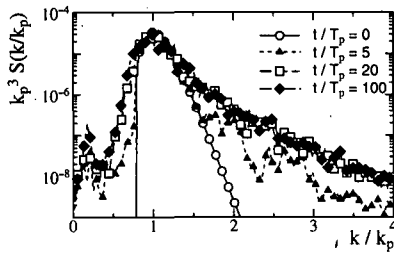
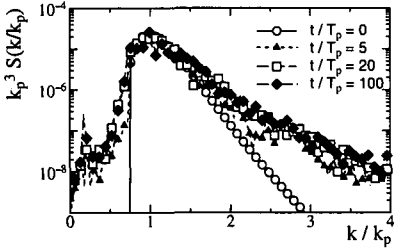
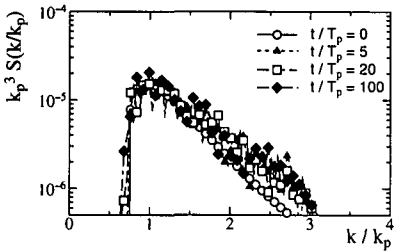
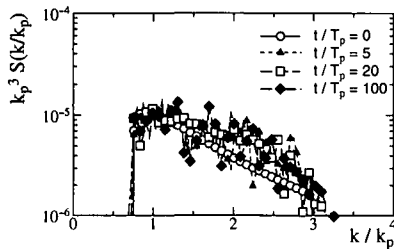


図-1 平均変動係数 $\overline{C.V.[S]}$ と非線形指標 Λ の関係

* 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所 水工学部 海象調査研究室

*** 正会員 工博 (財)電力中央研究所 我孫子研究所 水理部

(a) $m=60$ (b) $m=30$ (c) $m=10$ (d) $m=4$ 図-2 スペクトル分布の時間変化 ($k_p a = 0.14$)

を繰り返すが、マクロ的には一定の方向性があり、図-2(a) および (b) に示すように各スペクトルは変動しつつ一定の分布に収束し、一種の‘熱平衡状態’に到達することがわかる。これは、保存系においてもエネルギー輸送に非可逆性があることを示し、これらのエネルギー輸送がカオス的に行われていることに対応している。ただし、図-2(c) および (d) のように初期スペクトルが広帯の場合、一定の分布形状への収束は見られず、 $m=4$ では初期スペクトル周りに変動を繰り返す分布となっている。

4. スペクトルの飽和度と拘束モードの関係

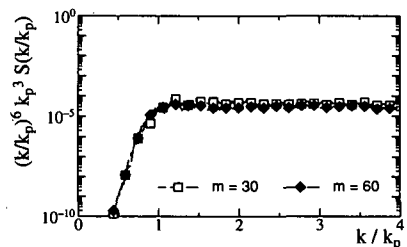
4.1 熱平衡スペクトルとそのベキ則

ここで扱っている不規則波列を統計力学的に捉えれば、それは熱平衡系である。したがって、初期スペクトルが十分に狭帯の場合には前述の図-2(a) および (b) に示したように一定時間後には‘熱平衡状態’に到達するため、これらの $t/T_p=100$ のスペクトルを‘熱平衡スペクトル’と呼ぶことができる。非線形干渉が十分に強ければ熱平衡スペクトルは一般的に一様分布になるが、水の波の場合、図-2 に示したように $k_p a$ の値に応じたベキ則に従う分布となる。

図-3 は、このときの熱平衡スペクトルのベキ則指数を明らかにするため、平衡状態に到達したと見なせる $t/T_p=100$ のスペクトルに $(k/k_p)^{m_e}$ の重みを掛け、その結果を示したものである。 m_e の値が熱平衡スペクトルのベキ則指数に一致すれば、重み付きスペクトルは一様分布となるが、この場合、 $m_e=6$ において確かに一様分布となっていることがわかる。

