

3 次の非線形核関数を用いた不規則波の内部流速の推定

森 信人*・横尾 真一**・安田 孝志***

1. はじめに

石油のプラットフォームに代表される海洋構造物を設計するにあたり、流体力の特性、特にその鉛直分布を精度良く推定することは重要な課題となっており、例えば Gudmestad and Spidsøe (1990) は、推定方法により約 24% の違いが生じるとの報告を行っている。

現在、不規則波の内部流速を推定する代表的な方法としては、1) 定常波を用いる方法、2) 流れ関数を用いる方法、3) フーリエ係数に対してストレッチングを行う方法、4) 多項式を用いて局所的に近似を行う方法、5) 非線形核関数を用いる方法が挙げられる。不規則波に対して 1) ～ 4) の手法を用いて計算することは力学的な根拠が乏しく、工学的に特に重要である波峰近傍における流速を精度良く推定することは出来ないとの報告もある [例えば、Gudmestad (1993), DHL (1982)]。一方、不規則波の非線形干渉に関する研究は Tick (1959) により始められ、その後木村 (1984)、浜中・佐藤 (1984)、Marthinsen and Winterstein (1992) らにより 2 次の非線形干渉の影響についての検討が行われている。しかしながら、深海波を対象とした場合、速度ポテンシャルに対する 2 次の非線形干渉の寄与は 3 次 に比べて小さいため、3 次の非線形干渉まで考慮しなければならない場合があることが予想される。

そこで本研究では、3 次のモードカップリング方程式に対して摂動展開を行い、不規則波の空間波形に対して 3 次の非線形干渉の影響を考慮できる関係式を導出し、その計算例を示す。

2. 計算の方法

2.1 基本方程式

一定水深 h 、平均水面を原点に取り水平方向 $x=(x, y)$ 、鉛直方向上向きに z 軸とした場合の非回転・ポテンシャル流れの自由表面上における境界条件は、水面変動 $\eta(x, t)$ および自由表面上での速度ポテンシャル $\phi^s(x, t)$

$=\phi(x, \eta(x, t), t)$ を用いて次式のように記述される [Zakharov, 1968]。

$$\eta_t + \nabla_x \phi^s \cdot \nabla_x \eta - (1 + \nabla_x \eta \cdot \nabla_x \eta) \phi_z = 0 \cdots \cdots (1a)$$

$$\phi_t + g\eta + \frac{1}{2} \nabla_x \phi^s \cdot \nabla_x \phi^s - \frac{1}{2} (1 + \nabla_x \eta \cdot \nabla_x \eta) \phi_z^2 = 0 \cdots \cdots (1b)$$

ここで、添字 t は時間微分を表し、 $\nabla_x \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ を水平方向の空間微分として定義する。 $\eta(x, t)$ 、 $\phi(x, z, t)$ および $\phi^s(x, t)$ を Fourier-Stieltjes 表現する。

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dA(K) e^{ix} \cdots \cdots (2a)$$

$$\phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dB(K) \frac{\text{ch}[|k|(z+h)]}{\text{ch}(|k|h)} e^{ix} \cdots (2b)$$

$$\phi^s(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dC(K) e^{ix} \cdots \cdots (2c)$$

ここで、 $k=(k_x, k_y)$ 、 $\chi=k \cdot x - \omega t$ 、 $K=(\omega, k)$ 、 $\text{ch}=\cosh$ である。

Stiassnie and Shemer (1984) に従い、 $\eta(x, t)$ および $\phi^s(x, t)$ を $O(\epsilon)$ の量として考え、 $O(\epsilon^3)$ の項まで考慮すると式 (2) は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & dA_i(K) - |k| \text{th}(|k|h) dC(K) \\ & + \iint_{-\infty}^{\infty} \{ |k_1| [|k_1| - |k| \text{th}(|k|h) \text{th}(|k_1|h)] - k_1 \cdot k_2 \} \\ & \times dC(K_1) dA(K_2) \delta(k - k_1 - k_2) \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} (S_{0,1,2,3,4} - |k_1| k_2 \cdot k_3) \\ & \times dC(K_1) dA(K_2) dA(K_3) \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) = 0 \cdots \cdots (3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & dC_i(K) + g dA(K) \\ & - \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} [k_1 \cdot k_2 + |k_1| |k_2| \text{th}(|k_1|h) \text{th}(|k_2|h)] \\ & \times dC(K_1) dC(K_2) \delta(k - k_1 - k_2) \\ & - \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} dC(K_1) dC(K_2) dA(K_3) R_{0,1,2,3} \\ & \times \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) = 0 \cdots \cdots (3b) \end{aligned}$$

ここで、 $S_{0,1,2,3}=S(k, k_1, k_2, k_3)$ および $R_{0,1,2,3}=R(k, k_1, k_2, k_3)$ は係数式であり [Stiassnie and Shemer, 1984]、 $\text{th}=\tanh$ を意味する。

* 正会員 工博 (財) 電力中央研究所 水理部
** 正会員 福岡県庁土木部
*** 正会員 工博 岐阜大学工学部 土木工学科

2.2 近似解の導出

η を摂動パラメータとして η および ϕ^s を Stokes 流に摂動展開する。

$$\eta = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} dA_1(k) + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} dA_2(k) + \varepsilon^3 \int_{-\infty}^{\infty} dA_3(k) \quad \dots\dots\dots (4a)$$

$$\phi = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} dB_1(k, z) + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} dB_2(k, z) + \varepsilon^3 \int_{-\infty}^{\infty} dB_3(k, z) \quad \dots\dots\dots (4b)$$

ここで、 $dA_1(k)$ および $dB_1(k)$ が時間に対して独立であるとの仮定をおいているが、これは厳密には正しくない。つまり、3 次の非線形干渉により 4 波共鳴干渉が生じる領域では発散するため、このような展開をすることができない。ここでは、空間波形データを対象とすることにより以下の関係式を導出する。

ϕ の $O(\varepsilon)$ が Laplace および底面での境界条件を満たしかつ進行波解であると仮定すると、 dA_1 および dB_1 についての関係が次式のように求められる。

$$dB_1(k, z) = -\frac{ig}{\omega} \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{ch}[kh]} dA_1(k) \quad \dots (5)$$

$O(\varepsilon^2)$ では dA_2 および dB_2 は $D(k_1, k_2)$ および $E(k_1, k_2)$ (補遺参照) を用いて以下のように関係づけられる。

$$dA_2(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(k_1, k_2) dA_1(k_1) dA_1(k_2) \times \delta(k - k_1 - k_2) \quad \dots\dots\dots (6a)$$

$$dB_2(k, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} iE(k_1, k_2) \frac{\text{ch}[k_1 + k_2(z+h)]}{\text{ch}[k_1 + k_2 h]} \times dA_1(k_1) dA_1(k_2) \delta(k - k_1 - k_2) \quad \dots (6b)$$

$O(\varepsilon^3)$ における dA_3 および dB_3 の関係は $F(k_1, k_2, k_3)$ および $G(k_1, k_2, k_3)$ (補遺参照) を用いて以下のように求められる。

$$dA_3(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1, k_2, k_3) dA_1(k_1) \times dA_1(k_2) dA_1(k_3) \delta(k - k_1 - k_2) \quad \dots\dots (7a)$$

$$dB_3(k, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} iB(k_1, k_2, k_3) \times \frac{\text{ch}[k_1 + k_2 + k_3(z+h)]}{\text{ch}[k_1 + k_2 + k_3 h]} dA_1(k_1) \times dA_2(k_2) dA_3(k_3) \delta(k - k_1 - k_2) \quad \dots (7b)$$

2 次の非線形核関数は Sharma and Dean (1979) と同一のものとなっており、その特性については、木村(1985)や関本・水口 (1995) に詳細な説明が既に行われている。式 (7) に現れる F および G は、3 つの波数と水深をパラメータとして含むためその関係は複雑であり、これらの項の個々の影響については別の機会に紹介を行うことにし、ここでは一方向波の流速の鉛直分布について検討を行う。