Wallopis 型スペクトルの場合、そのベキ則は $k^{-m/2}$ によって与えられるから、このときの $m_e(=6)$ を m に換算すると 12 となる。したがって、初期状態において $k_p a = 0.14$ の下で $m < 12$ となる不規則波では、高波数モード ($k > k_p$) のエネルギーは熱平衡スペクトルによるものよりも過剰であり、これらの過剰分のエネルギーは行き所を失うことになる。この結果、エネルギー輸送にマクロ的方向性が現れず、前述の図-2(c) および (d) に示した $m=10$ および 4 の場合のように、一定分布への収束は見られなくなる。このように熱平衡スペクトルよりも高波数側に過剰エネルギーを抱えた不規則波は過飽和と呼ぶことができ、スペクトルのバンド幅に関して言えば広帯となる。

これに対し、 $k_p a = 0.14$ の下で $m > 12$ の初期スペクトルを持つ不規則波の場合、高波数モードのエネルギーは熱平衡スペクトルに対して不飽和であるため、飽和に達するまでエネルギーを受け入れることができ、これがエネルギー輸送にマクロ的方向性を与えることになる。こ

図-3 平衡スペクトルのベキ則指数 m_e ($k_p a = 0.14$)

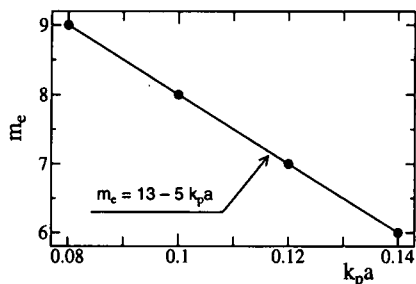


図-4 平衡スペクトルのベキ則指数 m_e と波形勾配 $k_p a$ の関係

のような不規則波は、狭帯スペクトルを持つと呼べるが、高次干渉下では必ず伝播過程で熱平衡状態に向かうため、過渡的にしか存在し得ない。

ミクロレベルでのエネルギー輸送は基本的には各モードの振幅のみに支配され、スペクトルのバンド幅に無関係である(安田ら, 1993)が、マクロレベルでのエネルギー輸送量は初期バンド幅に支配される。ここに非線形指標 Λ が $k_p a$ だけでなく、 m の関数ともなる理由があるが、平衡スペクトルに向かうエネルギー輸送が生じるか否かは、 m の値が $2m_e$ を超えているか否か、すなわち、狭帯あるいは広帯スペクトルのいずれであるかによって決まるため、 $k_p a$ に応じた m_e の値を知る必要がある。

図-4 は上述の図-3 に示したようにして求めたベキ則指数 m_e の値と $k_p a$ の関係を黒丸で示したものである。 m_e は図中の実線で示される回帰式

$$m_e = 13 - 5 \cdot k_p a, \quad 0.08 \leq k_p a \leq 0.14 \quad \dots \dots (1)$$

に従っており、熱平衡スペクトルのベキ則指数 m_e は $k_p a$ の値のみによって一義的に決定できることがわかる。こうして定まる熱平衡スペクトル $S \sim k^{-m_e}$ は熱平衡系におけるものであるが、これを臨界スペクトルとして前述のように狭帯および広帯の定義を行うことにより、スペクトルバンド幅の‘熱力学’の意味を明確にすることができる。

4.2 スペクトルの飽和度と拘束モードの関係

初期スペクトルの m の値が式 (1) で与えられる $2m_e$ を超える場合、スペクトルは不飽和となり、前述したように平衡スペクトルに向かうエネルギー輸送が生じる。このときのエネルギー輸送量は $(m - 2m_e)$ の値によって決まるため、これを不飽和度指標と定義する。こうした不飽和度に対応したエネルギー輸送には、共鳴だけでなく非共鳴干渉も重要な役割を果たすが、後者の干渉は拘束モードを生成するため、その影響は分散関係に現れてくるはずである。

図-5 は、この点を明らかにするため、 $k_p a = 0.14$ の下で初期スペクトルの m の値が $2m_e = 12$ を超える 60, 30 および 20 の不規則波の分散関係とスペクトル形状を示