2.3 計算方法

内部特性の計算を行う場合、2 重および 3 重積分を解くため、フーリエモードの数が増加すると計算時間もまた増大する。離散化された状態において 2 次の非線形核関数 $D(k_1, k_2)$ および $E(k_1, k_2)$ について考えると、波数 k に選択性はないため、2 つの波数 $k_i, k_j (i, j \in Z)$ の幾何学的対称性より次式を得る。

$$\left. \begin{array}{l} (i, j) \xleftrightarrow{\text{対称}} (-i, -j) \\ (-i, j) \xleftrightarrow{\text{対称}} (i, -j) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、aliasing 誤差を考えると、 $i+j < n_{\max}$ (ここで、 $n_{\max}$ はフーリエモードの最大値) となる領域のみを計算すればよい。

3 次の非線形核関数 $F(k_1, k_2, k_3)$ および $G(k_1, k_2, k_3)$ についても同様に、幾何学的対称性から、

$$\left. \begin{array}{l} (i, j, k) \xleftrightarrow{\text{対称}} (-i, -j, -k) \\ (-i, j, k) \xleftrightarrow{\text{対称}} (i, -j, k) \xleftrightarrow{\text{対称}} (i, j, -k) \\ (-i, -j, k) \xleftrightarrow{\text{対称}} (i, -j, -k) \xleftrightarrow{\text{対称}} (-i, j, -k) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

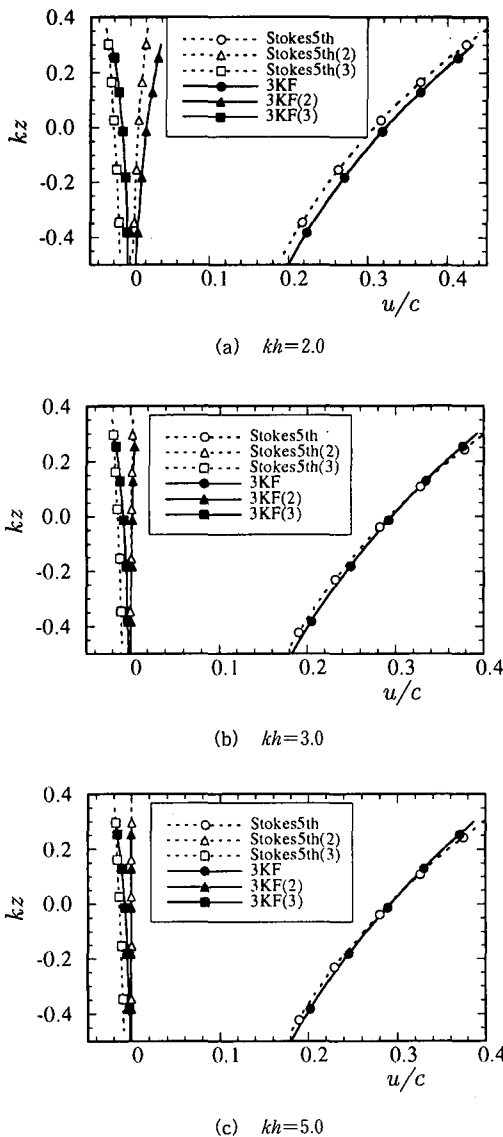
が得られ、 N 個のフーリエモードに対する計算時間は $O(N^3) \Rightarrow O(N^3/10)$ 程度となる。

3. 計算結果

3.1 Stokes 波との比較

まず始めに Fenton (1990) の導出した Stokes 波の 5 次近似解を対象に、波形勾配 ak を 0.3 と固定し、相対水深 kh を 2.0, 3.0 および 5.0 と変化させた場合の、波頂点における波速 c で無次元化された水平方向の水粒子速度 u の鉛直分布の比較を行う。図-1 はその結果であり、図中の実線は 3 次の非線形核関数から計算されたものを、点線は Stokes 波の 5 次近似解 (以下では単に Stokes 波と呼ぶ) を示している。また、図中の Δ は 2 次成分、 $\square$ は 3 次成分のみを示したものである。全体の流速分布 ($\bigcirc$ 印) については解析解と核関数を用いたものに多少の差異は存在するが、各水深でその分布形状はよく一致している。各オーダーの成分について調べると、 $kh=2.0$ では水平方向の水粒子速度の 2 次成分と 3 次成分がほぼ同じオーダーの量であるのに対し、水深が深くなるに従い 2 次成分の絶対量は減少する。3 次の非線形成分の役割としては負の方向、つまり 1 次成分と逆方向に流速を与えるものであり、多少の誤差はあるものの計算値は解析解とほぼ一致している。

ついで、図-2 は波頂点および波谷における $kh=3.0$, $ak=0.3$ の Stokes 波の水平方向の水粒子速度について 3 次のモデルと Wheeler および Chakrabarti の推定法

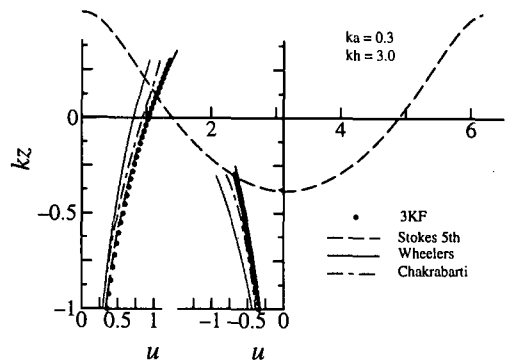


図一1 Stokes 波 (5 次近似解) の波頂点における水平方向の水粒子速度の鉛直分布の比較 ($ak=0.3$) [実線-(7) 式, 点線-解析解]

による結果をそれぞれ比較したものである。Stokes 波に対して Wheeler および Charkrabarti の手法によるものは、自由表面近傍において 10~20% 程度の差が見られるのに対し、3 次のモデルは良く一致している。この場合、Wheeler および Charkrabarti の手法は Stokes 波に対して波頂部で過小、波谷部で過大となっており、従来用いられている手法は定常波の内部流速を推定することすらできないことがわかる。

3.2 長波・短波の相互作用への適用

ついで波数 k_L および振幅 a_L を持つ長波に波数 k_S および振幅 a_S を持つ短波が重複している場を対象に検討



図二 Stokes 波に対する様々な手法による水平方向の水粒子速度流速の予測 ($ak=0.3$, $kh=3.0$)

表一 成分波の計算条件 ($N=32$, $k_L h=5.0$)

	k_L	k_S	ϵ_s
Case 1 a	2	3	0
Case 1 b	2	3	$\pi/4$
Case 1 c	2	3	$\pi/2$
Case 1 d	2	3	π
Case 2 a	2	7	0
Case 2 b	2	7	$\pi/4$
Case 2 c	2	7	$\pi/2$
Case 2 d	2	7	π
Case 3 a	2	9	0
Case 3 b	2	9	$\pi/4$
Case 3 c	2	9	$\pi/2$
Case 3 d	2	9	π

を行う。この場合、線形成分は次式によって与える。

$$\eta(x) = a_L \cos(k_L x) + a_S \cos(k_S x + \epsilon_s) \cdots \cdots (10)$$

ここで、 ϵ_s は長波に対する短波の位相の差である。問題を簡単にするため、長波から見た相対水深を $k_L h=5.0$ 、それぞれの波形勾配 $a_L k_L$ および $a_S k_S$ を共に 0.1 と固定し、 k_S/k_L および ϵ_s を変化させ、表一に示すように合計 12 ケース計算を行った。

図三(a) に示すのは、 $k_S/k_L=3/2$ のケースの波頂点における水平方向の水粒子速度の鉛直分布である。横軸は線形長波の波速 c_L で無次元化された水平方向の流速 u 、縦軸は長波の波数 k_L で無次元化された鉛直座標を示し、比較のために zero-cross 法で計算した場合の見掛けの波形勾配 $(ka)_D$ と同じ波形勾配をもつ Stokes 波の 5 次近似解を点線で示している。長波と短波の位相差により、この時の見かけの波形勾配は多少変化するが約 0.18 である。Case 1 のように長波と短波の位相差が小さい場合、水平方向の水粒子速度の鉛直分布は Stokes 波とほ