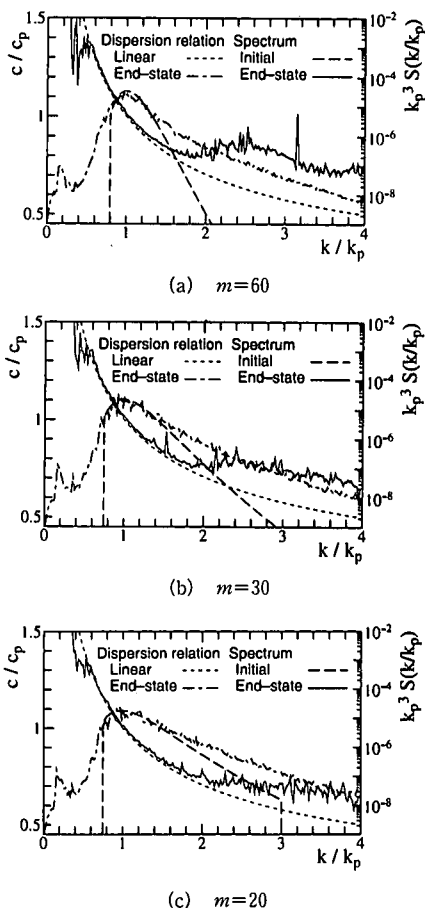
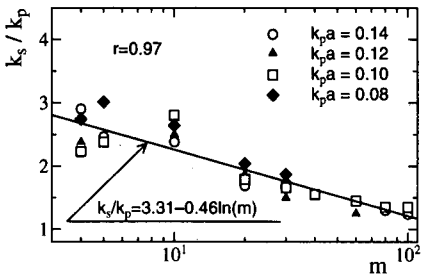


図-5 平衡状態 (End-state) におけるスペクトルと分散関係

したものである。このときの平衡状態 (End-state) のスペクトルと初期スペクトルの差が実質のエネルギー輸送によるものであるが、 k_p よりも高波数側の波速 c/c_p について観ると、 $m=60$ の場合では $k/k_p \approx 1.4$ 付近から線形分散関係との乖離が始まり、波数 k にほとんど無関係な一定の波速となることがわかる。この乖離開始点の波数 k_s は、初期スペクトルと平衡スペクトルが交差する波数 (交差波数) k_c とほぼ一致していることから、 $k > k_c$ の高波数モードはピーク周辺からのエネルギー輸送による非分散性拘束モードとして励起されたものであることがわかる。このような乖離波数 k_s と交差波数 k_c は共に初期スペクトルの飽和度が増すに従って増大し、これに伴って拘束モードの割合も相対的に低下していくことがわかる。また、 k_s/k_p の値が大きくなるに従って波速の非分散性は却って顕著となり、拘束モードは一定波速 $c(k_s)$ に従うようになる。これは加藤・鶴谷 (1974) らによって発見された風波の波速の非分散性のメカニズムを説明するものになっている。

このような拘束モードの波数領域を知るだけでなく、



図—6 乖離波数比 k_s/k_p と初期バンド幅パラメータ m の関係

その伝播速度を知る上においても k_s の算定法が必要となるため、その支配式について検討をした。図—6 は、 $k_p a$ をパラメータとして乖離波数 k_s と初期スペクトルのバンド幅パラメータ m との関係を示すとともに、回帰式

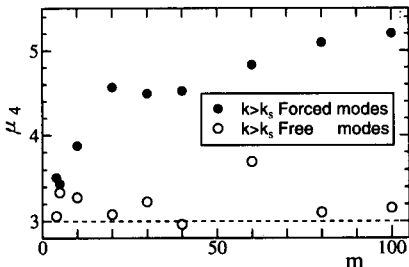
$$\left. \begin{aligned} k_s/k_p &= 3.31 - 0.46 \ln m, \quad 0.08 \leq k_p a \leq 0.14, \\ 4 \leq m &\leq 100, \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

による関係を実線で示したものである。 $k_p a$ による変動はあるが、ここに示した範囲内では k_s/k_p の値は m によって一義的に決定でき、式 (2) によって容易に k_s の算定が可能となることがわかる。

5. 拘束モードの役割とその評価法

高次干渉の波形への影響が狭帯化に伴って顕著になること自体は安田ら (1992) によって既に示されている。また、拘束モードの割合も初期スペクトルの狭帯化とともに増大するから、高次干渉の実体が非分散性拘束モードにあることは容易に想像できる。