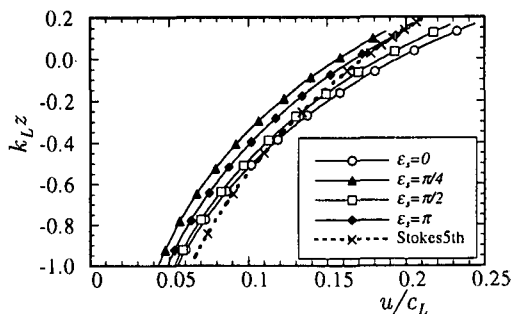
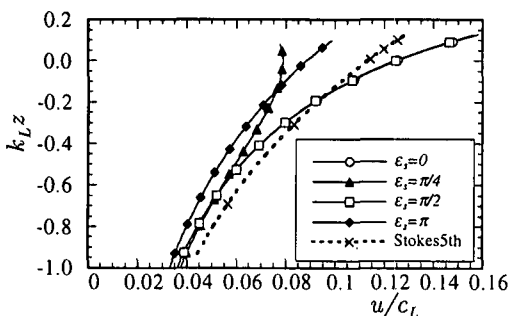
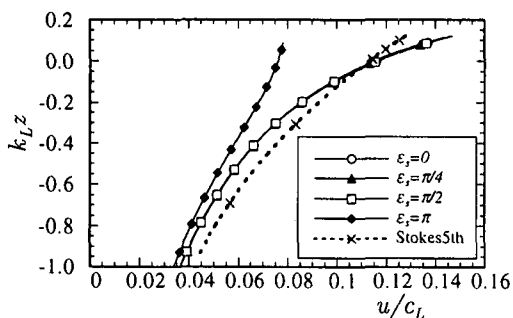
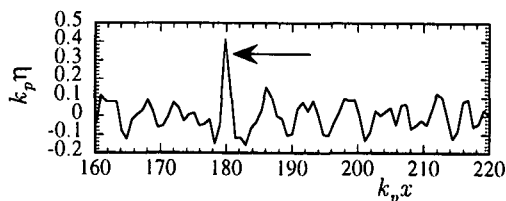
(a) Case 1 ($k_s/k_L=3/2$)(b) Case 2 ($k_s/k_L=7/2$)(c) Case 3 ($k_s/k_L=9/2$)

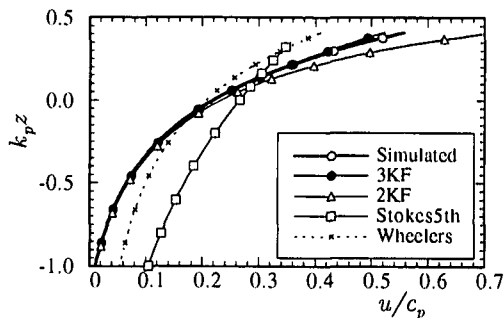
図-3 2成分波の水平方向の水粒子速度の鉛直分布 (Case 1)

ほぼ同様な分布形状を持っている。

これに対して、図-3(b) および (c) に示した $k_s/k_L=7/2$, $k_s/k_L=9/2$ のケースでは、Stokes 波と比較して静水面下では常に小さく、位相によっては自由表面付近では過大となっている。このように単に 2 成分の干渉であっても定常波とかなり異なる流速分布を持ち、この傾向は Zhang ら (1992) の実験結果と定性的に一致している。また、図-3(b) に示す Case 2a で、 $\varepsilon_s=0$ の場合が最も流速が大きく、 $\varepsilon_s=\pi/2$ の流速が最も小さい。この時の両者の見かけの波形勾配は殆ど同じであるにも関わらず、波頂点の流速は 3 倍となっている。



(a) 波形



(b) 水粒子速度の鉛直分布

図-4 不規則波の水粒子速度の鉛直分布 ($m=5$, $k_p\alpha=0.15$)

3.3 不規則波に対する検討

最後に一例として不規則波を対象とした計算結果を図-4 に示す。比較の対象とするのは、Yasuda ら (1994) が空間波形と自由表面上の速度ポテンシャルからスペクトル法を用いて計算した Freak wave の空間波形である。計算条件は Wallops 型スペクトル $m=5$ 、代表波形勾配 $k_p\alpha=0.15$ を持つ不規則波の Freak wave 出現時の空間波形 dA から dA_1 , dA_2 および dA_3 を計算し、繰り返して計算により dA に収束させた。この時の矢印で示した Freak wave の上下非対称性は 0.66、隣り合う波高の比は 3.21 となっている。図より明らかなように、実線○で示したスペクトル法の結果と実線●で示した 3 次まで考慮したものはほぼ一致しているが、2 次のは過大評価になっている。また、同時に示した Stokes 波 (実線□) および Wheeler の方法 (点線×) により推定された結果は、静水面上で過小、静水面下で過大となっている。