図—7 は、こうした拘束モードの波形への影響を明らかにするため、 $t/T_p=100$ における波形から尖鋭度 μ_4 を求めるとともに、このときの拘束モード ($k/k_c > 1$) を自由波 (位相定数は乱数、波速は線形分散関係) として再合成した波形からも μ_4 を計算し、これらと m との関係を示したものである。拘束モードが生成される $m \geq 20$ においては、 $k/k_c > 2$ を自由モードとした場合に比べて μ_4 の値に大きな差異が現れ、後者の場合の μ_4 の値は線形波の 3

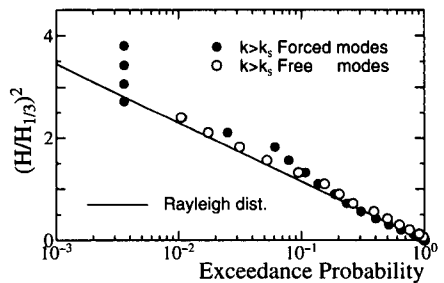


図—7 拘束モードの波形の尖鋭度 μ_4 に及ぼす影響と初期バンド幅パラメータ m の関係 ($k_p a = 0.14$)

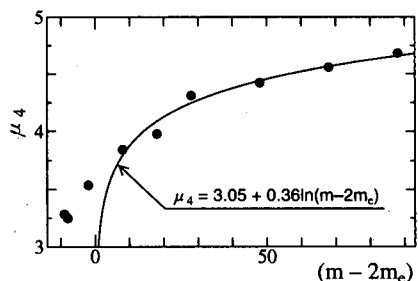
に近いのに対し、前者では 4 を超え、拘束モードが波形の尖鋭度を高めていることが理解できる。 μ_4 が高波高の出現頻度に関わることは Stansberg (1993) によって実験的に指摘されており、こうした拘束モードが Rayleigh 分布を上回る高波高の出現頻度に連がっているものと推察される。

図—8 は、このことを波高の超過確率に関して示すため、 $k_p a = 0.14$ および $m = 30$ の不規則波について $k/k_s > 1$ の拘束モードを含めた場合とこれらを自由モードとして再合成した場合のそれぞれの波形より求めた波高の超過確率を Rayleigh 分布によるものと比較したものである。拘束モードを自由モードに置き換えた場合、 μ_4 の値が 3 近くなることに対応して超過確率も Rayleigh 分布によるものにほぼ一致するが、拘束モードをそのまま残した場合、上述したように高波高部分での超過確率が増大し、Rayleigh 分布を上回るようになる。

このように、高次干渉の影響は $k/k_c > 1$ の拘束モードを通して波形や波高分布に及んでくるため、その影響は拘束モードの割合が増えるに従って増大すると考えられる。実際に、 $k_p a = 0.14$ の不規則波について初期スペクトルの不飽和度 ($m - 2m_e$) と波形の尖鋭度 μ_4 との関係を示した図—9 によって、このことが明らかとなっている。すなわち、初期スペクトルの狭帯化とともに拘束モードの割合を表すスペクトルの不飽和度 ($m - 2m_e$) が増し、これに伴って μ_4 の値も図中の回帰曲線にほぼ従って増大している。これは、高次干渉の波形への影響が拘束モー



図—8 拘束モードの波高の超過確率に及ぼす影響



図—9 不飽和度パラメータ ($m - 2m_e$) と尖鋭度 μ_4 の関係

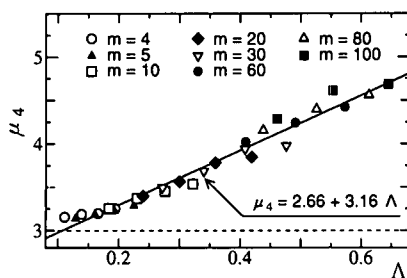


図-10 非線形指標 Δ とその波の平衡状態における波形より得られる尖鋭度 μ_4 の関係

ドの割合を決定するスペクトルの不飽和度に直接支配されていることを示し、不規則波の非線形的取り扱いにおいてスペクトルの初期バンド幅 m が $k_p a$ とともに重要なパラメータとなることがわかる。