4. おわりに

以上、空間波形を対象に 3 次の非線形干渉が波浪場の流速に与える影響について検討を行った。その結果、3 次の非線形干渉の影響を考慮することにより、特に深海域における波動場の内部特性を従来の手法より精度良く推定できることを示した。

参考文献

- 木村 晃 (1984): 非線形長周期波の 2 次元スペクトル, 第 32 回 海岸工学講演会論文集, pp. 154-158.
- 関本恒浩・水口 俊: 非線形二次長周期波の方向スペクトル, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 286-290.

- 浜中健一郎・佐藤典之 (1984): 不規則波の非線形浅水変形について, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 138-142.
- DHL (1982): Wave kinematics in irregular waves, Delft Hydraulic Laboratory Technical Report, VM1-4.
- Fenton, J. (1990): Nonlinear wave theories, pp. 3-36.
- Sobey, R. J. (1992): A local Fourier approximation method for irregular wave kinematics, Applied Ocean Research, 14, pp. 93-105.
- Gudmestad, O. T. and N. Spidsøe (1990): Deep water wave kinematics models for deterministic and stochastic analysis of drag dominated structures, Water wave kinematics, eds. (A. Tørum and O. T. Gudmestad), Kluwer Academic Pub, pp. 57-87.
- Gudmestad, O. T. (1993): Measured and predicted deep water wave kinematics in regular and irregular seas, Marine Structures, 6, pp. 1-73.
- Marthinsen, T. and S. Winterstein (1992): On the skewness of random surface waves, In Proc. of the 2th ISOPE, 3, pp. 472-478.
- Masuda, A., Y. Kuo, and Mitsuyasu (1979): On the dispersion relation of random gravity waves: theoretical framework, J. F. M., 92, 717-730.
- Sharma, J. and R. G. Dean (1979): Second-order directional seas and associated wave forces, OTC, pp. 2505-2514.
- Stiassnie, M. and L. Shemer (1984): On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves, J. F. M., 143, pp. 47-67.
- Yasuda, T., N. Mori and S. Nakayama (1994): Freak wave kinematics in unidirectional deep water waves, Proc. 4th ISOPE, 3, pp. 43-50.
- Zakharov, V. E. (1968): Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, J. Appl. Tech. Phys., 9, 190-194.
- Zhang J., R. Randall and C. Spell (1992): Component wave interactions and irregular wave kinematics, JWPCOE, 118 (4), pp. 401-416.

付 録

$$D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \left\{ \frac{1}{2g}(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1\omega_2) - \frac{g\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{2\omega_1\omega_2} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{g}E(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \right\} \quad \cdots (11)$$

$$E(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \left\{ \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1\omega_2 - 2\omega_0^2) + \frac{g^2}{2\omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2)} \left[(\omega_2|\mathbf{k}_1|^2 + \omega_1|\mathbf{k}_2|^2) - \frac{g^2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{\omega_1\omega_2} \right] \right\} / [(\omega_1 + \omega_2) - g\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{\omega_1 + \omega_2} \text{th}(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|h)] \quad \cdots (12)$$

$$F_{1,2,3} = \frac{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)W_{0123} - |\mathbf{k}| \text{th}(|\mathbf{k}|h)Y_{0123}}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 - g|\mathbf{k}| \text{th}(|\mathbf{k}|h)} \quad \cdots (13)$$

$$G_{1,2,3} = \frac{Y_{0123}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} - \frac{gF}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \quad \cdots (14)$$

$$W_{0123} = V_{0123} + \frac{1}{3}|\mathbf{k}| \text{th}(|\mathbf{k}|h) \sum_{i,j,k}^* \omega_i C_{ijk} - \frac{1}{6g}|\mathbf{k}| \text{th}(|\mathbf{k}|h) \sum_{i,j,k}^* (\omega_{ij}^2 + \omega_{0k}^2) E_{ij} - \left[\frac{g}{3\omega_1\omega_2\omega_3} \sum_{i,j,k}^* \omega_i \omega_j S_{0kij} - \frac{1}{3} \sum_{i,j,k}^* \omega_i^2 \mathbf{k}_j \mathbf{k}_k \right. \\ \left. + \frac{|\mathbf{k}| \text{th}(|\mathbf{k}|h)}{6\omega_1\omega_2\omega_3} \sum_{i,j,k}^* \omega_i \omega_j |\mathbf{k}_k|^2 \right] \quad \cdots (15)$$

$$Y_{0123} = X_{0123} + Q_{0123} - \frac{1}{3} \sum_{i,j,k}^* \omega_i D_{ijk} - \frac{g}{6} \sum_i^3 |\mathbf{k}_i|^2 + \frac{g^2 R_{0123}}{3(\omega_1\omega_2\omega_3)} \sum_i^3 \omega_i \quad \cdots (16)$$

$$V_{0123} = \frac{1}{3} \left[-\frac{gT_{0123}^*}{2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} + \frac{1}{3} \sum_i^3 \omega_i |\mathbf{k}| \text{th}(|\mathbf{k}|h) \times \sum_{i,j}^* D(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \right] + \left\{ T_{0123}^* - \frac{|\mathbf{k}|}{18} \text{th}(|\mathbf{k}|h) \times \left[\sum_{i,j}^* (\Omega_{i,j} + \Omega_{0,-j}) \sum_{i,j}^* E(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \right] - \frac{1}{3} \sum_i^3 \omega_i T_{0123}^* - \frac{3g}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} \times \left(S_{0123}^* - \sum_{i,j,k}^* \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j |\mathbf{k}_k| \right) - \frac{g|\mathbf{k}| \text{th}(|\mathbf{k}|h)}{2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} \sum_i^3 |\mathbf{k}_i|^2 \right\} \quad \cdots (17)$$

ここに,

$$\Omega_{i,j} = \Omega(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) = |\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j| \text{th}(|\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j|h) \quad \cdots (18)$$

$$T_{0123}^* = \frac{1}{6} \left(\sum_{i,j,k}^* T_{0,i+j,k} + \sum_i^3 T_{0,0-i,i} \right)$$

であり, $T_{0,1,2}$ はそれぞれ,

$$T_{0,1,2} = |\mathbf{k}_1| [|\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}| \text{th}(|\mathbf{k}|h) \text{th}(|\mathbf{k}_1|h) - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2] \quad \cdots (19)$$

$$X_{0123} = \frac{g}{6\omega_1\omega_2\omega_3} [\omega_3(\omega_1\omega_3 - \omega_3E_{23}) \times (U_{0,1,2+3} + U_{0,1,0-1}) + \omega_3(\omega_2\omega_3 - \omega_1E_{13}) \times (U_{0,2,1+3} + U_{0,2,0-2}) + \omega_2(\omega_2\omega_3 - \omega_1E_{12}) \times (U_{0,3,1+2} + U_{0,3,0-3})] \quad \cdots (20)$$

$$Q_{0123} = \frac{1}{6g} \sum_{i,j,k}^* (\omega_{ij}^2 + \omega_{0-k}^2) (\omega_i + \omega_j) E_{ij} \quad \cdots (21)$$

$$U_{0123} = -[\omega_1\omega_2(T_{0,1+2,3} + T_{0,0-3,3}) \times (-gD_{12} + E_{12} - \omega_3) + (\omega_1\omega_3(T_{0,1+3,2} + T_{0,0-2,2}) \times (-gD_{13} + E_{13} - \omega_2) + \omega_2\omega_3(T_{0,2+3,1} + T_{0,0-1,1}) \times (-gD_{23} + E_{23} - \omega_1))]/[6\omega_1\omega_2\omega_3] \quad \cdots (22)$$

ここで,

$$\sum_{i,j,k}^* a_i b_j c_k = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1 \quad \cdots (23)$$

$$\sum_{i,j}^* a_i b_j = a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_3 \quad \cdots (24)$$