しかしながら、現地波浪のように初期スペクトルが不明な場合、その $k_p a$ から平衡スペクトルのベキ則指数 m_e を推算できても、不飽和度を計算することはできず、拘束モードの割合を知ることはできない。このため、高次干渉の波形への実際の影響を評価することができず、線形的取り扱いを行った場合の誤差が不明となる。ところで、実測波形より得られる μ_4 の値は拘束モードを介した高次干渉の影響を反映したものであるから、 μ_4 と Δ の間に一義的対応を見出すことができれば、実測波形より $k_p a$ および μ_4 の値を求めることによって Δ 中の m の値、すなわち初期スペクトルのバンド幅を知ることができる。

図-10 は、平衡状態にある波形より得られる μ_4 の値とその波の非線形パラメータ Δ との関係を示したものであり、両者の間に図中の回帰式

$$\mu_4 = 2.66 + 3.16\Delta, \quad 0.08 \leq k_p a \leq 0.14, \quad 4 \leq m \leq 100, \quad \dots\dots\dots (3)$$

にほぼ従う一義的関係があることがわかる。これより、初期スペクトルが不明であっても、波形データあるいは直接 μ_4 の値が与えられている場合には、この回帰式を m について解いた $m = \exp[(\mu_4 - 2.66)/3.16k_p a]$ によって m の推算を行うことができる。すなわち、実測波形より得られる $k_p a$ および μ_4 をこれに代入することにより、初期スペクトルのバンド幅を与える m の値を推算し、拘束モードの割合を評価することが可能となる。

6. 結 語

高次干渉下での不規則波列においては波形勾配 $k_p a$ の

みによって決まる一種の‘熱平衡スペクトル’が存在し、初期スペクトルがこれよりも狭帯の場合にはこれに向かうマクロレベルのエネルギー輸送が生じ、これに収束することが明らかとなった。そして、このスペクトルのベキ則指数 m_e を $k_p a$ の関数とした推算式を導くとともに、これを基準としてスペクトルの相対的な帯域幅の大きさ(狭帯あるいは広帯)の分類法を提案した。ついで、こうした‘熱平衡スペクトル’を基準としたスペクトルの不飽和度を定義し、これがマクロレベルでのエネルギー輸送の方向および量を支配していることを明らかにした。このとき輸送されるエネルギーによって非分散性拘束モードが励起され、それが高波高の出現頻度を増大させるなどの高次干渉の波形への影響として顕在化し、高次干渉の実体が非分散性拘束モードにあることを明らかにした。さらに、尖鋭度 μ_4 と初期スペクトルの不飽和度 ($m - 2m_e$) および非線形指標 $\Delta = k_p a \cdot \ln(m)$ の間にほぼ一義的な関係があることを見出し、これを基に波形データから非分散性拘束モードの割合や高次干渉の波形への影響の算定法を提示した。

最後に、本研究が文部省科学研究費基盤 (c) (2) による成果であることを付記し、深謝する。

参 考 文 献

- 加藤 始・鶴谷広一 (1974): 風波の成分波の波速について, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 256-259.
- 安田孝志・伊藤一教・森 信人 (1992): 一方向不規則波の波高分布に及ぼす非線形干渉の影響について, 土木学会論文集, No. 443/II-18, pp. 83-92.
- 安田孝志・森 信人・伊藤一教 (1993): 風波のスペクトルを持つ一方向波の共鳴干渉とその影響, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 101-105.
- 安田孝志・森 信人・川口浩二・多田彰秀 (1994): 一方向波列の波高分布に及ぼす非線形干渉と碎波の影響について, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 31-35.
- 安田孝志・森 信人 (1996): 不規則波のカオス的生成とその特性について, 土木学会論文集, No. 533/II-34, pp. 181-192.
- Masuda, A., Yi-Yu Kuo and H. Mitsuyasu (1979): On the dispersion relation of random gravity waves, Part 2, J. Fluid Mech., 92, pp. 717-730.
- Ramamonjisoa, A. (1974): Contribution à l'Etude de la structure statistique et des mécanismes de génération des vagues de vent, *Thèse de doctoral d'état*, Univ. de Provence, 1974.
- Stansberg, C. T. (1993): Propagation-dependent spatial variations observed in wave trains generated in a long wave tank, Report of MARINTEK, 8 p.